Sur les surfaces R

Lucien Godeaux

Résumé
On attache à chaque point d'une surface R deux quadriques et deux droites dont on détermine les foyers.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Sur les surfaces R,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — On attache à chaque point d'une surface R deux quadriques et deux droites dont on détermine les foyers.

On sait que Demoulin a étudié certains réseaux conjugués tracés sur une surface et caractérisés par le fait que leurs tangentes décrivent des congruences W. Tzitzeica a appelé ces réseaux des réseaux R et on appelle plus généralement surface R une surface contenant au moins un réseau R.

Si nous désignons par U, V les points de l'hyperquadrique de Klein représentant les tangentes aux asymptotiques u, v en un point d'une surface R, par J, J′ les images des droites des deux congruences W, les points J et J′ partagent harmoniquement les points U, V et décrivent des réseaux conjugués à la congruence (UV) engendrée par la droite UV.

Partant de cette propriété, nous établissons un certain nombre de relations entre les données de la surface, puis nous déterminons deux droites et deux quadriques intrinsèquement liées à la surface en chacun de ses points. Nous déterminons les foyers des deux droites, les équations ayant à vrai dire une forme assez compliquée.

Nous utiliserons les notations de notre exposé sur *La Théorie des Surfaces et l'Espace réglé* (1) sans les définir à nouveau pour ne pas allonger outre mesure cette note.

(1) Actualités scient. N° 138 (Paris, Hermann, 1934).

1. Soit (x) une surface rapportée à ses asymptotiques u, v. Désignons par U, V les points de l'hyperquadrique de Klein Q représentant les tangentes aux asymptotiques u, v en un point x de (x). Nous avons

$$U^{10} + 2bV = 0, \quad V^{01} + 2aU = 0$$

et les points U, V sont consécutifs dans une suite de Laplace L :

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots \tag{L}$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u et qui est autopolaire par rapport à Q.

Supposons que la surface (x) soit une surface R. Cela signifie (Tzitzeica) qu'il existe sur (x) un réseau conjugué tel que les tangentes aux courbes de ce réseau engendrent des congruences W. Par conséquent il existe sur la droite UV deux points

$$J = \lambda U - \mu V, \qquad J' = \lambda' U - \mu' V$$

conjugués harmoniques par rapport à U, V, engendrant des réseaux conjugués à la congruence (UV).

On peut choisir le facteur de proportionnalité de λ, μ et celui de λ', μ' pour avoir (Demoulin).

$$\begin{aligned} &\lambda^{01} + 2a\mu = 0, \qquad \mu^{10} + 2b\lambda = 0\,; \\ &\lambda'^{01} + 2a\mu' = 0, \qquad \mu'^{10} + 2b\lambda' = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

D'autre part, on doit avoir $(U, V, J, J') = -1$, ce qui se traduit par

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\mu'}{-\mu} = \rho.$$

On en déduit

$$\lambda(\log \rho)^{01} + \lambda^{01} - 2a\mu = 0, \qquad \mu(\log \rho)^{10} + \mu^{10} - 2b\lambda = 0,$$

d'où

$$(\log \rho\lambda^2)^{01} = 0, \qquad (\log \rho\mu^2)^{10} = 0.$$

On peut choisir u, v pour avoir

$$\rho = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\mu^2}.$$

On a alors $\lambda = \pm \mu$. On peut se limiter à $\lambda = \mu$, car $\lambda = -\mu$ revient simplement à intervertir les rôles de J et J'.

Dans ces conditions, on a

$$(\log \lambda)^{01} + 2a = 0, \qquad (\log \mu)^{10} + 2b = 0,$$

d'où

$$a^{10} = b^{01},$$

condition nécessaire et suffisante pour que la surface (x) soit une surface R, ce qui est bien connu.

Il existe une fonction $\varphi\ (u, v)$ telle que l'on a

$$a = \varphi^{01},\ b = \varphi^{10}$$

et on a alors

$$\lambda = \mu = e^{-2\varphi}, \qquad \lambda' = -\mu' = e^{2\varphi},$$
$$J = -e^{-2\varphi}\ (U - V), \qquad J' = e^{2\varphi}\ (U + V).$$

2. Les points J, J' déterminent des suites de Laplace inscrites dans la suite L et les transformés de Laplace de ces points dans le sens des u sont

$$J_{-1} = J^{10} + 2bJ = -\lambda[V_1 + V\{2b + (\log a)^{10}\}],$$
$$J'_{-1} = J'^{10} - 2bJ' = \lambda[V_1 + V\{-2b + (\log a)^{10}\}].$$

Les droites JJ_{-1}, $J'J'_{-1}$ se coupent en un point

$$A = 2bU + V\ (\log a)^{10} + V_1.$$

Ce point décrit, comme on sait, un réseau conjugué (u, v). Les transformés de Laplace de J, J' dans le sens des v sont

$$J_1 = J^{01} + 2aJ = \mu[U_1 + U\{2a + (\log b)^{01}\}],$$
$$J'_1 = J'^{01} - 2aJ' = \mu[U_1 + U\{-2a + (\log b)^{01}\}].$$

Les droites JJ_1, $J'J'_1$ se coupent en un point

$$B = 2aV + U(\log b)^{01} + U_1.$$

Un calcul simple montre que l'on a

$$A^{01} = 2bB,\ B^{10} = 2aA$$

et les points A, B sont consécutifs dans une suite de Laplace $\mathcal{A}$:

$$\ldots,\ B_n,\ \ldots,\ B_1,\ B,\ A,\ A_1,\ \ldots,\ A_n,\ \ldots \qquad (\mathcal{A})$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

3. Le point A satisfait à l'équation de Laplace

$$A^{11} - A^{01}(\log b)^{10} - 4abA = 0$$

et son transformé dans le sens des u est

$$A_1 = A^{10} - A(\log b)^{10},$$

c'est-à-dire

$$A_1 = \left[(\log a)^{20} + (\log a)^{10}\left(\log \frac{a}{b}\right)^{10} - 4b^2\right] V + V_1\left(\log \frac{a^2k_1}{b}\right)^{10} + V_2.$$

En utilisant la relation $a^{10} = b^{01}$, on voit facilement que le cœfficient de V est $-bh_1 : a$. On a donc

$$(\log a)^{20} + (\log a)^{10}\left(\log \frac{a}{b}\right)^{10} - 4b^2 + \frac{bh_1}{a} = 0,$$

$$A_1 = -\frac{bh_1}{a} V + V_1\left(\log \frac{a^2k_1}{b}\right)^{10} + V_2.$$

On en déduit

$$A_1^{01} = h_1 A_1,$$

ce qui implique

$$ak_1\left(\log \frac{a^2k_1}{b}\right)^{10} - bh_1\left(\log \frac{bh_1}{a}\right)^{01} = ah_1(\log a)^{10}.$$

Le point A_1 satisfait à l'équation de Laplace

$$A_1^{11} - A_1^{01}(\log bh_1)^{10} - h_1A_1 = 0$$

et son transformé de Laplace dans le sens des u est

$$A_2 = A_1^{10} - A_1(\log bh_1)^{10}.$$

On a

$$A_2 = V_1 \left[\left(\log \frac{a^2k_1}{b}\right)^{20} + \left(\log \frac{a^2k_1}{b}\right)^{10} \left(\log \frac{ak_1}{bh_1}\right)^{10} - \frac{bh_1}{a}\right]$$
$$+ V_2 \left(\log \frac{a^3k_1^2k_2}{b^2h_1}\right)^{10} + V_3.$$

Désignons par X le cœfficient de V_1 ; Nous avons

$$A_2^{01} = k_1 XV + \left[X^{01} + k_2 \left(\log \frac{a^3k_1^2k_2}{b^2h_1}\right)^{10}\right] V_1 + k_2, V_2,$$

qui doit être identique à A_1. On a donc

$$ak_1X + bh_1h_2 = 0,$$

$$ak_1 \left[\left(\log \frac{a^2k_1}{b}\right)^{20} + \left(\log \frac{a^2k_1}{b}\right)^{10} \left(\log \frac{ak_1}{bh_1}\right)^{10} - \frac{bh_1}{a}\right] + bh_1h_2 = 0,$$

$$ak_1k_2 \left(\log \frac{a^3k^2h_2}{b^2h_1}\right)^{10} - bh_1h_2 \left(\log \frac{bh_1h_2}{2k_1}\right)^{01} = ak_1h_2 \left(\log \frac{a^2k_1}{b}\right)^{10},$$

$$A_2 = -\frac{bh_1h_2}{ak_1} V_1 - V_2 \left(\log \frac{a^3h_1^2k_2}{b^2h_1}\right)^{10} + V_3,$$

$$A_2^{01} = h_2 A_1$$

4. Les expressions trouvées pour A_1, A_2 nous conduisent à supposer que l'on a

$$A_n = -\frac{bh_1 \ldots h_n}{ak_1 \ldots k_{n-1}} V_{n-1} + V_n \left(\log \frac{a^{n+1}k_1^n \ldots k_n}{b^n h_1^{n-1} \ldots h_{n-1}}\right)^{10} + V_{n+1},$$
$$A_n = A_n^{10} - A_{n-1}(\log bh_1 \ldots h_{n-1})^{10}.$$

Supposons ces expressions exactes pour une valeur de n et pour les valeurs inférieures. Pour abréger, nous poserons

$$K_n = \frac{a^{n+1}k_1^n \ldots k_n}{b^n h_1^{n-1} \ldots h_{n-1}}, \qquad H_n = \frac{b^{n+1}h_1^n \ldots h_n}{a^n k_1^{n-1} \ldots k_{n-1}},$$

$$K_n' = \frac{ak_1 \ldots k_n}{bh_1 \ldots h_{n-1}}, \qquad H_n' = \frac{bh_1 \ldots k_n}{ak_1 \ldots k_{n-1}}.$$

On a

$$A_n^{01} = h_n A_{n-1}$$

et

$$k_n (\log K_n)^{10} — H'_n (\log H'_n)^{01} = h_n (\log K_{n-1})^{10}.$$

On en déduit que A_n satisfait à l'équation de Laplace

$$A_n^{11} — A_n^{01} (\log bh_1 \dots h_n)^{10} — h_n A_n = 0.$$

On a donc

$$A_{n+1} = A_n^{10} — A_n (\log bh_1 \dots h_n)^{10},$$

d'où

$$A_{n+1} = V_n \left[(\log K_n)^{10} + (\log K_n)^{10} \left(\log \frac{K'_n}{h_n} \right)^{10} — H'_n \right] + V_{n+1} (\log K_{n+1})^{10} + V_{n+2}.$$

En désignant par X le cœfficient de V_n, on trouve

$$A_{n+1}^{01} = h_{n+1} A_n,$$

d'où

$$X = — H'_{n+1}.$$

On a également

$$(\log K_n)^{20} + (\log K_n)^{10} \left(\log \frac{K'_n}{h_n} \right)^{10} — H'_n + H'_{n+1} = 0.$$

Ces relations étant vraies pour $n = 1, 2$, sont vraies pour n quelconque.

5. On obtient des relations analogues pour les transformés $B_1, B_2, \dots$ de B dans le sens des v. On a

$$B_1 = B^{01} — B (\log a)^{21} = — \frac{ak_1}{b} U + U_1 \left(\log \frac{b^2 h_1}{a} \right)^{01} + U_2$$

et plus généralement

$$B_n = — K'_n U_{n-1} + U_n (\log H_n)^{01} + U_{n+1}.$$

On a encore les relations

$$h_n(\log \mathrm{H}_n)^{01} - \mathrm{K}'_n(\log \mathrm{K}'_n)^{10} = k_n(\log \mathrm{H}_{n-1})^{01},$$

$$\mathrm{B}_{n+1} = \mathrm{B}_n^{01} - \mathrm{B}_n(\log ak_1 \dots k_n)^{01}, \quad \mathrm{B}_{n+1}^{10} = k_{n+1}\mathrm{B}_n,$$

$$\mathrm{B}_n^{11} - \mathrm{B}_n^{10}(\log ak_1 \dots k_n)^{01} - k_n\mathrm{B}_n = 0.$$

Observons que les plans $\mathrm{U}_{n-1}\mathrm{U}_n\mathrm{U}_{n+1}$ et $\mathrm{V}_{n-1}\mathrm{V}_n\mathrm{V}_{n+1}$ étant conjugués par rapport à Q, les points A_n et B_n sont également conjugués par rapport à cette hyperquadrique.

6. Désignons par $\Omega(p, q) = 0$ la condition pour que deux droites p, q se rencontrent et soit $\Delta = | xx^{10}x^{01}x^{11} |$. Nous avons

$$\Omega(\mathrm{A}, \mathrm{A}) = 2\Delta, \qquad \Omega(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = 0, \qquad \Omega(\mathrm{B}, \mathrm{B}) = -2\Delta$$

et par conséquent les points A + B, A — B appartiennent à Q et sont les points d'intersection de cette hyperquadrique avec la droite AB.

Au premier de ces points correspond la droite

$$\frac{z_2}{2b + (\log b)^{01}} = \frac{z_3}{2a + (\log a)^{10}} = \frac{z_4}{1} \qquad (r_1)$$

et au second la droite

$$z_1 - z_2[2a - (\log a)^{10}] - z_3[2b - (\log b)^{01}] = 0, \quad z_4 = 0. \qquad (r_2)$$

Ces deux droites, que nous désignerons respectivement par r_1 et r_2 sont liées d'une manière intrinsèque à la surface (x). La première passe par le point x et la seconde est située dans le plan tangent $z_4 = 0$ à la surface au point x.

7. Le plan BAA_1 coupe Q suivant une conique représentant une demi-quadrique Δ_1 dont le support a pour équation

$$\begin{aligned} &- z_3[z_1 - z_2\{2a - (\log a)^{10}\} - z_3\{eb - (\log b)^{01}\}] \\ &\quad + \left(\alpha + 2\frac{bh_1}{a}\right)(z_2 - \mathrm{N}z_4)z_4 \\ &\quad + \mathrm{M}z_1z_4 + 2z_3z_4(\mathrm{MN} - 2b\mathrm{M} - 2a\mathrm{N}) \\ &\quad + 2\left(\log\frac{a}{b}\right)^{10}[(z_2 - \mathrm{N}z_4)(\log a)^{10} - 2b(z_3 - \mathrm{M}z_4)]z_4 = 0. \end{aligned}$$

où nous avons posé, pour abréger,

$$M = 2a + (\log a)^{10}, \; N = 2b + (\log b)^{10}.$$

Au plan ABB_1 correspond de même une quadrique $\varDelta_2$ d'équation

$$\begin{aligned}
&- z_2[z_1 - z_2\{2a - (\log a)^{10}\} - z_3\{2b - (\log h)^{01}\}] \\
&\quad + \left(\beta + 2\frac{ak_1}{a}\right)(z_3 - Mz_4)z_4 \\
&\quad + Nz_1z_4 + 2z_2z_4(MN - 2bM - 2aN) \\
&\quad + 2\left(\log\frac{b}{a}\right)^{01}\left[(z_3 - Mz_4)(\log b)^{01} - 2a(z_2 - Nz_4)\right]z_4 = 0.
\end{aligned}$$

Les quadriques $\varDelta_1$, $\varDelta_2$ passent par les droites r_1, r_2. Elles ont par conséquent en commun deux autres droites s_1, s_2 s'appuyant sur les premières.

D'autre part, les points A_1, A, B, B_1 étant consécutifs dans une suite de Laplace, les sommets du quadrilatère gauche formé par les droites r_1, r_2, s_1, s_2 sont caractéristiques pour les quadriques $\varDelta_1$, $\varDelta_2$. Il en résulte que les foyers de la droite r_1 sont les points r_1s_1, r_1s_2 et ceux de la droite r_2 les points r_2s_1, r_2s_2. Nous allons déterminer ces foyers.

8. Commençons par changer de tétraèdre de référence en posant

$$\begin{aligned}
\rho z_1' &= z_1 - z_2[2a - (\log a)^{10}] - z_3[2b - (\log b)^{01}], \\
\rho z_2' &= z_2 - Nz_4, \\
\rho z_3' &= z_3 - Mz_4, \\
\rho z_4' &= z_4,
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}
\rho' z_1 &= z_1' + z_2'[2a - (\log a)^{10}] + z_3'[2b - (\log b)^{01}] \\
&\qquad + 2z_4'[4ab - (\log a)^{10}(\log b)^{01}], \\
\rho' z_2 &= z_2' + Nz_4', \\
\rho' z_3 &= z_3' + Mz_4', \\
\rho' z_4 &= z_4'.
\end{aligned}$$

Les droites r_1, r_2 ont respectivement pour équations $z'_2 = z'_3 = 0$, $z'_1 = z'_4 = 0$.

Les équations des quadriques $\varDelta_1$, $\varDelta_2$ deviennent respectivement

$$\begin{aligned} -z'_1z'_3 + \left(\alpha + 2\frac{bh_1}{a}\right) z'_2z'_4 + 2\left(\log\frac{a}{b}\right)^{10}[z'_2(\log a)^{10} - 2bz'_3]z'_4 \\ + Mz'_4[z'_2\{2a - (\log a)^{10}\} + z'_3\{2b - (\log b)^{01}\}] \\ + 2z'_3z'_4(MN - 2bM - 2aN) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -z'_1z'_2 + \left(\beta + 2\frac{ak_1}{b}\right) z'_3z'_4 + 2\left(\log\frac{b}{a}\right)^{01}[z'_3(\log b)^{01} - 2sz'_2]z'_4 \\ + Nz'_4[z'_2\{2a - (\log a)^{10}\} + z'_3\{2b - (\log b)^{01}\}] \\ + 2\, z'_2z'_4(MN - 2bM - 2aN) = 0. \end{aligned}$$

L'élimination de z'_1, z'_4 entre ces équations donne l'équation quadratique des plans r_1s_1, r_1s_2, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \left(\alpha + 2\frac{bh_1}{a}\right) z'^2_2 - \left(\beta + 2\frac{ak_1}{b}\right) z'^2_3 + 2\left(\log\frac{a}{b}\right)^{10}[z'^2_2(\log a)^{10} \\ - 2bz'_2z'_3{}'_3] - 2\left(\log\frac{b}{a}\right)^{01}[z'^2_3(\log b)^{01} - 2az'_2z'_3] \\ + (Mz'_2 - Nz'_3)[z'_2\{2a - (\log a)^{10}\} + z'_3\{2b - (\log b)^{01}\}] = 0. \end{aligned}$$

Ces plans coupent la droite r_2 ($z'_1 = z'_4 = 0$) suivant les foyers de cette droite.

L'élimination de z'_2, z'_3 entre les équations de $\varDelta_1$, $\varDelta_2$ donne l'équation quadratique des plans passant par r_2 et par s_1, s_2. On obtient

$$\begin{aligned} z'^2_1 + z'_1z'_4\left[4b\left(\log\frac{a}{b}\right)^{10} + 4a\left(\log\frac{b}{a}\right)^{01} - 2\{(\log a)^{10}(\log b)^{01} - 4ab\}\right] \\ - \left(\alpha + 2\frac{bh_1}{a}\right)\left(\beta + 2\frac{ak_1}{b}\right) z'^2_4 \\ - \left(\alpha + 2\frac{bh_1}{a}\right)\left[2\left(\log\frac{b}{a}\right)^{01}(\log b)^{01} + N\{2b - (\log b)^{01}\}\right] z'^2_4 \\ - \left(\beta + 2\frac{ak_1}{b}\right)\left[2\left(\log\frac{a}{b}\right)^{10}(\log a)^{10} + M\{2a - (\log a)^{10}\}\right] z'^2_4 \end{aligned}$$

$$+\left[4\left(\log\frac{a}{b}\right)^{10}\left(\log\frac{b}{a}\right)^{01}\left\{(\log a)^{10}(\log b)^{01}-4ab\right\}\right.$$

$$+\,2\left(\log\frac{a}{b}\right)^{10}(\log a)^{10}\mathrm{M}\left\{2b-(\log b)^{01}\right\}$$

$$\left.+\,2\left(\log\frac{b}{a}\right)^{01}(\log b)^{01}\mathrm{N}\left\{2b-(\log b)^{01}\right\}\right]z_4'^2=0.$$

Ces deux plans découpent sur r_1 les foyers de cette droite.

Désignons par P, P′ les pôles par rapport à Q des hyperplans $J_2J_1JJ_{-1}J_{-2}$ et $J_2'J_1'J'J_{-1}'J_{-2}'$, c'est-à-dire les secondes images des complexes linéaires osculateurs aux deux congruences W envisagées. Ces hyperplans contiennent les points B_1, B, A, A_1 et par conséquent l'espace à trois dimensions déterminé par ces points a pour droite polaire la droite PP′. Il en résulte que les plans polaires des plans B_1BA, BAA_1 passent par P, P′ et que les droites s_1, s_2 sont représentées sur Q par les intersections de cette hyperquadrique avec la droite PP′.

Liège, le 13 août 1959.