SUR LA
SURFACE
DU QUATRIÈME ORDRE CONTENANT UNE CONIQUE

NOTE

DE

LUCIEN GODEAUX

Docteur en sciences physiques et mathématiques

MONS

DEQUESNE-MASQUILLIER, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

Successeur Léon DEQUESNE

1912

SUR LA SURFACE
DU QUATRIÈME ORDRE CONTENANT UNE CONIQUE

Note de LUCIEN GODEAUX

Docteur en Sciences physiques et mathématiques

Dans un mémoire récent (1), M. Severi s'est occupé des transformations birationnelles en elle-même d'une surface régulière ($p_g = p_a$), il a démontré que si une pareille surface admet un groupe discontinu infini de pareilles transformations, ce groupe se reproduit en un groupe isomorphe de transformations à coefficients entiers, de module ± 1, d'une certaine forme quadratique, en elle-même. M. Severi s'est occupé particulièrement de la surface du quatrième ordre ($p_a = P_4 = 1$) contenant une sextique de genre deux, surface déjà considérée par M. Fano (2). Actuellement, je vais m'occuper d'une surface du quatrième ordre ($p_a = P_4 = 1$) contenant une conique. Une pareille surface ne possède ni courbes elliptiques, ni courbes hyperelliptiques de genre deux. Je démontre de plus, qu'elle ne possède aucune transformation birationnelle involutive en elle-même.

(1) *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1910, xxx.

(2) *Sopra alcune superficie del 4° ordine rappresentabili sul piano doppio.* Rendiconti del R. Istitulo Lombardo, 1906, (2) xxxix.

1. — Soit F une surface d'ordre quatre, de S_3, contenant une conique. D'après un théorème de M. Nöther [1], les surfaces telles que F dans S_3 sont en nombre ∞^{33} et contenir une conique pour une surface du quatrième ordre équivaut à une condition. On peut d'ailleurs le vérifier aisément : Les surfaces du quatrième ordre de S_3 sont en nombre ∞^{34}, il y a ∞^{34-9} de ces surfaces contenant une conique donnée. D'autre part, il y a ∞^8 coniques dans S_3, donc les surfaces telles que F sont en nombre ∞^{33}. Un raisonnement analogue a été employé par M. Fano (loc. cit.). On conclut de là que le nombre-base [2] de F est $\rho = 2$. De plus, F a tous ses genres égaux à l'unité, ce qu'on peut exprimer par les égalités $p_a = P_4 = 1$ [3].

Dénotons par C_1 une section plane de F, par C_2 la conique située sur cette surface. Les courbes C_1, C_2 forment une base ; nous allons voir que cette base est minima.

Sur la surface F, on sait que tout système linéaire $|C|$, formé par des courbes de genre π, est de degré $n = 2\pi - 2$ et de dimension $r = \pi$. Par conséquent, C_1 étant de genre trois et C_2 rationnelle, le déterminant de la base C_1, C_2 est égal à

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -12.$$

Ce déterminant, pris avec le signe contraire, n'étant pas un carré parfait, la surface F ne contient pas de courbes elliptiques [4].

(1) *Zür Grundlegung der Theorie der Algebraischen Raumkürven* (p. 79). Abhandlungen der K. Preuss. Akademie zu Berlin, 1882.

(2) Pour la définition du nombre-base, voir Severi : *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica :* Mathematische Annalen, 1906, LXII.

(3) Enriques. *Intorno alle superficie algebriche di genere lineare* $p^{(1)} = 1$. Rendiconto della R. Accademia di Bologna, 1906.

(4) Loc. cit. (1).

Si les courbes C_1, C_2 ne forment pas une base minima, le déterminant d'une base minima est un diviseur de — 12 [1] donc il peut prendre les valeurs — 1, — 2, — 3, — 4, — 6. On peut d'abord exclure les valeurs — 1, — 4, car alors F posséderait des courbes elliptiques, ce qui a été reconnu impossible.

Soient Γ_1, Γ_2 deux courbes de F formant une base-minima. Posons :

$$\nu_{11} = [\Gamma_1 \Gamma_1], \nu_{22} = [\Gamma_2 \Gamma_2], \nu_{12} = [\Gamma_1 \Gamma_2] \text{ (}^2\text{)}.$$

Le déterminant de cette base sera :

$$\Delta = \nu_{11} \nu_{22} - \nu_{12}^2.$$

Si $\Delta = -2$, ν_{11}, ν_{22} étant pairs, ν_{12} est aussi pair, et par suite Δ est divisible par 4, ce qui est incompatible avec l'hypothèse $\Delta = -2$.

Si $\Delta = -6$, on arrive de la même façon à une impossibilité.

S $\Delta = -3$, ν_{11} ν_{22} étant multiples de 4, on a :

$$\nu_{12}^2 = 4h + 3.$$

Cela est impossible, parce qu'un carré divisé par 4, donne toujours pour reste 0 ou 1. Ainsi, il n'y a aucune base dont le déterminant divisé — 12 et par conséquent, C_1, C_2 donnent une base minima.

2. — Soit C une courbe, de genre π et d'ordre n, telle que :

$$C \equiv \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2.$$

(1) Voir Severi. *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique.* Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure de Paris, 1908. (3), xxv.

(2) La notation [L K] indique le nombre de points communs aux courbes L. K.

On a :

$$n = 2\pi - 2 = 4\lambda_1^2 + 4\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_2^2.$$

D'après les résultats obtenus par M. Severi, dans son premier mémoire cité, à toute solution entière $(\lambda_1 \lambda_2)$ de l'équation,

$$2\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2^2 = \pi - 1.$$

correspondra sur F une courbe effective de genre π,

$$C \equiv \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2,$$

pourvu que l'expression $2\lambda_1 + \lambda_2$ soit positive (Eventuellement, on pourra changer les signes de λ_1, λ_2 pour remplir cette dernière condition).

La substitution unimodulaire $\lambda_1 = u$, $\lambda_2 = t + u$, transforme l'équation (1) en

$$t^2 - 3u^2 = 1 - \pi,$$

de sorte qu'à une solution entière (t, u) de cette dernière équation, correspond une courbe de genre π sur F.

Ainsi, on peut voir que la surface F possède les courbes rationnelles (nécessairement isolées, puisque $r = \pi = o$) ;

$$C_2,\ C_1 + 3C_2\ 4C_1 + 11C_2, \ldots.$$

$$C_1 - C_2,\ 4C_1 - 3C_2, \ldots.$$

Mais on peut voir que la surface F ne contient pas de courbes de genre deux. En effet, alors, l'équation.

$$t^2 - 3u^2 = -1$$

aurait des solutions entières, mais un carré t^2 divisé par 3, ne donne jamais pour reste que 0 ou 1. L'équation précédente n'a donc pas de solutions entières. Invoquant un résultat précédent, on peut conclure que :

Une surface de quatrième ordre, contenant une conique et assujettie à cette seule condition, ne possède ni courbes elliptiques, ni courbes de genre deux, formant des systèmes linéaires de dimensions respectives un et deux.

3. — Du théorème précédent, on peut tirer une conséquence importante relative aux transformations birationnelles involutives qui pourraient exister sur F.

Supposons que F possède une transformation birationnelle involutive Θ. On peut construire une surface Φ telle que à un point de F corresponde un point de Φ et inversement, à un point de Φ deux points de F qui se correspondent dans la transformation Θ. D'après une remarque de MM Enriques et Severi (¹), la surface Φ rentre dans l'une des catégories définies par les caractères suivants :

1°) $p_a = P_2 = 0$ (surfaces rationnelles). L'involution Θ présente un nombre infini de coïncidences.

2°) $p_a = P_4 = 1$. L'involution Θ présente un nombre fini de coïncidence.

3°) $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$. L'involution Θ n'a aucune coïncidence.

Dans le premier cas, la surface Φ possède une infinité de réseaux de courbes unisécantes (donc rationnelles). A chacun de ces réseaux correspond sur F un réseau de courbes de genre deux, ce qui est impossible.

Dans le troisième cas, le nombre-base ρ' de la surface Φ est égal à 10 (²). Mais, d'après la définition même du nombre-base ρ d'une surface F, on doit avoir $\rho' \leqslant \rho$, alors qu'ici on a $\rho = 2$.

Il reste le second cas possible, donc :

(¹) *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques.* Acta Mathematica, 1909, XXXII ; 1910, XXXIII.

(²) Fano. *Superficie algebriche digenere zero e bigenere uno e loro casi particolari.* Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo, 1909, XXIX.

Si une surface d'ordre quatre assujettie à la seule condition de contenir une conique, possède une involution de couples de points, cette involution a le caractère $p_a = P_4 = 1$ *et a un nombre fini de coïncidences.*

4. — Supposons que la surface F admet une transformation birationnelle en elle-même, et soient Γ_1, Γ_2 les transformées des courbes C_1, C_2 respectivement : On a (α. β, γ, δ étant entiers).

$$\Gamma_1 \equiv \alpha C_1 + \gamma C_2, \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1)$$
$$\Gamma_2 \equiv \beta C_1 + \delta C_2.$$

D'après le théorème de M. Severi [1] sur les transformations birationnelles en elles-mêmes d'une surface régulière, la forme quadratique indéfinie.

$$2\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2^2$$

admet la substitution automorphe $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

Si $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, on sait que l'on a [2] :

$$\alpha = t - u, \beta = u, \gamma = 2u, \delta = t + u,$$

t et u étant les solutions de l'équation

$$t^2 - 3u^2 = 1.$$

Les plus petites solutions positives de cette équation sont $u = 1$, $t = 2$. Le groupe des substitutions automorphes de module $+ 1$ de la forme quadratique considérée en elle-même est donc engendré par la substitution.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

[1] Loc. cit. [1].

[2] Cahen. *Eléments de la théorie des nombres*. Paris, Gauthier-Villars.

Occupons-nous maintenant des substitutions automorphes de modules — 1. Soit $\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$ une pareille substitution. On doit avoir :

$$2\alpha'^2 + 2\alpha'\gamma' - \gamma'^2 = 2, \quad 2\beta'^2 + 2\beta'\delta' - \delta'^2 = -1,$$

$$2\alpha'\beta' + \alpha'\delta' + \beta'\gamma' - \gamma'\delta' = 1, \quad \alpha'\delta' - \beta'\gamma' = -1.$$

Posons $d' = u'$, $\gamma' = t' + u'$, $\beta' = u''$, $\delta' = t'' + u''$. Il vient :

$$t'^2 - 3u'^2 = -2. \quad t''^2 - 3u''^2 = 1,$$

$$3u'u'' - t't'' = 1, \quad u't'' - u''t' = -1.$$

On en déduit :

$$u' = t'' + u'', \quad -t' = t'' + 3u'',$$

d'où, par un simple changement de notation, la substitution automorphe de module — 1 la plus générale est donnée par :

$$\alpha' = -t - u, \quad \beta' = u, \quad \gamma' = -2t - 4u, \quad \delta' = t + u,$$

$$t^2 - 3u^2 = 1.$$

Un calcul simple montre qu'une pareille substitution est involutive.

Le produit de deux substitutions, l'une de module + 1, l'autre de module — 1, est une substitution de module — 1, donc :

Le groupe infini discontinu des transformations linéaires à coëfficients entiers de la forme

$$2\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2^2$$

en elle-même, est engendré par les substitutions

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Si la surface F admet une transformation birationnelle involutive en elle-même, celle-ci donne évidemment lieu à une substitution à coëfficients entiers, de module — 1, transformant la forme quadratique de F en elle-même. En effet, si une telle transformation donnant lieu à une substitution de module $+ 1$,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix},$$

on aurait :

$$\alpha + \delta = 0,$$

d'où, puisque :

$$\alpha = t - u, \delta = t + u, t^2 - 3u^2 = 1 ; t = o, 3u^2 + 1 = o,$$

ce qui est impossible en nombres entiers.

Ainsi, pour une transformation birationnelle involutive de F en elle-même, on a :

$$\Gamma_1 \equiv \alpha' C_1 + \gamma' C_2,$$

$$\Gamma_2 \equiv \beta' C_1 + \delta' C_2,$$

avec :

$$\alpha' = -(t + u), \beta' = u, \gamma' = -2(t + 2u), \delta' = t + u,$$

Γ_1, Γ_2 étant respectivement les transformées de C_1, C_2. On déduit de là :

$$\Gamma_1 \equiv - \left\{ (t + u) C_1 + 2(t + 2u) C_2 \right\},$$

ce qui est impossible.

La surface du quatrième ordre assujettie à la seule condition de contenir une conique, ne possède aucune transformation birationnelle involutive en elle-même.

Morlanwelz, le 21 décembre 1911.