Une propriété de la suite de Laplace associée à une surface

Lucien Godeaux

Résumé
Examen de la configuration formée par les diagonales des quadrilatères gauches communs à deux quadriques consécutives de la suite de quadriques attachée en un point à une surface et dont la première est la quadrique de Lie.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE.

Une propriété de la suite de Laplace associée à une surface,

par LUCIEN GODEAUX.
Membre de l'Académie.

Résumé. — Examen de la configuration formée par les diagonales des quadrilatères gauches communs à deux quadriques consécutives de la suite de quadriques attachée en un point à une surface et dont la première est la quadrique de Lie.

Considérons la suite de Laplace $\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots$ de l'espace S_5 associée à une surface (x) de S_3 et autopolaire par rapport à l'hyperquadrique de Klein Q. Appelons C_1, C_2 les points de rencontre de V_1V_2 et D_1, D_2 ceux de U_1U_2 avec Q. Si u, v sont les paramètres des asymptotiques sur la surface (x), les tangentes aux courbes v en C_1, C_2 se coupent en un point A, les tangentes aux courbes u en D_1, D_2 en un point B, les tangentes aux courbes u en C_1, C_2 en un point A', enfin les tangentes aux courbes v en D_1, D_2 en un point B'. Nous avons établi que les points A, B, A', B' sont en ligne droite et que si A' coïncide avec B et B' avec A, il y a conservation des asymptotiques sur les différentes nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie de la surface (x) (¹). Nous avons étendu cette dernière propriété aux quadriques de la suite Φ, Φ_1, Φ_2, ... que nous avons attachée en chaque point de la surface (x) (²).

(¹) *Note sur quelques éléments associés aux points d'une surface* (BULLETIN de l'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, 1953, pp. 14-23). Voir aussi notre exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace réglé*. Actualités scientifiques, N° 138 (Paris, Hermann, 1934).

(²) *Sur une correspondance entre surfaces avec conservation des asymptotiques* (BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, 1954, pp. 139-146).

Dans cette note, nous revenons sur ces questions et considérons une configuration déduite de l'examen des diagonales des quadrilatères gauches communs à deux quadriques consécutives de le suite Φ, Φ_1, Φ_2, ...

1. Soit (x) une surface de l'espace ordinaire S_3 rapportée à ses asymptotiques u, v. Désignons par U, V les points de l'hyperquadrique de Klein Q, de l'espace S_5, représentant les tangentes aux asymptotiques u, v en un point x à la surface (x). Ces points sont consécutifs dans une suite de Laplace L que nous écrirons

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots, \tag{L}$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u. Cette suite ne peut appartenir à un hyperplan et d'autre part, nous la supposerons illimitée dans les deux sens.

La suite L est autopolaire par rapport à l'hyperquadrique Q : le point U_n est le pôle de l'hyperplan $V_{n-2}V_{n-1}V_nV_{n+1}V_{n+2}$ et le point V_n, celui de l'hyperplan $U_{n-2}U_{n-1}U_nU_{n+1}U_{n+2}$.

Les plans $U_nU_{n+1}U_{n+2}$ et $V_nV_{n+1}V_{n+2}$ sont conjugués par rapport à Q et leurs sections par cette hyperquadrique représentent deux demi-quadriques de S_3 qui ont même support Φ_n. On obtient ainsi une suite de quadriques

$$\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n, \ldots$$

dont la première est la quadrique de Lie. Deux quadriques consécutives de la suite se touchent en quatre points, caractéristiques pour les deux quadriques.

2. Désignons par C_1, C_2 les points de rencontre de la droite $V_{n+1}V_{n+2}$ avec Q et par D_1, D_2 ceux de la droite $U_{n+1}U_{n+2}$. Ces quatre points représentent quatre droites c_1, c_2, d_1, d_2 de S_3, arêtes d'un quadrilatère gauche et appartiennent aux deux quadriques Φ_n, Φ_{n+1}. Les droites c_1, d_1 par exemple ont en commun un point P_{11} et les droites du faisceau de sommet P_{11} et de plan c_1d_1 sont représentées sur Q par les points de la droite C_1D_1. Nous désignerons de même par P_{12} le point commun aux droites c_1, d_2, par P_{21} le point commun aux droites c_2, d_1, enfin par P_{22} le point commun aux droites c_2, d_2.

Les diagonales $r = P_{11}P_{22}$, $r' = P_{12}P_{21}$ du quadrilatère précédent seront représentées que Q par deux points R, R'.

La surface (P_{ik}) est une des nappes communes aux enveloppes des quadriques Φ_n, Φ_{n+1}. Elle a même plan tangent que ces quadriques, c'est-à-dire le plan $c_i d_k$.

Considérons la congruence (c_1) engendrée par la droite c_1. Cette droite touche la surface (P_{11}) au point P_{11} et la surface (P_{12}) au point P_{12}. Les nappes focales de la congruence (c_1) sont donc les surfaces (P_{11}), (P_{12}). Les plans focaux de la droite c_1 sont par conséquent le plan $c_1 d_2 = c_1 r$ et le plan $c_1 d_1 = c_1 r'$.

Considérons maintenant le plan tangent à la surface (C_1) ; il est déterminé par les tangentes en C_1 aux courbes u, v. La première de ces tangentes appartient au plan $V_{n+1}V_{n+2}V_{n+3}$ et la seconde au plan $V_nV_{n+1}V_{n+2}$. Il coupe Q suivant deux droites passant par C_1 et représentant des faisceaux de rayons ayant pour centres les foyers de la droite c_1 et pour plans les plans focaux de cette droite. Par conséquent le plan tangent en question passe par les points R, R' et coupe Q suivant les droites C_1R, C_1R'. D'une manière précise, la première représente les droites passant par P_{11} situées dans le plan $c_1 d_2 = c_1 r$ et la seconde, les droites passant par P_{12} et situées dans le plan $c_1 d_1 = c_1 r'$.

De même, le plan tangent en C_2 à la surface (C_2) passe par la droite RR'.

Nous pouvons reprendre le même raisonnement en partant des points D_1, D_2 et on voit que les plans tangents en D_1, D_2 aux surfaces (D_1), (D_2) passent par la droite RR'.

3. Nous désignerons par A le point de rencontre des tangentes aux lignes v aux points C_1, C_2 respectivement aux surfaces (C_1), (C_2), par A' les points de rencontre des tangentes aux lignes u aux mêmes points aux mêmes surfaces, par B le point de rencontre des tangentes aux lignes u en D_1, D_2 aux surfaces (D_1), (D_2) et par B' le point de rencontre des tangentes aux lignes v aux mêmes points aux mêmes surfaces.

Les deux premières de ces tangentes appartiennent au plan $V_nV_{n+1}V_{n+2}$ et rencontrent la droite RR'. Supposons que ce soit en des points distincts. Alors le plan $V_nV_{n+1}V_{n+2}$ contient la droite RR'. Les tangentes aux lignes u aux points C_1, C_2 aux surfaces (C_1), (C_2) rencontrent cette droite RR′ et appartiennent au plan $V_{n+1}V_{n+2}V_{n+3}$, mais elles sont aussi contenues dans le plan $V_nV_{n+1}V_{n+2}$. Mais alors, la suite L aurait quatre points consécutifs situés dans ce dernier plan et serait par suite contenue tout entière dans ce plan, ce qui est absurde. On en conclut que le point A et de même les points A′, B, B′ appartiennent à la droite RR′.

On peut obtenir ce dernier résultat d'une autre manière, comme nous l'avons fait dans la seconde note citée plus haut.

Le point A appartenant au plan $V_nV_{n+1}V_{n+2}$, son hyperplan polaire par rapport à Q passa par le plan $U_nU_{n+1}U_{n+2}$. Les droites AC_1, AC_2 touchant (C_1), (C_2) donc Q en C_1, C_2, l'hyperplan polaire passe par ces points, donc par $V_{n+1}V_{n+2}$. L'hyperplan polaire de A est donc l'hyperplan $U_nU_{n+1}U_{n+2}V_{n+1}V_{n+2}$.

On établit par un raisonnement analogue que l'hyperplan polaire du point B est $V_nV_{n+1}V_{n+2}U_{n+1}U_{n+2}$. Par conséquent, l'espace à trois dimensions conjugués à la droite AB est l'espace $U_{n+1}U_{n+2}V_{n+1}V_{n+2}$.

Le même raisonnement montre que l'espace à trois dimensions conjugué à la droite A′B′ par rapport à Q est également U_{n+1} $U_{n+2}V_{n+1}V_{n+2}$. Par conséquent, les droites AB, A′B′ coïncident.

Les points de rencontre de AB avec Q sont évidemment R, R′.

Comme nous l'avons établi dans la seconde note citée au début, si A′ coïncide avec B et B′ avec A, les asymptotiques des surfaces (P_{11}), (P_{12}), (P_{21}), (P_{22}) sont les courbes u, v.

4. Appelons $\bar{\omega}_{11} = c_2d_2$, $\bar{\omega}_{12} = c_2d_1$, $\bar{\omega}_{21} = c_1d_2$, $\bar{\omega}_{22} = c_1d_1$ les faces du tétraèdre $P_{11}P_{12}P_{21}P_{22}$.

Nous avons vu que les droites C_1R, C_1R' représentaient les faisceaux de rayons $(P_{11}, \bar{\omega}_{21})$, $(P_{12}, \bar{\omega}_{22})$.

Les droites C_2R, C_2R' représentent les faisceaux de rayons $(P_{22}, \bar{\omega}_{12})$, $(P_{21}, \bar{\omega}_{22})$, les droites D_1R, D_1R' les faisceaux de rayons $(P_{11}, \bar{\omega}_{12})$, $(P_{21}, \bar{\omega}_{22})$, enfin les droites D_2R, D_2R' les faisceaux de rayons $(P_{22}, \bar{\omega}_{21})$, $(P_{12}, \bar{\omega}_{11})$.

Modifions un peu nos notations en appelant r_n, r'_n les diagonales r, r' du quadrilatère gauche $P_{11}P_{12}P_{21}P_{22}$ et R_n, R'_n les points R, R′.

La droite R_n R'_n est la conjuguée par rapport à Q de l'espace

$U_{n+1}U_{n+2}V_{n+1}V_{n+2}$ et la droite $R_{n+1}R'_{n+1}$ est la conjuguée de l'espace $U_{n+2}U_{n+3}V_{n+2}V_{n+3}$. Par conséquent, l'espace à trois dimensions $R_nR'_nR_{n+1}R'_{n+1}$ est le conjugué de la droite $U_{n+2}V_{n+2}$.

La droite $U_{n+2}V_{n+2}$ coupe Q en deux points S_{n+2}, S_{n+3} qui représentent des droites de S_3 que nous désignerons par s_{n+2}, s'_{n+2}.

On voit que les droites r_n, r'_n, r_{n+1}, r'_{n+1} s'appuient sur les deux droites s_{n+2}, s'_{n+2}. Les droites r_n, r'_n s'appuient également sur les droites s_{n+1}, s'_{n+1} et les droites r_{n+1}, r'_{n+1} sur s_{n+3}, s'_{n+3}.

Cette remarque conduit à une construction des droites r, r'. Considérons les droites s_1 et s'_1, s_2 et s'_2, ... que l'on pourrait appeler les couples de directrices de Wilczynski généralisées. Les droites r_0, r'_0 s'appuient sur s_1, s'_1, s_2, s'_2, les droites r_1, r'_1 sur s_2, s'_2, s_3, s'_3, et ainsi de suite.

Liège, le 16 juillet 1959.