Sur les courbes planes du troisième ordre

Dans une petite note publiée dans « Mathesis » (1) il y quatre ans, j'avais rencontré deux cubiques planes circonscrites à un triangle ; la question peut être généralisée, comme je vais le montrer dans ces quelques lignes.

1. — Soient donnés deux triangles $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$ situés d'une manière quelconque dans le plan. Nous employons les coordonnées homogènes (x_1, x_2, x_3) du plan. Soient a_1, a_2, a_3 respectivement les côtés $A_1 A_2 A_3$ du triangle opposés aux sommets A_1, A_2, A_3, et

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0$$

leurs équations. Soient encore $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13})$, $(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23})$, $(\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33})$ les coordonnées respectives des points B_1, B_2, B_3.

Joignons un point P quelconque, de coordonnées (y_1, y_2, y_3) aux points B_1, B_2, B_3 ; puis les points d'intersection des droites PB_1, PB_2, PB_3 respectivement avec les côtés a_1, a_2, a_3 aux sommets opposés du triangle $A_1 A_2 A_3$. Les trois droites ainsi obtenues ne concourent généralement pas en un même point ; cette dernière propriété n'a lieu que pour des positions particulières du point P, dont nous allons rechercher le lieu.

La droite PB_1 a pour équation

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_5 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \end{vmatrix} = 0$$

Une droite passant par l'intersection de a_1 avec PB_1 a pour équation

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \end{vmatrix} - \lambda x_1 = 0.$$

Si cette droite passe par A_1, on a

$$\lambda = \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ \alpha_{12} & \alpha_{13} \end{vmatrix},$$

---

(1) *Sur quelques cubiques associées au triangle.* Mathesis. 3e série, tome VII, 1907, pp. 236-240.

donc l'équation de la droite joignant A_1 à l'intersection de a_1 avec PB_1 est

$$\begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$x_2\,(y_1\alpha_{13} - y_3\alpha_{11}) = x_3\,(y_1\alpha_{12} - y_2\alpha_{11}). \qquad (1)$$

Les droites joignant les points A_2, A_3 respectivement aux points d'intersections a_2, a_3 avec PB_2, PB_3 ont pour équations:

$$x_3\,(y_2\alpha_{21} - y_1\alpha_{22}) = x_1\,(y_2\alpha_{23} - y_3\alpha_{22}). \qquad (2)$$

$$x_1\,(y_3\alpha_{32} - y_2\alpha_{33}) = x_2\,(y_3\alpha_{31} - y_1\alpha_{33}). \qquad (3)$$

Pour exprimer que ces trois droites ont un point commu Q, il suffit d'éliminer (x_1, x_2, x_3) entre les équations (1), (2) et (3), c'est-à-dire ici de les multiplier membre à membre. Le lieu du point P est donc

$$\begin{aligned} &(y_1\alpha_{13} - y_3\alpha_{11})\,(y_2\alpha_{21} - y_1\alpha_{22})\,(y_3\alpha_{32} - y_2\alpha_{33}) \\ &= (y_1\alpha_{12} - y_2\alpha_{11})\,(y_2\alpha_{23} - y_3\alpha_{22})\,(y_3\alpha_{31} - y_1\alpha_{33}) \end{aligned} \qquad (I)$$

C'est une courbe du troisième ordre passant par les points A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 B_3. On le vérifie en substituant les coordonnées de ces points aux coordonnées (y_1, y_2, y_3) daes l'équation (I).

2. — Soit maintenant Q un point du plan des triangles donnés. Supposons que les droites A_1Q, A_2Q, A_3Q rencontrent respectivement les côtés a_1, a_2, a_3 en C_1, C_2, C_3. Si les droites B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 concourent en un même point P, le point Q décrit une certaine courbe. Dans les équations (1), (2) et (3), interprétons les (x) comme les coordonnées du point Q et les (y) comme coordonnées courantes. Pour obtenir le lieu cherché il suffira d'éliminer les (y) entre ces équations. Ce lieu est donc du troisième ordre représenté par l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha_{13}x_2 - \alpha_{12}x_3 & \alpha_{11}x_3 & -\alpha_{11}x_2 \\ -\alpha_{22}\alpha_3 & \alpha_{21}x_3 - \alpha_{23}x_1 & \alpha_{22}x_1 \\ \alpha_{33}x_2 & -\alpha_{33}x_1 & \alpha_{32}y_1 - \alpha_{31}x_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Cette courbe passe également par les points A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3.

Dans l'article cité, j'avais considéré les cubiques (I), (II) dans le cas où le triangle $B_1 B_2 B_2$ s'aplatit sur la droite à l'infini.

Remarquons si le triangle $B_1 B_2 B_3$ était circonscrit un triangle $A_1 A_2 A_3$, les courbes (I) et (II) dégénéreraient en les trois côtés du triangle $B_1 B_2 B_3$.

3. — A un point P situé sur la courbe (I) correspond un point Q situé sur la courbe (II) et réciproquement. Cherchons la classe de la courbe enveloppée par la droite P Q, c'est-à dire cherchons le nombre de pareilles droites passant par un point donné $(z_1\, z_2\, z_3)$. Soient $(y_1\, y_2\, y_3)$ les coordonnées d'un point P, $(x_1\, x_2\, x_3)$ celles du point Q correspondant. On doit avoir

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Posons pour abréger

$$A_{ik} = y_i\, \alpha_{ik} - y_k\, \alpha_{ii}\,.$$

Dans l'équation (4), remplaçons x_1, x_2, x_3 par leurs valeurs tirées des équations (1) et (2). On obtient la courbe du troisième ordre (en coordonnées y_1, y_2, y_3) :

$$\begin{vmatrix} A_{21} A_{13} & A_{12} A_{23} & A_{13} A_{23} \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Si au contraire, on tire les valeurs de (x) des équations (1) et (3), on a

$$\begin{vmatrix} A_{31} A_{13} & A_{13} A_{32} & A_{13} A_{23} \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Le nombre de valeurs des (y) communes aux équations (5) et (6) en dehors des points A et B donne le nombre de droites P Q passant par le point $(z_1\, z_2\, z_3)$.

La courbe (5) a un point double en A_3 et passe par les points A_1, A_2, B_1 et B_2. La courbe (6) a un point double en A_2 et passe par A_1, A_3, B_1 et B_3. Ces deux courbes ont 9 points communs, deux se trouvent en A_2, deux en A_3 et un seul en chacun des points A_1, B_1. Par suite, il y a trois droites passant par un point et de pareilles droites enveloppent une courbe de troisième classe.

Sur l'hyperboloïde à une nappe

1. — Soient deux plans α, β, deux points A, B et une droite d.

Considérons les triangles O_1, O_2, O_3 dont un sommet O_1 se trouve sur la droite d, les sommets O_2, O_3 se trouvant respectivement dans les plans α, β, et les côtés $O_1 O_2$, $O_1 O_3$ passant respectivement par les points A, B.

Le lieu de la droite $O_2 O_3$ est un hyperboloïde à une nappe. En effet, cette droite s'appuie sur la droite A B et sur les droites intersections des plans α, β respectivement avec les plans Ad, ,Bd.

2. — Soit donné un hyperboloïde H par trois génératrices a, b, c d'un même mode. Prenons sur a deux points A, B. Menons les plans Ab, Bc. Ces plans se rencontrent en une droite d. Il est maintenant facile de construire une droite s'appuyant sur a, b, c ; ce sera le troisième côté $O_2 O_3$ d'un triangle $O_1 O_2 O_3$ dont les sommets décrivent respectivement les droites b, b, c et dont les côtés $O_1 O_2$, $O_1 O_3$ passent par A, B respectivement. Cette construction est plus simple que celle qui est donnée par M. De Locht dans sa géométrie descriptive (1re année).

Liége, 8 Novembre 1911

Lucien GODEAUX.
Docteur en Sciences physiques et mathématiques.