SUR LES CONGRUENCES LINÉAIRES DE COURBES PLANES DOTÉES D'UNE SEULE COURBE SINGULIÈRE,

PAR

LUCIEN GODEAUX.
(à Morlanwelz, Belgique).

Dans un travail [1]) qui paraîtra prochainement dans les *Mémoires de la Société R. des Sciences de Liège*, j'ai exposé une méthode permettant de déterminer les congruences linéaires de coniques. Cette méthode s'étend facilement à la détermination des congruences linéaires de courbes planes quelconques. En poursuivant cette extension, j'ai été amené à constater que si une congruence linéaire de courbes planes les plus générales de leur ordre, possède une seule courbe $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$-singulière, ces courbes planes sont des droites, ou des coniques, ou des cubiques elliptiques.

Je rappelle avant de commencer que l'on désigne par congruence de courbes un système algébrique doublement infini de courbes. L'ordre d'une congruence est le nombre de ses courbes passant par un point quelconque, la classe est le nombre des courbes ayant une bisécante fixe. Enfin, une courbe h-singulière est une courbe sur laquelle les courbes de la congruence s'appuient en h points.

1. — Les courbes planes générales d'ordre m de l'espace sont en nombre $\frac{1}{2}(m^2+3m+6)$-fois infini. En effet, pour fixer une pareille courbe dans l'espace, il faut trois conditions pour fixer son plan, et $\frac{1}{2}m(m+3)$ conditions pour fixer la courbe dans ce plan.

Soit Γ une congruence linéaire (c'est-à-dire d'ordre un) formée

---

[1]) *Recherches sur les systèmes de coniques de l'espace.* Un résumé de ce travail a été publié aux C. R. (Séances du 1er et du 29 Mai 1911.)

par des courbes γ, d'ordre m ($\geqq 2$), et dotée d'une seule courbe singulière C, d'ordre λ, nécessairement gauche.

Le nombre des points d'appui d'une courbe γ sur la courbe C est égal $\frac{1}{2}(m^2 + 3m + 6) - 2 = \frac{1}{2}(m + 1)(m + 2)$, et par suite, on a

$$2\lambda \geqq (m+1)(m+2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Les plans des courbes γ enveloppent une certaine surface algébrique F, de classe n. Si dans un plan tangent à F se trouvent ν courbes de Γ, la classe de cette congruence est égale à $n\nu$.

2. — Considérons la surface Σ, lieu des courbes de Γ dont les plans passent par un point fixe P (non situé sur C). La surface Σ passe par le point P et le cône tangent à cette surface en ce point coïncide avec le plan de la courbe γ passant par P; donc ce point est simple pour Σ. D'autre part, par une droite issue de P passent n plans contenant chacun ν courbes γ, par suite cette droite rencontre encore Σ en $mn\nu$ points et la surface est donc d'ordre $(mn\nu + 1)$.

La surface Σ passera avec une certaine multiplicité $q \geqq 1$ par la courbe C ; q est égal à la classe du cône enveloppé par les plans des courbes γ qui passent par un point fixe de C.

Soient maintenant Σ et Σ' deux surfaces respectivement lieux des courbes γ dont les plans passent par deux points quelconques P, P'. Les surfaces Σ, Σ' ont en commun la courbe C et $n\nu$ courbes γ dont les plans passent par P, P'. Supposons que Σ, Σ' ont encore en commun une autre courbe σ. Par un point de σ passe une courbe γ située sur Σ et une courbe γ' située sur Σ' ; ces deux courbes ont nécessairement une partie commune, car autrement, par un point de σ (non singulière) passeraient deux courbes γ, γ' de Γ et la congruence ne serait pas linéaire. La partie commune aux courbes γ, γ' coïncide nécessairement avec σ et ce ne peut être qu'une droite, car cette partie σ doit se trouver dans un plan passant par un point quelconque de l'espace.

Ainsi, s'il y a une infinité simple de courbes γ dégénérées en une droite σ comptée m' fois et en une courbe d'ordre $m - m'$ située dans un plan (variable) passant par cette droite σ, celle-ci appartiendra à toute surface Σ. La multiplicité de σ pour cette surface sera égale au nombre de courbes d'ordre

$m - m'$ situées dans un plan donné passant par la droite σ et formant avec celle-ci des courbes γ de Γ.

De pareilles droites seront évidemment des plurisécantes de la courbe C. Supposons d'une manière générale que pour la congruence Γ il y a ρ_1 droites multiples d'ordre t_1 pour $\Sigma, \ldots, \rho_i$ droites multiples d'ordre t_i pour Σ, et posons

$$\rho = \rho_1 t_1^2 + \ldots\ldots + \rho_i t_i^2.$$

En calculant l'intersection des surfaces Σ, Σ', on trouve

$$(mn\nu + 1)^2 = mn\nu + \lambda q^2 + \rho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Considérons enfin une surface Σ et une courbe γ n'appartenant pas à cette surface. Les intersections de cette courbe et de cette surface se trouvent nécessairement sur la courbe C, sans quoi la congruence Γ ne serait pas linéaire. Par suite, on a

$$m(mn\nu + 1) = \tfrac{1}{2}(m + 1)(m + 2)q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

3. — En partant des formules (1), (2), (3), nous allons montrer que m est au plus égal à trois.

Entre les équations (2) et (3), éliminons q; il vient:

$$(mn\nu + 1)^2[(m + 1)^2(m + 2)^2 - 4m^2\lambda] = (mn\nu + \rho)(m+1)^2(m+2)^2. \quad (4)$$

Le second membre de cette égalité est certainement positif, donc, il doit en être de même du premier et l'on a

$$(m + 1^2)(m + 2)^2 - 4m^2\lambda > 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Comparant cette inégalité avec l'inégalité (1), nous en déduisons

$$2m^2 < (m + 1)(m + 2),$$

c'est-à-dire

$$m^2 - 3m - 2 < 0.$$

Les seules valeurs possibles ($m \geqq 2$) sont $m = 2$, $m = 3$. Les congruences linéaires de coniques dotées d'une seule ligne singulière sont connues, il reste à examiner quelles sont les congruences analogues de cubiques planes elliptiques; ce sera l'objet des paragraphes suivants.

4. — Dans les formules (2), (3), introduisons la valeur $m = 3$; elles deviennent

$$(3n\nu + 1)^2 = 3n\nu + \lambda q^2 + \rho,$$

$$3(3n\nu + 1) = 10q.$$

D'autre part, l'inégalité (5) donne

$$9\lambda < 100$$

et par suite, la courbe singulière C est d'ordre $\lambda = 10$ ou $\lambda = 11$. On en conclut que ν est nécessairement égal à l'unité.

Remarquons que la courbe C ne peut se trouver ni sur une quadrique, ni sur une surface cubique, car une telle surface contiendrait toutes les courbes de la congruence Γ.

Cherchons maintement à fixer la valeur du terme ρ, en examinant de quelles manières les cubiques planes γ peuvent dégénérer.

Les cubiques γ peuvent dégénérer en :

a) Une droite comptée trois fois. Cette droite est simple pour la surface Σ, et doit s'appuyer en dix points sur la courbe C.

b) Une droite comptée deux fois et une seconde droite variable. Pour cela, la seconde droite doit s'appuyer en deux points sur C et en un point sur la première droite ; celle-ci est donc une octosécante de C et est multiple d'ordre $\binom{\lambda - 8}{2}$ pour Σ.

c) Une droite et une conique s'appuyant en deux points sur la droite. La conique doit être variable avec son plan (passant par la droite) ; elle s'appuie donc en cinq points sur C et la droite est une quintisécante de C. De plus, elle est multiple d'ordre $\binom{\lambda - 5}{5}$ pour Σ.

Supposons que les circonstances *a*), *b*), *c*) se présentent respectivement ρ_1, ρ_2, ρ_2 fois, on a

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 \binom{\lambda - 8}{2}^2 + \rho_3 \binom{\lambda - 5}{5}^2. \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Si d est une droite octosécante ou quintisécante de la courbe C, la surface Σ, relative à un point de d, se scindera en deux surfaces dont l'une Σ_1 est le lieu des droites ou des coniques qui, avec d, forment des cubiques de la congruence. La multiplicité de d pour Σ_1 ne peut évidemment pas excéder la multiplicité de cette même droite pour Σ.

5. — Commençons par discuter le cas $\lambda = 10$. La formule (6) devient

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3.$$

La courbe C n'est pas plane ; donc elle ne possède pas de décisécante et $\rho_1 = 0$.

S'il existe une octosécante d de C, elle est simple pour une surface Σ, et d'après une remarque faite à la fin du § 4, le lieu des bisécantes de C s'appuyant sur d passe simplement par cette droite ; ce lieu est donc une quadrique. Ainsi, si $\rho_2 > 0$, la courbe C est sur une quadrique, ce qui est impossible. Donc $\rho_2 = 0$.

De même, on prouverait que l'hypothèse $\rho_3 > 0$ entraîne comme conséquence que la courbe C est sur une surface cubique. Ainsi $\rho_3 = 0$ et $\rho = 0$.

L'équation (4) devient ($m = 3$, $\lambda = 10$, $\rho = 0$, $\nu = 1$) :

$$9n^2 - 24n + 1 = 0.$$

Cette équation est impossible en nombres entiers. Il n'existe donc pas de congruence linéaire de cubiques planes elliptiques dotée d'une seule courbe singulière d'ordre dix

6. — Supposons maintenant $\lambda = 11$. La formule (6) s'écrit

$$\rho = \rho_1 + 9\rho_2 + 36\rho_3.$$

En exprimant que la courbe C ne peut se trouver sur une quadrique, on trouve que l'on doit avoir $\rho_1 \leqq 1$, $\rho_2 \leqq 1$, ou $\rho_1 = 0$, $\rho_2 \leqq 2$. D'autre part, le nombre des quadrisécantes d'une courbe gauche rationelle d'ordre onze est, d'après un théorème bien connu, égal à 336, donc

$$\binom{10}{4}\rho_1 + \binom{8}{4}\rho_2 + \binom{5}{4}\rho_3 \leqq 336,$$

ou

$$210\rho_1 + 70\rho_2 + 5\rho_3 \leqq 336,$$

ou enfin

$$42\rho_1 + 14\rho_2 + \rho_3 \leqq 67.$$

Il peut donc se présenter les cas suivants:

a) $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 1$, $\rho_3 \leqq 11$, $\rho = 10 + 36\rho_3$,

b) $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0$, $\rho_3 \leqq 25$, $\rho = 1 + 36\rho_3$,

c) $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 2$, $\rho_3 \leqq 39$, $\rho = 18 + 36\rho_3$,

$d)\qquad \rho_1 = 0, \quad \rho_2 = 1, \quad \rho_3 \leqq 53, \quad \rho = 9 + 36\rho_3,$

$e)\qquad \rho_2 = 0, \quad \rho_2 = 0, \quad \rho_3 \leqq 67, \quad \rho = 36\rho_3.$

L'équation (4) devient ($\lambda = 11$, $m = 3$, $\nu = 1$):

$$9n^2 - 294n + 1 - 100\rho = 0,$$

d'où

$$n = \tfrac{1}{3}(49 \pm 10\sqrt{\rho + 24}).$$

Posant $\rho + 24 = z^2$, on trouve $n = \frac{1}{3}(49 \pm 10z)$ et, par suite z est de la forme $z = 3\varepsilon \pm 1$, ε étant sur entier positif. Ainsi, il vient

$$24 + \rho = 9\varepsilon^2 \pm 6\varepsilon + 1.$$

On en conclut que $\rho - 1$ est multiple de 3 et que les cas $c)$, $d)$, $e)$ doivent par suite être exclus.

Donc, la courbe C admet toujours une décisécante et est ainsi rationnelle. Supposons qu'elle possède une quintisécante $d\,(\rho_3 > 0)$, et soient A et B deux points quelconques d'une droite ne rencontrant pas C. Pour trouver l'ordre de la surface engendrée par les coniques qui, avec d, forment des cubiques dégénérées de la congruence, il nous suffira de calculer les groupes de cinq points communs à l'involution I_1^6 marquée sur C par les plans passant par d, et à l'involution I_4^{22} marquée sur C par les quadriques passant par d', A et B. D'après un théorème classique de M. Le Paige [1]) le nombre cherché est égal à $\binom{22-4}{1}\binom{6-1}{4} = 90$. Mais de ce nombre, nous devons défalquer 12 unités pour avoir l'ordre de la surface, car les couples de plans (d, A), (d', B); (d, B), (d', A) forment des quadriques dégénérées passant par d', A et B. Finalement, on trouve que le lieu des coniques s'appuyant en cinq points sur C et dont les plans passent par d, est une surface d'ordre 78. Cette surface passe $78 - 2.6 = 66$ fois par la droite d, ce qui est incompatible avec le fait que d est multiple d'ordre six pour la surface Σ, lieu des courbes de la congruence dont les plans passent par un point.

---

[1]) Sur le nombre des groupes communs à des involutions supérieures, marquées sur un même support. *Bull. de l'Acad. R. de Belgique*, 1886, (3) XI, n^0. 2.

Nous voyons donc que $\rho_1 = 1$ entraîne $\rho_3 = 0$. Dans l'hypothèse a), on a ainsi

$$n = \tfrac{1}{3}(49 \pm 10\sqrt{34}),$$

ce qui est impossible en nombres entiers, et dans l' hypothèse b) on a

$$n = 33, \quad \rho_1 = 1, \quad \rho_2 = \rho_3 = 0.$$

La seule congruence linéaire de cubiques planes elliptiques dotée d'une courbe déci-singulière, est formée par les cubiques s'appuyant sur une courbe du onzième ordre dotee d'une décisécante.

7. — Nous avons donc démontré que, étant donneé une congruence linéaire de courbes planes générales d'ordre m dotée d'une seule courbe singulière, on a $m \leqq 3$. Donc, en nous servant de résultats connus (voir mon travail déjà cité), nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Les seules congruences linéaires de courbes planes d'ordre m *et de genre* $\frac{1}{2}$(m — 1) (m — 2) *dotées d'une courbe* $\frac{1}{2}$(m + 1) (m + 2)*-singulière sont :*

a) *le lieu des bisécantes d'une cubique gauche*,

b) *le lieu des coniques s'appuyant en six points sur une courbe gauche d'ordre six et de genre deux*,

c) *le lieu des coniques s'appuyant en six points sur une courbe gauche d'ordre sept et de genre cinq*,

d) *le lieu des coniques s'appuyant en six points sur une courbe gauche d'ordre huit et de genre trois*, *dotée de deux points triples*,

e) *le lieu des coniques s'appuyant en six points sur une courbe gauche d'orde sept et de genre nul*, *dotée de deux points triples*,

f) *le lieu des cubiques elliptiques s'appuyant en dix points sur une courbe gauche d'ordre onze*, *dotée d'une décisécante.*

Liège, 24 Juin 1911.

Extrait des "Nieuw Archief voor Wiskunde" 1912, (2), X.