Sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface et sur une suite de quadriques

Lucien Godeaux

Résumé
A une surface dont les quadriques de Lie ont cinq points caractéristiques et telle qu'il y ait conservation des asymptotiques sur les nappes de l'enveloppe, on associe une suite de quadriques dont on établit quelques propriétés.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface et sur une suite de quadriques,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — A une surface dont les quadriques de Lie ont cinq points caractéristiques et telle qu'il y ait conservation des asymptotiques sur les nappes de l'enveloppe, on associe une suite de quadriques dont on établit quelques propriétés.

Nous nous sommes à diverses reprises occupé de l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface lorsque cette enveloppe est formée de cinq nappes (dont l'une est la surface elle-même) et quand il y a conservation des asymptotiques sur ces nappes. Nous avons associé à cette surface une suite de Laplace qui n'existe d'ailleurs que lorsqu'il y a conservation des asymptotiques [1]. Cette suite de Laplace donne naissance à une suite de quadriques associée à la surface. Deux quadriques de la suite se touchent en quatre points qui seront caractéristiques pour les deux quadriques. Nous donnons dans cette note quelques propriétés de cette suite de quadriques.

1. Soit (x) une surface rapportée à ses asymptotiques u, v. Désignons par U, V les points de l'hyperquadrique de Klein Q,

[1] Voir notre exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace réglé*, ACTUALITÉS STIENTIFIQUES, N° 138 (Paris, Hermann, 1934), *Note sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface* (BULLETIN DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1953, pp. 156-164), *Familles de quadriques attachées à des congruences W*, (REVUE DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, publiée par l'ACADÉMIE POPULAIRE ROUMAINE, 1956, pp. 93-97).

de S_5, qui représentent les tangentes aux asymptotiques u, v en un point x. On sait que les points U, V sont consécutifs dans une suite de Laplace

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots \qquad \text{(L)}$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

La suite L est autopolaire par rapport à Q, le point U_n étant le pôle de l'hyperplan $V_{n-2}V_{n-1}V_nV_{n+1}V_{n+2}$ et V_n celui de $U_{n-2}U_{n-1}U_nU_{n+1}U_{n+2}$.

Nous avons démontré que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait conservation des asymptotiques sur les quatre nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie de la surface (x), en dehors de la surface elle-même, est que les points de rencontre de l'une des droites U_1U_2, V_1V_2 avec Q décrivent des réseaux conjugués u, v. Si cette propriété a lieu pour l'une des droites, elle a également lieu pour l'autre.

Supposons qu'il y ait conservation des asymptotiques sur l'enveloppe des quadriques de Lie de la surface (x). La condition précédente peut s'exprimer autrement. Il existe quatre congruences W ayant (x) comme surface focale commune. Nous désignerons par I', I'', J', J'' les points de la droite UV qui représentent les génératrices de ces congruences ; on sait que ces points décrivent des réseaux conjugués à la congruence (UV) (Darboux) et qu'ils déterminent des suites de Laplace inscrites dans la suite L.

Désignons par I'_1, I'_2, ... les transformés successifs de Laplace de I' dans le sens des v, par I''_1, I''_2, ... ceux de I'' dans le même sens. Supposons que les points I'_1, I''_2 soient les points d'intersection de Q avec la droite U_1U_2.

Désignons par J'_1, J'_2, ... les transformés de Laplace de J' dans le sens des u, par J''_{-1}, J''_{-2}, ... ceux de J'' dans le même sens. Supposons que les points J'_{-2}, J''_{-2} soient les points d'intersection de Q avec V_1V_2.

Dans ces conditions, il y a conservation des asymptotiques sur les nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie de (x).

Dans la suite, nous désignerons par I'_{-1}, I'_{-2}, ..., par I''_{-1}, I''_{-2}, ... les transformés de Laplace de I', de I'' dans le sens des

u, par J'_1, J'_2, ... et par J''_1, J''_2, ... les transformés de Laplace de J', J'' dans le sens des v (1).

2. Le point B, intersection des droites $I'_1I'_2$, $I''_1I''_2$ décrit un réseau conjugué. Il en est de même du point A, intersection des droites $J'_{-1}J'_{-2}$, $J''_{-1}J''_{-2}$. Nous avons démontré que les points A, B sont transformés de Laplace l'un de l'autre. D'une manière précise, B est le transformé de A dans le sens des u et A celui de B dans le sens des v.

Nous avons également démontré que A est l'intersection des droites $I'_2I'_3$, $I''_2I''_3$ et B, celle des droites $J'_{-2}J'_{-3}$, $J''_{-2}J''_{-3}$. En d'autres termes, le point A est l'intersection des plans VV_1V_2 et $U_1U_2U_3$, le point B celui des plans UU_1U_2 et $V_1V_2V_3$.

Désignons par A_1, A_2, ... les transformés successifs de Laplace de A dans le sens des v, par B_1, B_2, ... ceux de B dans le sens des u.

Le point A_n est l'intersection des plans $U_{n+3}U_{n+2}U_{n+1}$ et $U_{n-1}U_{n-2}U_{n-3}$. Le point B_n est l'intersection des plans $V_{n+3}V_{n+2}V_{n+1}$ et $V_{n-1}V_{n-2}V_{n-3}$. En particulier le point A_1 est l'intersection des plans $U_4U_3U_2$ et UVV_1, le point A_2 celle des plans $U_5U_4U_3$ et U_1UV. De même, le point B_1 est l'intersection des plans $V_4V_3V_2$ et VUU_1, le point B_2 celle des plans $V_5V_4V_3$ et V_1VU.

Les points A_n, B_n sont conjugués par rapport à Q, mais il n'en est pas de même en général des points A_n et B_{n-1} par exemple.

Le plan $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ coupe Q suivant une conique représentant une demi-quadrique dont nous désignerons le support par $\mathcal{A}_n$ et de même, le plan $B_nB_{n+1}B_{n+2}$ coupe Q suivant une conique représentant une demi-quadrique dont nous désignerons le support par $\mathcal{B}_n$. A la suite de Laplace

$$\ldots, A_n, \ldots, A_1, A, B, B_1, \ldots, B_n, \ldots \tag{1}$$

est donc associée une suite de quadriques

$$\ldots, \mathcal{A}_n, \ldots, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n, \ldots$$

(1) Nous supposons les points I', I'', J', J'' distincts. Il est facile de voir que dans le cas contraire, une nouvelle condition est imposée à la surface (x). Il suffit de se rapporter aux expressions analytiques de ces points (Voir notre exposé cité plus haut).

telle que deux quadriques de la suite se touchent en quatre points, caractéristiques pour les deux quadriques. Nous désignons par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ les quadriques correspondant aux plans AA_1A_2, BB_1B_2 et par $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_0$ celles qui sont associées aux plans BAA_1, ABB_1.

Nous allons chercher à déterminer la suite polaire par rapport à Q de la suite (I).

3. La congruence (i'), représentée sur Q par la surface (I'), a une seconde surface focale que nous désignerons par (x'), et dont les asymptotiques sont les lignes u, v. A cette surface (x'), nous pouvons associer une suite de Laplace L′ analogue à L, formée des points

$$\ldots, U'_n, \ldots, U'_1, U', V', V'_1, \ldots, V'_n, \ldots \qquad (L')$$

circonscrite à la suite $\ldots, I'_1, I', I'_{-1}, \ldots$.

Le point P'_n, pôle de l'hyperplan $I'_2I'_1I'I'_{-1}I'_{-1}$ est l'intersection des droites UU' et VV'.

Le point P'_n, pôle de l'hyperplan $I'_{-n-2}I'_{-n-1}I'_{-n}I^1_{-n+1}I'_{-n+2}$, est l'intersection des droites $U_{n-1}U'_{n-1}$, $U_nU'_n$. Le point P'_{-n}, pôle de l'hyperplan $I'_{n-2}I'_{n-1}I'_nI'_{n+1}I'_{n+2}$, est l'intersection des droites $V_{n-1}V'_{n-1}$, $V_nV'_n$.

Désignons de même par (x'') la seconde nappe focale de la congruence (i''), représentée sur Q par la surface (I'') et adoptons les mêmes notations que pour (I'), mais en remplaçant ′ par ″.

Le point P′ détermine une suite de Laplace

$$\ldots, P'_n, \ldots, P'_1, P', P'_{-1}, \ldots, P'_{-n}, \ldots$$

polaire de la suite $\ldots, I'_1, I', I'_{-1}, \ldots$ par rapport à Q.

On a de même une suite de Laplace

$$\ldots, P''_n, \ldots, P''_1, P'', P''_{-n}, \ldots, P''_{-n}, \ldots$$

polaire de la suite $\ldots, I''_1, I'', I''_{-1}, \ldots$ par rapport à Q.

Le point A_n est l'intersection des droites $I'_{n+2}I'_{n+3}$ et $I''_{n+2}I''_{n+3}$, le point A_{n+1} celle des droites $I'_{n+3}I'_{n+4}$ et $I''_{n+3}I''_{n+4}$, enfin le point A_{n+2} celle des droites $I'_{n+4}I'_{n+5}$ et $I''_{n+4}I''_{n+5}$.

Le plan $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ est donc l'intersection des espaces à trois dimensions $I'_{n+2}I'_{n+3}I'_{n+4}I'_{n+5}$ et $I''_{n+2}I''_{n+3}I''_{n+4}I''_{n+5}$. Le premier a pour conjuguée par rapport à Q la droite $P'_{-n-3}P'_{-n-4}$ et le second, la droite $P''_{-n-3}P''_{-n-4}$. La première coïncide avec la droite $V_{n+3}V'_{n+3}$ et la seconde avec la droite $V_{n+3}V''_{n+3}$.

On en conclut que le plan conjugué de $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ est le plan $V_{n+3}V'_{n+3}V''_{n+3}$.

Le point B_n est l'intersection des droites $I'_{-n+1}I'_{-n+2}$ et $I''_{-n+1}I''_{-n+2}$, B_{n+1} celle des droites $I'_{-n}I'_{-n+1}$ et $I''_{-n}I''_{-n+1}$, B_{n+2}, celle des droites $I'_{-n-1}I'_{-n}$, $I''_{-n-1}I''_{-n}$. Le plan $B_nB_{n+1}B_{n+2}$ appartient donc aux espaces $I'_{-n+2}I'_{-n+1}I'_{-n}I'_{-n-1}$, $I''_{-n+2}I''_{-n+1}I''_{-n}I''_{-n-1}$. Le premier a pour droite polaire par rapport à Q la droite $P'_{n-1}P'_{n}$ et le second la droite $P''_{n-1}P''_{n}$. Ces droites coïncident respectivement avec les droites $U_{n-1}U'_{n-1}$ et $U_{n-1}U''_{n-1}$.

Le plan conjugué du plan $B_nB_{n+1}B_{n+2}$ par rapport à Q est le plan $U_{n-1}U'_{n-1}U''_{n-1}$.

4. On peut répéter en partant des points J', J'' ce qui vient d'être fait en partant des points I', I''. Les points J', J'' représentent des droites j', j'' engendrant des congruences W dont (x) est une surface focale. Désignons par $(\bar{x}')$, $(\bar{x}'')$ les secondes surfaces focales respectives.

A la surface $(\bar{x}')$ est attachée une suite de Laplace $\bar{L}'$ que nous écrirons

$$\ldots, \bar{U}'_n, \ldots, \bar{U}'_1, \bar{U}', \bar{V}', \bar{V}'_1, \ldots, \bar{V}'_n, \ldots$$

et à la surface $(\bar{x}'')$ une suite de Laplace $\bar{L}''$ que nous écrirons

$$\ldots, \bar{U}''_n, \ldots, \bar{U}''_1, \bar{U}'', \bar{V}''_1, \bar{V}''_1, \ldots, \bar{V}''_n, \ldots.$$

On arrive aux résultats suivants :

Le plan polaire du plan $B_nB_{n+1}B_{n+2}$ est le plan $U_{n+3}\bar{U}'_{n+3}\bar{U}'_{n+3}$.

Le plan polaire du plan $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ est le plan $V_{n-1}\bar{V}'_{n-1}\bar{V}''_{n-1}$.

Il en résulte que les points U_{n-1}, U'_{n-1}, U''_{n-1}, U_{n+3}, $\bar{U}'_{n+3}$, $\bar{U}''_{n+3}$ sont dans un même plan. Il en est de même des points V_{n+3}, V'_{n+3}, V''_{n+3}, V_{n-1}, $\bar{V}'_{n-1}$, $\bar{V}''_{n-1}$:

Observons que A_n étant l'intersection des plans $U_{n+3}U_{n+2}U_{n+1}$ et $U_{n-1}U_{n-2}U_{n-3}$, son hyperplan polaire contient les plans $V_{n+3}V_{n+2}V_{n+1}$ et $V_{n-1}V_{n-2}V_{n-3}$. De même, l'hyperplan polaire de A_{n+1} contient les plans $V_{n+4}V_{n+3}V_{n+2}$ et $V_nV_{n-1}V_{n-2}$. Enfin l'hyperplan polaire de A_{n+2} contient les plans $V_{n+5}V_{n+4}V_{n+3}$ et $V_{n+1}V_nV_{n-1}$. Ces trois hyperplans ont en commun les points V_{n+3} et V_{n-1}, ce qui confirme le résultat obtenu plus haut.

5. Appliquons ce qui précède au plan BB_1B_2.

Le plan conjugué de BB_1B_2 par rapport à Q est d'une part le plan $VV'V''$ et d'autre part le plan $U_3\overline{U}'_3\overline{U}''_3$, qui sont donc confondus.

Les points V, V′, V″ appartiennent à Q et représentent les tangentes aux lignes v sur les surfaces (x), (x'), (x'') en des points correspondants. La quadrique $\mathcal{B}$ qui correspond à BB_1B_2 est donc déterminée par ces trois droites.

De même, la quadrique $\mathcal{A}$, qui correspond au plan AA_1A_2, contient les tangentes aux lignes u des surfaces (x), (x'), (x'') en trois points homologues.

Nous avons appelé $\mathcal{B}_0$ la quadrique qui correspond au plan ABB_1. Notons que les points d'intersection de la droite AB avec Q représentent les diagonales du quadrilatère de Demoulin. La quadrique $\mathcal{B}_0$ passe donc par ces droites.

Le plan conjugué par rapport à Q de ABB_1 est d'une part le plan $V_1V'_1V''_1$, d'autre part le plan $U_2\overline{U}'_2\overline{U}''_2$. Les points V_1, V'_1, V''_1 sont les secondes images des complexes linéaires osculateurs aux lignes u des surfaces (x), (x'), (x'') en trois points homologues. Ces trois complexes ont en commun une demi-quadrique qui correspond au plan ABB_1.

De même, la quadrique $\mathcal{A}_0$ qui correspond au plan BAA_1 passe par les diagonales du quadrilatère de Demoulin. Les plans conjugués à BAA_1 sont $U_1U'_1U''_1$ et $V_2\overline{V}'_2\overline{V}''_2$. La demi-quadrique qui correspond au plan BAA_1 est commune aux complexes linéaires osculateurs aux lignes v en trois points homologues des surfaces (x), $(\bar{x}')$, $(\bar{x}'')$.

Liége, le 14 juin 1959.