Bulletin de la Classe des sciences

Une famille de surfaces algébriques de diviseur deux

Lucien Godeaux

Résumé
On montre que la surface intersection d'un espace linéaire de dimension convenable avec le lieu des droites joignant les points de deux variétés de Veronese appartenant à des espaces linéaires ne se rencontrant pas, a le diviseur de Severi égal à deux.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Une famille de surfaces algébriques de diviseur deux,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — On montre que la surface intersection d'un espace linéaire de dimension convenable avec le lieu des droites joignant les points de deux variétés de Veronese appartenant à des espaces linéaires ne se rencontrant pas, a le diviseur de Severi égal à deux.

En cherchant à construire des surfaces algébriques de caractères donnés, nous avons rencontré une famille de surfaces algébriques dont la construction est aisée et qui ont le diviseur de Severi égal à deux. Il nous a paru intéressant de les faire connaître (1).

Si l'on rapporte projectivement les hyperquadriques d'un espace linéaire à n dimensions aux hyperplans d'un espace linéaire à $\frac{1}{2}n(n+3)$ dimensions, on obtient comme on sait une variété V à n dimensions, d'ordre 2^n, appelée variété de Veronese. Les surfaces que nous étudions sont construites de la manière suivante :

On considère, dans un espace linéaire à $M + N + 1$ *dimensions, deux espaces linéaires* Σ_1, Σ_2 *à* $M = \frac{1}{2}m(m+3)$ *et* $N = \frac{1}{2}n(n+3)$ *dimensions, ne se rencontrant pas et contenant, le premier une variété de Veronese à* m *dimensions, le second une variété de Vero-*

(1) Dans notre note *Sur les involutions du second ordre appartenant à une surface intersection complète d'hyperquadriques* (BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROY. DE BELGIQUE, 1942, pp. 751-767), nous avons déjà considéré certaines de ces surfaces.

nese à n *dimensions. La variété lieu des droites s'appuyant sur ces deux variétés de Veronese est coupée par l'espace linéaire commun à* m + n − 1 *hyperplans en position générique, suivant une surface* F *de diviseur deux et de genres*

$$p_a = [(m+n)^2 - 7(m+n) + 14]\, 2^{m-n-4} - 1,$$
$$p^{(1)} = (m+n-4)^2\, 2^{m+n-2} + 1.$$

Nous considérons en particulier le cas $m = 2$, $n = 3$, que nous aurons à utiliser dans d'autres recherches.

La méthode suivie pourrait s'étendre et servir à construire des surfaces de diviseur quelconque. Nous ne nous y arrêterons pas.

1. Considérons un espace linéaire S_{M+N+1} à M + N + 1 dimensions et dans cet espace, deux espaces linéaires S_M, S_N à M et N dimensions, ne se rencontrant pas ; nous les désignerons par Σ_1 et Σ_2.

Supposons que l'on ait :

$$M = \frac{1}{2} m(m+3), \qquad N = \frac{1}{2} n(n+3)$$

et considérons, dans Σ_1, la variété de Veronese représentant les hyperquadriques d'une espace S_m à m dimensions et, dans Σ_2, la variété de Veronese représentant les hyperquadriques d'un espace S_n à n dimensions.

La première de ces variétés, qui sera désignée par V_1, est à m dimensions et d'ordre 2^m ; la seconde, qui sera désignée par V_2, est à n dimensions et d'ordre 2^n. Nous supposerons dans la suite $m > 1, n > 1$.

Considérons la variété W_{m+n+1} lieu des droites s'appuyant sur V_1 et sur V_2. Cette variété est l'intersection de la variété à $N + m + 1$ dimensions, d'ordre 2^m, projetant V_1 de Σ_2 et de la variété à $M + n + 1$ dimensions, projetant V_2 de Σ_1. On a bien

$$(N + m + 1) + (M + n + 1) = (M + N + 1) + (m + n + 1).$$

Considérons maintenant, dans S_{M+N+1}, $m + n - 1$ hyperplans linéairement indépendants et sans relations particulières avec les espaces Σ_1 et Σ_2. Ces hyperplans ont en commun un espace linéaire ξ à

$$a = M + N + 1 - (m + n - 1)$$

dimensions, qui rencontre la variété W_{m+n+1} suivant une surface F, d'ordre 2^{m+n}.

Les hyperplans considérés étant dans la situation la plus générale possible, l'espace ξ ne contient aucune génératrice rectiligne de la variété W_{m+n+1}.

2. Dans un espace S_m à m dimensions, désignons par $y_0, y_1, \ldots, y_m$ les coordonnées projectives homogènes d'un point et posons $Y_{ik} = y_i y_k$. Dans Σ_1, les équations de la variété V_1 dans Σ_1 s'obtiennent en écrivant que la matrice (Y_{ik}) a la caractéristique un.

De même, dans un espace S_n à n dimensions, désignons par $z_0, z_1, \ldots, z_n$ les coordonnées projectives homogènes d'un point et posons $Z_{jh} = z_j z_h$. Les équations de V_2 dans Σ_2 s'obtiendront en écrivant que la matrice (Z_{jh}) est de caractéristique un.

Nous pouvons prendre comme coordonnées ponctuelles homogènes de S_{M+N+1} les quantités Y_{ik}, Z_{jh}. Les équations de la variété W_{m+n+1} s'obtiendront en exprimant que les matrices

$$(Y_{ik}), \qquad (Z_{jh})$$

sont de caractéristique un.

Quant aux hyperplans déterminant l'espace ξ, nous écrirons leurs équations sous la forme

$$\Sigma a_{ik}^{(r)} Y_{ik} + \Sigma b_{jh}^{(r)} Z_{jh} = 0,$$

$(i, k = 0, 1, \ldots, m\,;\, j, h = 0, 1, \ldots, n\,;\, r = 1, 2, \ldots, m + n - 1)$.

3. Considérons maintenant, dans un espace linéaire S_{m+n+1} à $m + n + 1$ dimensions, deux espaces S_m, S_n à m, n dimensions, ne se rencontrant pas. Désignons les par σ_1, σ_2.

On peut supposer que V_1 représente les hyperquadriques de σ_1 et V_2, celles de σ_2. On a ainsi une correspondance birationnelle entre σ_1 et V_1 d'une part, entre σ_2 et V_2 d'autre part.

Soient g une génératrice de la variété W_{m+n+1}, P_1 son point d'appui sur V_1 et P_2 son point d'appui sur V_2. A P_1 correspond un point P'_1 de σ_1 et à P_2, un point P'_2 de σ_2. A la droite g, nous ferons correspondre la droite $g' = P'_1P'_2$. Nous avons ainsi une correspondance biunivoque entre les droites g de W_{m+n+1} et les droites g'. Observons que les droites g' remplissent tout l'espace S_{m+n+1}, de sorte qu'on a une représentation de W_{m+n+1} sur S_{m+n+1}.

Aux hyperplans de S_{M+N+1} définissant l'espace ξ, correspondent dans S_{m+n+1} les $m + n - 1$ hyperquadriques

$$\Sigma a_{ik}^{(r)} y_i y_k + \Sigma b_{jh}^{(r)} z_j z_h = 0.$$

Ces hyperquadriques ont en commun une surface que nous désignerons par F′ et qui, étant une intersection complète, est régulière.

Au point (Y, Z) de F correspond le point (y, z) de F′, mais aussi le point $(y, -z)$. La surface F′ est transformée en soi par l'homographie H d'équations

$$y'_i : z'_j = y_i : -z_j, \qquad (i = 0, 1, \ldots, m\ ;\ j = 0, 1, \ldots, n).$$

Cette homographie H a pour axes ponctuels σ_1, σ_2 et est harmonique. Elle détermine sur F′ une involution I d'ordre deux, privée de points unis à cause du choix général des hyperplans passant par l'espace ξ. La surface F est une image de l'involution I et est, comme F′, régulière.

L'involution I étant privée de points unis, la surface F a le diviseur de Severi $\sigma = 2$ (¹).

Remarque. — On voit facilement que si l'un des nombres m, n est égal à l'unité, l'involution I possède des points unis, d'où notre hypothèse $m > 1$, $n > 1$.

4. Nous avons déterminé, dans une note antérieure (²), le genre arithmétique p'_a et le système canonique de la surface intersection complète d'hyperquadriques. Dans le cas actuel, on a

(¹) *Sur certaines surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité* (BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE, 1914, pp. 362-368) ; *Exemple de surface de diviseur supérieur à l'unité* (BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, 1915, pp. 182-185).

(²) *Sur les courbes et surfaces intersections complètes d'hyperquadriques* (BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROY. DE BELGIQUE, 1944, pp. 262-269).

$$p'_a = [(m+n)^2 - 7(m+n) + 14] \cdot 2^{m+n-4} - 1$$

et le système canonique est découpé par les hypersurfaces d'ordre $m + n - 4$.

Entre le genre p'_a de F' et celui p_a de F, nous avons la relation [1]

$$p'_a + 1 = 2(p_a + 1),$$

d'où

$$p_a = [(m+n)^2 - 7(m+n) + 14[\, 2^{m+n-5} - 1.$$

La surface F' étant d'ordre 2^{m+n-1}, le genre linéaire de cette surface est

$$p^{(1)} = (m + n - 4)^2\, 2^{m+n-1} + 1.$$

Par conséquent, le genre linéaire de F est

$$\pi = (m + n - 4)_2\, 2^{m+n-2} + 1.$$

Désignons par $|K'|$ le système canonique de F'. Dans ce système, il existe deux systèmes linéaires partiels $|K'_0|$, $|K'_1|$ composés au moyen de l'involution I. A l'un d'eux, par exemple à $|K'_0|$, correspond sur F le système canonique $|K|$ de cette surface.

Les surfaces F', F étant régulières, $|K'_0|$ a la dimension $p_a - 1$. Soit x la dimension de K'_1. D'après la théorie des homographies, on a

$$p_a - 1 + x + 2 = p'_a,$$

d'où $x = p_a$. Au système $|K'_1|$ correspond sur F un système $|K_1|$ de mêmes genre et degré que le système canonique, mais de dimension p_a. On a

$$2K \equiv 2K_1.$$

(1) *Sur les involutions appartenant aux surfaces algébriques* (*C. R.*, 1916, tome 163, pp. 261-263) ; *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points coïncidence appartenant à une surface algébrique* (BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, 1919, pp. 1-16).

Au sujet des involutions appartenant à une surface algébrique, on peut consulter notre exposé sur cet objet, paru dans les Actualités scientifiques, N° 270 (Paris, Hermann, 1935).

5. Observons en passant que si l'on a $m = n = 2$, la surface F′ a les genres $p'_a = p'_a = 1$, $p^{(1)} = 1$ et la surface F les genres $p_a = p_g = 0$, $\pi = 1$. La surface F′, intersection de trois hyperquadriques de S_5, a comme on sait tous les genres égaux à l'unité ($p_a = P_4 = 1$) et par suite F est une transformée birationnelle de la surface d'Enriques ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$).

Nous supposerons maintenant $m = 2$, $n = 3$. La surface F′ appartient à un espace S_6 et est l'intersection de quatre hyperquadriques. Son système canonique est constitué par ses sections hyperplanes et on a $p'_a = p'_g = 7$. Le genre linéaire est $p^{(1)} = 17$.

La surface F appartient à un espace ξ à 11 dimensions, plongé dans un espace S_{15}. On a $M = 5$, $N = 9$ et Σ_1, Σ_2 sont des espaces à cinq et neuf dimensions. On a $p_a = p_g = 3$, $\pi = 9$.

Le système $|K'_0|$ est formé des sections de F′ par les hyperplans passant par σ_2, c'est-à-dire par les hyperplans d'équation

$$\lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0.$$

En multipliant successivement les deux membres de cette équation par y_0, y_1, y_2, on obtient

$$\begin{aligned} \lambda_0 Y_{00} + \lambda_1 Y_{01} + \lambda_2 Y_{02} &= 0, \\ \lambda_0 Y_{01} + \lambda_1 Y_{11} + \lambda_2 Y_{12} &= 0, \\ \lambda_0 Y_{02} + \lambda_1 Y_{12} + \lambda_2 Y_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Ces équations représentent, dans Σ_1, le plan d'une conique de la surface V_1 et, dans l'espace S_{15}, l'espace linéaire à 12 dimensions déterminé par ce plan et par Σ_2. On en conclut que les courbes canoniques K de F sont découpées par les cônes projetant de Σ_2 les coniques de la surface V_1.

Les hyperplans découpant sur F′ les courbes K'_1 passent par σ_1 et ont pour équation

$$\mu_0 z_0 + \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \mu_3 z_3 = 0.$$

En multipliant successivement par z_0, z_1, z_2, z_3, on en déduit

$$\begin{aligned} \mu_0 Z_{00} + \mu_1 Z_{01} + \mu_2 Z_{02} + \mu_3 Z_{03} &= 0, \\ \mu_0 Z_{01} + \mu_1 Z_{11} + \mu_2 Z_{12} + \mu_3 Z_{13} &= 0, \\ \mu_0 Z_{02} + \mu_1 Z_{12} + \mu_2 Z_{22} + \mu_3 Z_{23} &= 0, \\ \mu_0 Z_{03} + \mu_1 Z_{13} + \mu_2 Z_{23} + \mu_3 Z_{33} &= 0. \end{aligned}$$

Dans Σ_2, ces équations représentent l'espace à cinq dimensions coupant V_2 suivant une des ∞^4 surfaces de Veronese de cette variété. Dans S_{13}, elles représentent l'espace à 12 dimensions déterminé par cet espace S_5 et par Σ_1. Par conséquent, les courbes K_1 sont découpées sur F par les cônes projetant de Σ_1 les surfaces de Veronese tracées sur V_2.

Sur la surface F', le système bicanonique est découpé par les hyperquadriques (ne contenant pas la surface). Dans ce système, il y a deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I. L'un comprend les courbes $2K_0'$ et $2K_1'$, l'autre les courbes $K_0' + K_1'$.

Le premier de ces systèmes est découpé sur F par les hyperquadriques

$$\Sigma\lambda_{ik}y_iy_k + \Sigma\mu_{jh}z_jz_h = 0.$$

Il lui correspond sur F le système des sections hyperplanes

$$\Sigma\lambda_{ik}Y_{ik} + \Sigma\mu_{jh}Z_{jh} = 0.$$

Sur F, ce système comprend les courbes 2K et est donc le système bicanonique de F. On a $P_2 = 12$ et d'ailleurs, l'espace ξ a la dimension onze.

Les hyperquadriques découpant sur F' le second système ont pour équation.

$$\Sigma\gamma_{ik}y_iz_k = 0.$$

Les courbes homologues sont découpées sur F par les hyperquadriques

$$\Sigma\gamma_{ik}Y_{ij}Z_{kh} = 0, \qquad (j = 0, 1, 2\,; h = 0, 1, 2, 3).$$

passant par Σ_1 et Σ_2, et touchant la surface en chaque point d'intersection. Ce sont des courbes de même degré et de même genre que les courbes bicanoniques et elles forment un système linéaire de dimension onze.

6. Mentionnons aussi le cas $m = n = 3$, qui conduit à une surface projectivement canonique.

La surface F' est l'intersection de cinq hyperquadriques d'un espace linéaire S_7 ; Sur cette surface, le système canonique est découpé par les hyperquadriques. On a $p'_a = 31$ et $p^{(1)} = 129$.

Les espaces Σ_1, Σ_2, à neuf dimensions, appartiennent à un espace S_{19}, à $M + N + 1 = 19$ dimensions. L'espace ξ, intersection de cinq hyperplans, est un espace à 14 dimensions.

La surface F a le genre arithmétique $p_a = 15$ et le genre linéaire $\pi = 65$.

Aux sections hyperplanes de la surface F correspondent les sections de F' par des hyperquadriques, c'est-à-dire des courbes canoniques de F'. Comme ce système des sections hyperplanes a la dimension 14, c'est le système canonique de la surface F. L'autre système composé au moyen de l'involution I et appartenant au système canonique de cette surface a en effet la dimension 15.

On obtient donc ici une surface projectivement canonique.

Liège, le 5 avril 1959