Bulletin de la Classe des sciences

Correspondances entre surfaces avec conservation des asymptotiques

Lucien Godeaux

Résumé

On considère la suite de quadriques ϕ, ϕ_1..., que nous avons attachée au point x d'une surface (x) et on détermine les conditions pour que les quatre nappes communes aux enveloppes de deux quadriques consécutives de cette suite aient mêmes asymptotiques que la surface (x).

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Correspondances entre surfaces avec conservation des asymptotiques,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — On considère la suite de quadriques Φ, Φ_1..., que nous avons attachée au point x d'une surface (x) et on détermine les conditions pour que les quatre nappes communes aux enveloppes de deux quadriques consécutives de cette suite aient mêmes asymptotiques que la surface (x).

Considérons une surface (x) rapportée à ses asymptotiques u, v. L'enveloppe des quadriques de Lie Φ de cette surface comprend en général, en dehors de la surface (x) elle-même, quatre nappes. De nombreux travaux ont été consacrés aux surfaces telles que les quatre nappes aient mêmes asymptotiques u, v, que la surface (x) (surfaces appelées par Thomsen minima projectives). On peut généraliser ce problème : Considérons la suite de quadriques Φ, Φ_1, ... que nous avons attachée au point x de la surface (x) (1). Comme nous l'avons démontré, les enveloppes de deux quadriques consécutives Φ_{n-1}, Φ_n de cette suite ont en général en commun quatre nappes. Nous avons établi les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il y ait conservation des asymptotiques dans le passage de la surface (x) aux quatre nappes en questions (2). Nous revenons ici sur ce problème pour établir

(1) Voir par exemple notre exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace réglé*, *Actualités scient.*, N° 138 (Paris, Hermann, 1934).

(2) *Sur une correspondance entre surfaces avec conservation des asymptotiques*, (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1954, pp. 139-146).

d'autres conditions équivalentes à celles que nous avons déjà données.

Nous utilisons dans ce travail la terminologie et les notations de notre *Exposé* cité plus haut.

1. Soit (x) une surface rapportée à ses asymptotiques u, v. A cette surface, nous attachons une suite de Laplace L dans l'espace à cinq dimensions de la manière suivante : Soient, U, V les points de l'hyperquadrique de Klein Q de S_5 qui représentent les tangentes aux asymptotiques u, v en un point x de (x). Ces points sont consécutifs dans une suite de Laplace L que nous écrirons

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots, \qquad \text{(L)}$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u.

Nous supposerons la suite de Laplace L illimitée (nécessairement dans les deux sens). Les plans $U_nU_{n+1}U_{n+2}$, $V_nV_{n+1}V_{n+2}$ sont conjugués par rapport à Q. Ils coupent cette hyperquadrique suivant des coniques qui représentent les systèmes de génératrices rectilignes d'une quadrique Φ_n. Nous supposerons que les quadriques Φ_1, Φ_2, ... sont irréductibles.

Désignons par C_1, C_2 les points de rencontre de la droite V_nV_{n+1} avec Q et par D_1, D_2 ceux de la droite U_nU_{n+1} avec la même hyperquadrique. Nous supposerons ces points distincts.

Les tangentes aux points C_1, C_2 aux courbes v tracées sur les surfaces (C_1), (C_2) se coupent en un point A du plan $V_{n-1}V_nV_{n+1}$. Les tangentes aux courbes u aux mêmes points se coupent en un point B′ du plan $V_nV_{n+1}V_{n+2}$. Les tangentes aux courbes u aux points D_1, D_2 des surfaces (D_1), (D_2) se coupent en un point B du plan $U_{n-1}U_nU_{n+1}$ et les tangentes aux courbes v aux mêmes points se coupent en un point A′ du plan $U_nU_{n+1}U_{n+2}$.

Nous avons démontré que les points A, B, A′, B′ sont en ligne droite. Cette droite est précisément la conjuguée par rapport à Q de l'espace $U_nU_{n+1}V_nV_{n+1}$. Elle coupe l'hyperquadrique Q en deux points M_1, M_2.

Les points C_1, C_2, D_1, D_2 représentent les arêtes d'un quadrilatère gauche tracé sur les deux quadriques Φ_{n-1}, Φ_n. Les sommets de ce quadrilatère sont les points qui décrivent des nappes des enveloppes de ces deux quadriques. Les diagonales du quadrilatère sont représentées par les points M_1, M_2.

2. Représentons par $\Omega(p, q) = 0$ la condition pour que deux points p, q soient conjugués par rapport à l'hyperquadrique Q. On trouve sans difficulté que l'on a

$$A = \begin{vmatrix} V_{n-1} & V_n & V_{n+1} \\ \Omega(V_{n+1}, V_{n-1}) & \Omega(V_{n+1}, V_n) & \Omega(V_{n+1}, V_{n+1}) \\ \Omega(V_n, V_{n-1}) & \Omega(V_n, V_n) & \Omega(V_n, V_{n+1}) \end{vmatrix},$$

$$B = \begin{vmatrix} U_{n-1} & U_n & U_{n+1} \\ \Omega(U_{n+1}, U_{n-1}) & \Omega(U_{n+1}, U_n) & \Omega(U_{n+1}, U_{n+1}) \\ \Omega(U_n, U_{n-1}) & \Omega(U_n, U_n) & \Omega(U_n, U_{n+1}) \end{vmatrix},$$

$$A' = \begin{vmatrix} U_n & U_{n+1} & U_{n+2} \\ \Omega(U_{n+1}, U_n) & \Omega(U_{n+1}, U_{n+1}) & \Omega(U_{n+1}, U_{n+2}) \\ \Omega(U_n, U_n) & \Omega(U_n, U_{n+1}) & \Omega(U_n, U_{n+2}) \end{vmatrix},$$

$$B' = \begin{vmatrix} V_n & V_{n+1} & V_{n+2} \\ \Omega(V_{n+1}, V_n) & \Omega(V_{n+1}, V_{n+1}) & \Omega(V_{n+1}, V_{n+2}) \\ \Omega(V_n, V_n) & \Omega(V_n, V_{n+1}) & \Omega(V_n, V_{n+2}) \end{vmatrix}.$$

On peut vérifier analytiquement que ces points sont bien en ligne droite.

Les points $U_{n-1}, U_n, U_{n+1}, V_{n-1}, V_n, V_{n+1}$ déterminent complètement l'espace S_5 ; en effet, s'ils appartenaient à un hyperplan, les plans $U_{n-1}U_nU_{n+1}$, $V_{n-1}V_nV_{n+1}$ auraient un point en commun et la quadrique Φ_{n-1} serait dégénérée, contrairement à l'hypothèse.

Cela étant, on a une relation de la forme

$$V_{n+2} = a_1 V_{n+1} + a_0 V_n + a_{-1} V_{n-1} + b_1 U_{n+1} + b_0 U_n + b_{-1} U_{n-1} \quad (1)$$

On en déduit

$$\left.\begin{aligned} \Omega(V_{n+2}, V_{n+1}) = a_1\Omega(V_{n+1}, V_{n+1}) \\ + a_0\Omega(V_{n+1}, V_n) + a_{-1}\Omega(V_{n+1}, V_{n-1}) \\ \Omega(V_{n+2}, V_n) = a_1\Omega(V_{n+1}, V_n) \\ + a_0\Omega(V_n, V_n) + a_{-1}\Omega(V_n, V_{n-1}). \end{aligned}\right| \quad (2)$$

En substituant dans l'expression de B' les éléments de la dernière colonne par les expressions (1) et (2), on obtient

$$B' = \begin{vmatrix} V_n & V_{n+1} & a_{-1}V_{n-1} + b_1U_{n+1} + \\ & & + b_0U_n + b_{-1}U_{n-1} \\ \Omega(V_{n+1}, V_n) & \Omega(V_{n+1}, V_{n+1}) & a_{-1}\Omega(V_{n+1}, V_{n-1}) \\ \Omega(V_n, V_n) & \Omega(V_n, V_{n+1}) & a_{-1}\Omega(V_n, V_{n-1}) \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire

$$B' = a_{-1}A + \begin{vmatrix} \Omega(V_{n+1}, V_n) & \Omega(V_{n+1},V_{n+1}) \\ \Omega(V_n, V_n) & \Omega(V_{n+1}, V_n) \end{vmatrix} (b_1U_{n+1} + b_0U_n + \\ + b_{-1}U_{n-1}).$$

De la relation (1), on déduit

$$b_1\Omega(U_{n+1}, U_{n+1}) + b_0\Omega(U_{n+1}, U_n) + b_{-1}\Omega(U_{n+1}, U_{n-1}) = 0,$$
$$b_1\Omega(U_{n+1}, U_n) + b_0\Omega(U_n, U_n) + b_{-1}\Omega(U_n, U_{n-1}) = 0.$$

Par conséquent, on peut écrire

$$b_1U_{n+1} + b_0U_n + b_{-1}U_{n-1} = -\rho \begin{vmatrix} U_{n+1} & U_n & U_{n-1} \\ \Omega(U_{n+1}, U_{n+1}) & \Omega(U_{n+1}, U_n) & \Omega(U_{n+1}, U_{n-1}) \\ \Omega(U_n, U_{n+1}) & \Omega(U_n, U_n) & \Omega(U_n, U_{n-1}) \end{vmatrix},$$

d'où finalement

$$B' = a_{-1}A - \rho B \begin{vmatrix} \Omega(V_{n+1}, V_n) & \Omega(V_{n+1}, V_{n+1}) \\ \Omega(V_n, V_n) & \Omega(V_{n+1}, V_n) \end{vmatrix}.$$

La valeur de ρ est obtenue en utilisant la formule

$$\Omega(V_{n+2}, U_{n-1}) = b_1\Omega(U_{n+1}, U_{n-1}) + b_0\Omega(U_n, U_{n-1}) + \\ + b_{-1}\Omega(U_{n-1}, U_{n-1}),$$

déduite de la relation (1). On a donc

$$\Omega(V_{n+2}, U_{n-1}) = \rho \begin{vmatrix} \Omega(U_{n+1}, U_{n+1}) & \Omega(U_{n+1}, U_n) & \Omega(U_{n+1}, U_{n-1}) \\ \Omega(U_{n+1}, U_n) & \Omega(U_n, U_n) & \Omega(U_n, U_{n-1}) \\ \Omega(U_{n+1}, U_{n-1}) & \Omega(U_n,U_{n-1}) & \Omega(U_{n-1}, U_{n-1}) \end{vmatrix}.$$

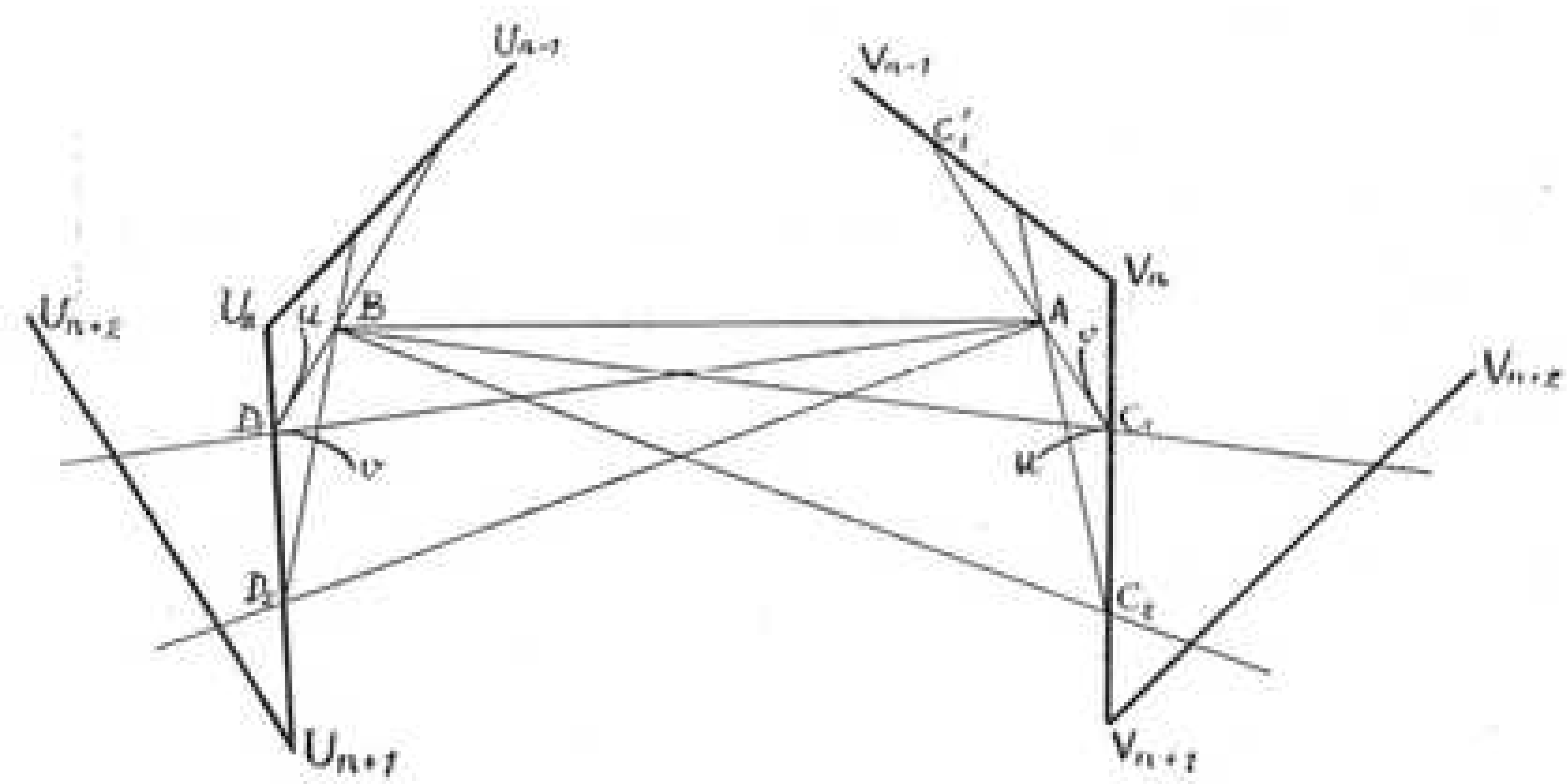
En écrivant

$$U_{n+2} = a'_1 V_{n+1} + a'_0 V_n + a'_{-1} V_{n-1} + b'_1 U_{n+1} + b'_0 U_n + b'_{-1} U_{n-1},$$

on trouverait de même

$$A' = b'_{-1} B - \rho' A \begin{vmatrix} \Omega(U_{n+1}, U_n) & \Omega(U_{n+1}, U_{n+1}) \\ \Omega(U_n, U_n) & \Omega(U_{n+1}, U_n) \end{vmatrix} .$$

3. Les sommets du quadrilatère gauche formé par les droites c_1, c_2, d_1, d_2 représentées par les points C_1, C_2, D_1, D_2 sont caractéristiques pour les quadriques Φ_{n-1} et Φ_n, ils engendrent quatre surfaces-enveloppes communes aux quadriques précédentes. Nous avons démontré que la condition nécessaire et suffisante pour que les asymptotiques ce ces quatre surfaces-enveloppes soient les courbes u, v est que le point B' coïncide avec B. Alors, le point A' coïncide avec A.



Pour qu'il en soit ainsi, nous devons avoir $a_{-1} = 0$ et comme conséquence $b'_{-1} = 0$.

De la relation (1), on déduit

$$\Omega(V_{n+2}, V_{n-1}) = a_1 \Omega(V_{n-1}, V_{n-1}) + a_0 \Omega(V_n, V_{n-1}) + \\ + a_{-1} \Omega(V_{n-1}, V_{n-1})$$

et, en reprenant les équations (2), pour que a_{-1} soit nul, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{vmatrix} \Omega(V_{n+2}, V_{n+1}) & \Omega(V_{n+1}, V_{n+1}) & \Omega(V_{n+1}, V_n) \\ \Omega(V_{n+2}, V_n) & \Omega(V_{n+1}, V_n) & \Omega(V_n, V_n) \\ \Omega(V_{n+2}, V_{n-1}) & \Omega(V_{n+1}, V_{n-1}) & \Omega(V_n, V_{n-1}) \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

De même, pour que b'_{-1} soit nul, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{vmatrix} \Omega(U_{n+2}, U_{n+1}) & \Omega(U_{n+1}, U_{n+1}) & \Omega(U_{n+1}, U_n) \\ \Omega(U_{n+2}, U_n) & \Omega(U_{n+1}, U_n) & \Omega(U_n, U_n) \\ \Omega(U_{n+2}, U_{n-1}) & \Omega(U_{n+1}, U_{n-1}) & \Omega(U_n, U_{n-1}) \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Les relations (3) et (4) sont conséquence l'une de l'autre, ce qui semble assez difficile à établir analytiquement.

Au lieu d'écrire la relation (3), on peut écrire

$$\Omega(V_{n+2}, \lambda V_{n-1} + \mu V_n + \nu V_{n+1}) = 0,$$
$$\Omega(V_{n+1}, \lambda V_{n-1} + \mu V_n + \nu V_{n+1}) = 0,$$
$$\Omega(V_n, \lambda V_{n-1} + \mu V_n + \nu V_{n+1}) = 0.$$

Cela signifie qu'il existe un point $\lambda V_{n-1} + \mu V_n + \nu V_{n+1}$ du plan $V_{n-1}V_nV_{n+1}$ qui appartient au plan conjugué de $V_nV_{n+1}V_{n+2}$ par rapport à Q, c'est-à-dire au plan $U_nU_{n+1}U_{n+2}$.

Le conjugué de ce point par rapport à Q appartient aux plans $U_{n-1}U_nU_{n+1}$, $V_nV_{n+1}V_{n+2}$, ce qui entraîne la relation (4).

4. Nous avons démontré que les points A, B sont transformés de Laplace l'un de l'autre, B étant le transformé de A dans le sens des u, A celui de B dans le sens des v. Il semble difficile d'établir cette propriété en utilisant les expressions de A, B, données plus haut. Nous reprendrons le raisonnement fait dans notre note citée plus haut en le simplifiant légèrement.

Observons tout d'abord que la droite AB, que A′, B′ coïncident avec A, B ou non, étant la conjuguée de l'espace $U_nU_{n+1}V_nV_{n+1}$ par rapport à Q, est l'intersection des espaces à trois dimensions $U_{n-1}U_nU_{n+1}U_{n+2}$, $V_{n-1}V_nV_{n+1}V_{n+2}$, conjugués des droites V_nV_{n+1}, U_nU_{n+1}.

Cela étant, supposons que A′ coïncide avec A et B′ avec B. Soit t la tangente en A à la courbe u tracée sur la surface (A).

Lorsque u varie, le plan $V_{n-1}V_nV_{n+1}$ décrit une variété à caractère de développable ayant pour espace tangent l'espace à trois dimensions $V_{n-1}V_nV_{n+1}V_{n+2}$. Le point A appartenant à ce plan, la droite t appartient à cet espace.

Le point $A = A'$ appartient au plan $U_nU_{n+1}U_{n+2}$ qui, lorsque u varie, engendre une variété à caractère de développable dont l'espace tangent est $U_{n-1}U_nU_{n+1}U_{n+2}$. Il en résulte que la tangente t appartient à cet espace et par suite t coïncide avec la droite AB.

On démontrerait de même que la tangente en B à la courbe v tracée sur la surface (B) coïncide avec la droite BA. Par conséquent, B est le transformé de A dans le sens des u et A celui de B dans le sens des v.

Soit B_1 le transformé de Laplace de B dans le sens des u. Ce point appartient au plan $U_{n-2}U_{n-1}U_n$ d'une part et au plan V_nV_{n+1} V_{n+2} d'autre part. Il est l'intersection de ces deux plans.

Appelons maintenant C_1' l'intersection de la droite C_1A, tangente en C_1 à la courbe v tracée sur la surface (C_1), avec la droite $V_{n-1}V_n$. La tangente en C_1' à la courbe u tracée sur la surface (C_1') doit se trouver dans le plan $V_{n-1}V_nV_{n+1}$ et d'autre part dans le plan ABB_1. Cette tangente doit donc passer par A donc par C_1. Les points C_1, C_1' sont transformés de Laplace l'un de l'autre et le point C_1 décrit un réseau conjugué à la congruence (V_nV_{n+1}). Il en est de même du point C_2. De même, les points D_1, D_2 décrivent des réseaux conjugués à la congruence (U_nU_{n+1}).

Les droites c_1, c_2, d_1, d_2 communes aux quadriques Φ_{n-1}, Φ_n décrivent des congruences W et par conséquent il y a conservation des asymptotiques sur leurs nappes focales. Celles-ci sont les nappes communes aux enveloppes des quadriques Φ_{n-1}, Φ_n et les asymptotiques de ces nappes sont, comme sur la surface (x), les courbes u, v.

5. Désignons par

$$\ldots, A_m, \ldots, A_1, A, B, B_1, \ldots, B_m, \ldots \tag{1}$$

la suite de Laplace déterminée par les points A, B, chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u. Il est facile de voir que cette suite est doublement inscrite dans le polyèdre à faces planes associé à la suite L. D'une manière précise, chaque plan déterminé par trois points consécutifs de la suite L contient deux points de la suite I.

Le plan $U_{n-1}U_nU_{n+1}$ contient le point B, donc le plan $U_{n-1-m}U_{n-m}U_{n-m+1}$ contient le point B_m. En particulier, si $m = n - 1$, le plan UU_1U_2 contient le point B_{n-1}. Le plan VUU_1 contient donc le point B_n, le plan V_1VU contient le point B_{n+1}, le plan V_2V_1V le point B_{n+2}, le plan $V_{m+1}V_mV_{m-1}$ le point B_{n+m+1}. Si $m = n$, on voit que le plan $V_{n-1}V_nV_{n+1}$ contient, outre le point A, le point B_{2n+1}.

De même, le plan $U_{n-1}U_nU_{n+1}$ contient, outre le point B, le point A_{2n+1}.

Le plan UU_1U_2 contient les points B_{n-1} et A_{n+2}. Le plan VV_1V_2 contient les points A_{n-1}, B_{n+2}.

Les points C_1, C_2, D_1, D_2 déterminent quatre suites de Laplace inscrites dans la suite L. Il existe donc, sur la droite UV quatre points décrivant des réseaux conjugués à la congruence (UV). Par suite, la surface (x) est une nappe focale commune à quatre congruences W.

Liège, le 5 juillet 1960.