Bulletin de la Classe des sciences

Sur deux congruences W particulières

Lucien Godeaux

Résumé
Étude de deux congruences W ayant une surface focale commune. Celle-ci est une surface de Ribaucour dont les asymptotiques des deux modes appartiennent à des complexes linéaires. La seconde surface focale d'une congruence est de même nature que la première surface focale. La seconde surface focale de la seconde congruence a ses réglées asymptotiques gauches des deux modes appartenant à des complexes linéaires.

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE.

Sur deux congruences W particulières,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Étude de deux congruences W ayant une surface focale commune. Celle-ci est une surface de Ribaucour dont les asymptotiques des deux modes appartiennent à des complexes linéaires. La seconde surface focale d'une congruence est de même nature que la première surface focale. La seconde surface focale de la seconde congruence a ses réglées asymptotiques gauches des deux modes appartenant à des complexes linéaires.

On sait que Darboux a démontré que le point J qui représente sur l'hyperquadrique de Klein la droite j engendrant une congruence W, satisfait à une équation de Laplace. Dans un travail récent (1), nous avons rencontré incidemment une congruence W telle que les transformées de Laplace dans les deux sens de la surface (J) se réduisent à des courbes. C'est l'étude d'une congruence W de cette nature qui fait l'objet de ce travail.

Les nappes focales de la congruence envisagée sont des surfaces de Ribaucour dont les asymptotiques des deux modes appartiennent à des complexes linéaires. Chacune de ces surfaces est nappe focale d'une seconde congruence W dont la seconde nappe focale est une surface dont les réglées gauches asymptotiques des deux modes appartiennent à des complexes linéaires.

Nous utilisons dans ce travail la terminologie et les notations de notre exposé sur *La Théorie des surfaces et l'Espace réglé* (2).

(1) *Sur les surfaces dont les réglées asymptotiques des deux modes appartiennent à des complexes linéaires* BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE BELGIQUE, à l'impression).

(2) Actualités scientifiques, N° 138 (Paris, Hermann, 1934).

Dans cet exposé, nous avons établi des relations dans l'hypothèse où la suite de Laplace de l'espace à cinq dimensions associée à une surface est illimitée dans les deux sens. Lorsque cette suite de Laplace est limitée, ces formules continuent à être valables à condition de remplacer les coordonnées des points qui n'existent plus par leurs expressions en fonction des dérivées des coordonnées des points qui terminent la suite. C'est d'ailleurs en utilisant les dérivées dans le cas général que ces formules ont été établies.

1. Soit (x) une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques u, v et (j) une congruence W ayant (x) comme nappe focale.

Représentons les tangentes xx^{10}, xx^{01} aux asymptotiques u, v et la droite j par les points U, V, J sur l'hyperquadrique Q de Klein dans l'espace S_5. Le point J appartient à la droite UV.

On a, avec nos notations habituelles,

$$U^{10} + 2bV = 0, \quad V^{01} + 2aU = 0, \quad J = \lambda U - \mu V$$

et on peut choisir le facteur de proportionnalité de λ, μ pour avoir

$$\lambda^{01} + 2a\mu = 0, \; \mu^{10} + 2b\lambda = 0.$$

Nous particulariserons la congruence W donnée en supposant que :

a. Les tangentes aux courbes v aux points d'une courbe u de la surface (J) forment un cône dont le sommet J_1 dépend de v.

b. Les tangentes aux courbes u aux points d'une courbe v de la même surface forment un cône dont le sommet J_{-1} dépend de u.

En d'autres termes, le point J détermine une suite de Laplace qui se termine dans chaque sens au premier transformé en présentant le cas de Laplace.

Les points U, V appartiennent à une suite de Laplace L :

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots \qquad \text{(L)}$$

(où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u) qui ne peut se terminer ni au point U, ni au point V puisque par hypothèse (x) n'est pas réglée.

La suite de Laplace J_1, J, J_{-1} est inscrite dans la suite L, par conséquent la droite UU_1 doit passer par J_1. Lorsque u varie, le point J_1 reste fixe et la droite UU_1 décrit un cône de sommet J_1, donc la suite L se termine au point U_1 en présentant le cas de Laplace et U_1 coïncide avec J_1.

Pour la même raison, la suite L se termine au point V_1 en présentant le cas de Laplace et V_1 coïncide avec J_{-1}.

La fermeture de L aux points U_1, V_1 implique

$$h_1 = -(\log b)^{11} + 4ab = 0, \quad k_1 = -(\log a)^{11} + 4ab = 0,$$

donc

$$(\log a)^{11} = (\log b)^{11} = 4\,ab.$$

Le point J_1 est donné par

$$J_1 = \mu U_1 - \mu_1 U, \quad \text{où} \quad \mu_1 = \mu^{01} - \mu\,(\log b)^{01}.$$

Comme il coïncide avec U_1, μ_1 est nul. De même, puisque J_{-1} coïncide avec V_1, on a $\lambda_1 = 0$, c'est-à-dire en fin de compte

$$\mu^{01} - \mu\,(\log b)^{01} = 0, \quad \lambda^{10} - \lambda\,(\log a)^{10} = 0.$$

Le point J satisfait à l'équation de Laplace

$$J^{11} - J^{10}\,(\log b)^{01} - J^{01}\,(\log a)^{10} \\ + [\log a)^{10}\,(\log b)^{01} - 4ab]\,J = 0.$$

2. Les tangentes aux courbes v aux points d'une courbe u de la surface (U) passent par un point U_1 restant fixe quand u varie. Ces tangentes sont également tangentes à l'hyperquadrique Q en leurs points de contact avec (U), donc la courbe u considérée sur (U) appartient à l'hyperplan polaire de U_1 par rapport à Q, c'est-à-dire à l'hyperplan $UVV_1V_1^{10}V_1^{20}$. Une courbe u de la surface (U) représente la développable lieu des tangentes à la courbe u correspondante sur la surface (x). Le fait que U_1 ne dépend que de v entraîne donc comme conséquence que les asymptotiques u de la surface (x) appartiennent à des complexes linéaires.

De même, le fait que le point V_1 ne dépend que de u entraîne comme conséquence que les asymptotiques v de la surface (x) appartiennent à des complexes linéaires.

En résumé : *Les asymptotiques des deux modes de la surface* (x) *appartiennent à des complexes linéaires.*

3. Si la courbe (U_1) n'appartient pas à un hyperplan, l'hyperplan osculateur $U_1U_1^{01}U_1^{02}U_1^{03}U_1^{04}$ à cette courbe serait variable avec v et son pôle V_1^{20} dépendrait de v et non de u, ce qui est impossible.

Si la courbe (U_1) appartenait à un hyperplan sans appartenir à un espace linéaire à trois dimensions, la droite conjuguée par rapport à Q de l'espace osculateur $U_1U_1^{01}U_1^{02}U_1^{03}$ contiendrait les points V_1^{10}, V_1^{20} et cette droite ne dépendrait que de v, ce qui est impossible.

Si la courbe (U_1) appartenait à un espace linéaire à trois dimensions sans appartenir à un plan, les points V_1, V_1^{10}, V_1^{20} appartiendraient à la droite fixe conjuguée de l'espace fixe $U_1U_1^{01}U_1^{02}U_1^{03}$. On aurait une relation de la forme

$$V_1^{20} + AV_1^{10} + BV^1 = 0. \tag{1}$$

En représentant par $\Omega(p, q) = 0$ la condition pour que deux points p, q soient conjugués par rapport à Q, on a

$$\Omega(V, V_1^{10}) = -2\Delta, \quad \Omega(V^1, V_1^{10}) = 0, \quad \Omega(V, V_1^{20}) = 2\Delta \,(\log a)^{10},$$

où

$$\Delta = \left| x \;\; x^{10} \;\; x^{01} \;\; x^{11} \right|.$$

On en déduit $A = (\log a)^{10}$.

En dérivant (1) par rapport à v, on a $A^{01}V_1^{10} + B^{01}V_1 = 0$, d'où nécessairement $A^{01} = 0$, $B^{01} = 0$. Cela entraînerait $(\log a)^{11} = 0$, alors que cette quantité est égale à $4ab$ et que ni a, ni b ne peuvent être nuls par hypothèse.

En reprenant le raisonnement précédent en permutant les rôles de U_1, V_1, on voit que la courbe (V_1) ne peut qu'appartenir à un plan et qu'il en est de même de la courbe (U_1).

Les courbes (U), (V) *appartiennent à des plans conjugués par rapport à l'hyperquadrique* Q.

Les relations que nous avons établies entre les points V_3, V_2, ..., U_2, U_3 deviennent actuellement

$$V_1^{20} + V_1^{10}\,(\log a)^{10} + \alpha V_1 + \frac{1}{2}\alpha(\log a^2\alpha)^{10}V + 2b[\beta U + U_1^{01}] = 0,$$

$$U_1^{02} + U_1^{01} (\log b)^{01} + \beta U_1 + \frac{1}{2}\beta(\log b^2\beta)^{01}U + 2a[\alpha V + V_1^{10}] = 0.$$

En dérivant la première par rapport à u et la seconde par rapport à v, on a

$$V_1^{30} + V_1^{20}\left(\log \frac{a}{b}\right)^{10} + [\alpha + (\log a)^{20} - (\log a)^{10}(\log b)^{10}]V_1^{10} + \frac{1}{2}\alpha\left[\log \frac{a^2\alpha^3}{b^2}\right]^{10} V_1 = 0,$$

$$U_1^{03} + U_1^{02}\left(\log \frac{a}{b}\right)^{01} + [\beta + (\log b)^{02} - (\log b)^{01} (\log a)^{01}]U_1^{01} + \frac{1}{2}\beta\left(\log \frac{b^2\beta^3}{a^2}\right)^{01} U_1 = 0.$$

En dérivant la première de ces relations par rapport à v et la seconde par rapport à u, on trouve des expressions identiquement nulles.

4. Nous allons voir que le point $I = \lambda U + \mu V$ satisfait également à une équation de Laplace. Nous avons en effet

$$I^{01} - I (\log b)^{01} = \lambda U_1 - 4a\mu U, \quad I^{10} - I (\log a)^{10} = \mu V_1 - 4b\lambda V,$$

$$I^{11} - I^{10}(\log b)^{01} - I^{01}(\log a)^{10} + [(\log a)^{10}(\log b)^{01} - 8ab]I = 0.$$

Comme J et I partagent harmoniquement le segment UV, il en résulte que *la surface* (x) *est une surface de Ribaucourt* et que l'on a donc

$$a^{10} = b^{01}.$$

Le point I détermine une suite de Laplace inscrite dans la suite L. On a

$$I_1 = I^{01} - I(\log b)^{01} = \lambda U_1 - 4a\mu U,$$

$$I_2 = I_1^{01} - I_1(\log ab^2)^{01} = \lambda U_1^{01} - [6a\mu + \lambda(\log ab^2)^{01}]U_1.$$

On trouve

$$I_2^{10} = I_2(\log a)^{10},$$

donc le point I_2 reste fixe lorsque u varie.

On a de même

$$I_{-1} = I^{10} - I(\log\ a)^{10} = \mu V_1 - 4ab\lambda V,$$

$$I_{-2} = I_{-1}^{10} - I(\log\ a^2b)^{10} = \mu V_1^{10} - [6b\lambda + \mu(\log\ a^2b)^{10}]V_1,$$

$$I_{-2}^{01} = I_{-2}(\log\ b)^{01}.$$

Le point I_{-2} reste fixe lorsque v varie.

5. Nous allons profiter du fait que (x) est une surface de Ribaucour pour simplifier nos calculs.

Imaginons un espace S_6 à six dimensions contenant l'espace S_5 considéré et dans cet espace S_6 un point U' dont les six premières coordonnées sont celles de U et la dernière μ, et un point V' dont les six premières coordonnées sont celles de V et la dernière λ. Les points U', V' sont transformés de Laplace l'un de l'autre et l'on a dans S_6 une suite de Laplace L' :

$$U_1', U'\ V', V_1'. \qquad (L')$$

Soit, dans S_6, 0 le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la dernière. La suite L est la projection de la suite L' à partir de 0 sur l'hyperplan S_5. Le point J est l'intersection des droites UV, $U'V'$. On observera que les points U_1', V_1' coïncident avec U_1 et V_1.

On peut évidemment remplacer l'espace S_5 par un autre espace à condition qu'il ne passe pas par 0. Soit $\overline{S}_5$ un espace distinct de S_5, ne passant pas par 0 mais contenant les points U_1, V_1. Désignons par $\overline{U}$, $\overline{V}$ les points où il rencontre les droites UU', VV'. La projection de L' sur $\overline{S}_5$ à partir de 0 donnera une suite $\overline{L}$ analogue à L et les droites $\overline{U}\overline{V}$, $U'V'$ se rencontreront en un point $\overline{J}$ qui engendrera un réseau conjugué à la congruence $(\overline{U}\overline{V})$. On aura $\overline{J} = \overline{\lambda}\overline{U} - \overline{\mu}\overline{V}$, mais $\overline{\lambda}$, $\overline{\mu}$ ne satisferont plus nécessairement à des équations analogues à celles vérifiées par $\overline{U}$, $\overline{V}$. Nous pourrons choisir l'espace $\overline{S}_5$ de manière à avoir $\overline{\lambda} + \overline{\mu} = 0$.

Tout cela montre que l'on peut prendre, sans restreindre la généralité,

$$J = U + V,\ I = U - V.$$

On aura alors

$$J_1 = J^{01} = U_1 + U[(\log b)^{01} - 2a],$$
$$J_{-1} = J^{10} = V_1 + V[(\log a)^{10} - ab]$$

et puisque J_1 doit coïncider avec U_1, J_{-1} avec V_1, les coefficients de U et de V sont nuls. On a donc les conditions

$$2a - (\log b)^{01} = 0, \quad 2b - (\log a)^{10} = 0, \quad a^{10} = b^{01},$$
$$(\log a)^{11} = (\log b)^{11} = 4ab.$$

6. Rappelons maintenant les formules que nous avons établies dans notre exposé sur *La Théorie des Surfaces et l'Espace réglé* en indiquant ce qu'elles deviennent actuellement.

Les coordonnées normales de Wilczynski des points x de (x) satisferont au système complètement intégrable d'équations aux dérivées partielles

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1 x = 0, \quad x^{02} + 2ax^{10} + c_2 x = 0.$$

Nous avons posé

$$\alpha = 2(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^{2} + 4(b^{01} + c^1),$$
$$\beta = 2(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^{2} + 4(a^{10} + c_2).$$

On a

$$a\alpha^{10} + 2\alpha a^{10} = b\beta^{01} + 2\beta b^{01},$$

et actuellement

$$\alpha^{01} = 0, \ \beta^{10} = 0.$$

Nous attachons au point x le tétraèdre de Cartan ayant pour sommets x,

$$m = x(\log a)^{10} - 2x^{10}, \qquad n = x(\log b)^{01} - 2x^{01},$$
$$y = [8ab - (\log a)^{10}(\log b)^{01}]x + 2x^{10}(\log b)^{01} + 2x^{01}(\log a)^{10} - 4x^{11}$$

et tout point de l'espace a des coordonnées de la forme

$$z_1 x + z_2 m + z_3 n + z_4 y \, ;$$

z_1, z_2, z_3, z_4 sont les coordonnées locales du point.

Nous avons ensuite, dans le cas actuel,

$$\begin{aligned}
2x^{10} &= x(\log a)^{10} - m, \quad 2x^{01} = x(\log b)^{01} - n,\\
2m^{10} &= ax - m(\log a)^{10} - 4bn,\\
2m^{01} &= m(\log b)^{01} + y,\\
2m^{10} &= n(\log a)^{10} + y,\\
2n^{10} &= ax - 4am - n(\log b)^{01},\\
2y^{10} &= -4b\beta x - an - y(\log a)^{10},\\
2y^{01} &= -4a\alpha x - \beta m - y(\log b)^{01},
\end{aligned}$$

et ensuite

$$\begin{aligned}
|x\,m| &= -2\mathrm{U}, & |x\,n| &= -2\mathrm{V},\\
|x\,y| &= -2(\mathrm{U}_1 + \mathrm{V}_1), & |m\,n| &= -2(\mathrm{U}_1 - \mathrm{V}_1),\\
|m\,y| &= 4\mathrm{V}_1^{10} + 2a\mathrm{V}, & |n\,y| &= 4\mathrm{U}_1^{01} + 2\beta\mathrm{U}.
\end{aligned}$$

7. Le second foyer de la droite j est $\bar{x} = m + n$. Nous avons en effet

$$4\bar{x}^{10} - 4\bar{x}^{01} + 2[(\log a)^{10} + (\log b)^{01}]\bar{x} = (\alpha - \beta)x.$$

Appelons $\overline{\mathrm{U}}$, $\overline{\mathrm{V}}$ les points de Q qui représentent les tangentes $\bar{x}\bar{x}^{10}$, $\bar{x}\bar{x}^{01}$ aux asymptotiques u, v de la surface $(\bar{x})$. On a

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{U}} &= (\alpha + \beta)\mathrm{U} + 2a\mathrm{V} + 2\mathrm{U}_1^{01} + 2\mathrm{V}_1^{10},\\
\overline{\mathrm{V}} &= 2\beta\mathrm{U} + (\alpha + \beta)\mathrm{V} + 2\mathrm{U}_1^{01} + 2\mathrm{V}_1^{10},
\end{aligned}$$

et ensuite

$$\overline{\mathrm{U}} - \overline{\mathrm{V}} = (\alpha - \beta)(\mathrm{U} + \mathrm{V}),$$

ce qui montre que la droite $\overline{\mathrm{U}}\mathrm{V}$ passe par le point J.

On a d'autre part

$$\begin{aligned}
(\alpha - \beta)\overline{\mathrm{U}}^{10} - \alpha^{10}\overline{\mathrm{U}} + (\alpha - \beta + \alpha^{10})\overline{\mathrm{V}} &= 0,\\
(\beta - \alpha)\overline{\mathrm{V}}^{01} - \beta^{01}\overline{\mathrm{V}} + (\beta - \alpha + \beta^{01})\overline{\mathrm{U}} &= 0
\end{aligned}$$

On a ensuite

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{U}}_1 &= \overline{\mathrm{U}}^{01} + \overline{\mathrm{U}}(\log b)^{01} = (\alpha - \beta)\mathrm{U}_1,\\
\overline{\mathrm{V}}_1 &= \overline{\mathrm{V}}^{10} + \overline{\mathrm{V}}(\log a)^{10} = (\beta - \alpha)\mathrm{V}_1.
\end{aligned}$$

Le point P, seconde image du complexe linéaire osculateur à la congruence (j) est l'intersection des droites $U\overline{U}$ et $V\overline{V}$. On a

$$P = \beta U + \alpha V + U_1^{01} + V_1^{10}.$$

On en déduit

$$P^{10} + P(\log a)^{10} = \left[\frac{1}{2}\alpha(\log a^2\alpha)^{10} - 2b\beta\right] V,$$

$$P^{01} + P(\log b)^{01} = \left[\frac{1}{2}\beta(\log b^2\beta)^{01} - 2a\alpha\right] U.$$

8. La quadrique de Lie Φ attachée au point x de la surface (x) a pour équation locale

$$\Phi \equiv z_1 z_4 + z_2 z_3 = 0.$$

Ses génératrices rectilignes des deux modes sont représentées par les points des coniques sections de l'hyperquadrique Q par les plans $UU_1U_1^{01}$, $VV_1V_1^{10}$.

La seconde quadrique Φ_1 attachée au point x de la surface (x) a pour équation locale

$$\Phi_1 \equiv z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2 - A(z_1 z_4 + z_2 z_3) = 0$$

où

$$A = \frac{\beta}{2a}(\log b^2\beta)^{01} = \frac{\alpha}{2b}(\log a^2\alpha)^{10}.$$

Les génératrices rectilignes des deux modes de cette quadrique correspondent aux coniques sections de Q par les plans $U_1U_1^{01}U_1^{02}$ et $V_1V_1^{10}V_1^{20}$, c'est à-dire les plans fixes ϖ_v de la courbe (U_1) et ϖ_u de la courbe (V_1). Cette quadrique est donc fixe. On vérifie d'ailleurs que les dérivées du premier membre par rapport à u et v sont identiquement nulles.

Les quadriques Φ et Φ_1 se touchent en quatre points, sommets du quadrilatère de Demoulin et se rencontrent suivant les côtés de ce quadrilatère. Ces côtés sont représentés sur Q par les points situés sur les droites $U_1U_1^{01}$, $V_1V_1^{10}$.

Au point $\bar{x}$ de la surface $(\bar{x})$ sont attachées la quadrique de Lie $\overline{\Phi}$ et la quadrique $\overline{\Phi}$. Comme $\overline{U}_1$ et $\overline{V}_1$ coïncident respectivement avec U_1 et V_1, la quadrique Φ_1 correspond également aux plans ϖ_v, ϖ_u de (U_1) et (V_1) ; elle coïncide donc avec la quadrique Φ_1. De plus, le tétraèdre de Demoulin relatif à la surface $(\bar{x})$ est le même que celui relatif à la surface (x). Il en résulte que ce quadrilatère est commun aux quadriques Φ, Φ_1, $\overline{\Phi}$; elles appartiennent donc à un même faisceau. $\overline{\Phi}$ est donc de la forme $\Phi_1 + l\Phi$; elle doit passer par le point $\bar{x} = m + n$, dont les coordonnées locales sont (0, 1, 1, 0). On trouve ainsi

$$\overline{\Phi} \equiv z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2 - (\alpha + \beta)(z_1 z_4 + z_2 z_3) = a.$$

L'enveloppe des quadriques de Lie de (x) se compose de la surface (x) et de la quadrique Φ_1 ; celle des quadriques de Lie de la surface $(\bar{x})$, de la surface $(\bar{x})$ et de la quadrique Φ_1.

9. Appelons Σ_u les complexes linéaires contenant les courbes u de la surface (x), g_u les génératrices rectilignes de la quadrique Φ_1 représentées par les points de Q situés dans le plan ϖ_u, par Σ_v les complexes linéaires contenant les courbes v de la surface (x), par g_v les génératrices rectilignes de la quadrique Φ_1 représentées sur Q par les points appartenant au plan ϖ_v.

Les complexes Σ_u sont représentés par les hyperplans polaires des points U_1, c'est-à-dire par les hyperplans $UVV_1V_1^{10}V_1^{20}$. Par suite, les complexes Σ_u contiennent la demi-quadrique $|\,g_u\,|$.

De même, les complexes Σ_v sont représentés par les hyperplans polaires des points V_1, c'est-à-dire par les hyperplans $VUU_1U_1^{10}U_1^{20}$. Par conséquent, les complexes Σ_v contiennent la demi-quadrique $|\,g_v\,|$.

La surface $(\bar{x})$ possède les mêmes propriétés que la surface (x). Les courbes u de $(\bar{x})$ appartiennent aux complexes linéaires représentés par les hyperplans polaires des points $\bar{U}_1 \equiv U_1$; ils coïncident donc avec les complexes Σ_u. De même, les courbes v de $(\bar{x})$ appartiennent aux complexes Σ_v. De plus, $(\bar{x})$ est également une surface de Ribaucour.

Si (j) *est une congruence* W *dont l'image sur l'hyperquadrique de Klein est un réseau conjugué dont les transformés de Laplace dans les deux sens sont des courbes, les nappes focales sont des surfaces de Ribaucour dont les asymptotiques des deux modes appartiennent à des complexes linéaires, les asymptotiques homologues sur les deux surfaces appartenant au même complexe linéaire.*

Les complexes linéaires contenant les asymptotiques d'un mode contiennent les génératrices d'une demi-quadrique, ceux qui contiennent les asymptotiques de l'autre mode contiennent les génératrices de la demi-quadrique complémentaire. Le support commun à ces demi-quadriques fait partie de l'enveloppe des quadriques de Lie des deux nappes focales.

Il convient de rappeler ici que M. Terracini a établi que si les asymptotiques des deux modes d'une surface appartiennent à des complexes linéaires, ceux qui contiennent les asymptotiques d'un mode contiennent les génératrices d'une demi-quadrique et ceux qui contiennent les asymptotiques de l'autre mode, les génératrices de la demi-quadrique complémentaire (1).

10. Il nous reste à nous occuper des directrices de Wilczynski, droites qui sont représentées sur Q par les points de rencontre R, S de la droite U_1V_1 avec Q. On a précisément

$$R = U_1 + V_1, \quad S = U_1 - V_1.$$

On sait qu'au point R correspond la droite xy et au point S la droite mn. La droite xy est la première directrice de (x) et mm la seconde. La droite mn passe par $\bar{x} = m + n$, donc mn est la première directrice de Wilczynski de $(\bar{x})$ et xy la seconde. D'ailleurs, on voit facilement que xy se trouve dans le plan tangent à la surface $(\bar{x})$ en $\bar{x}$. On a en effet

$$2\bar{x}^{10} - \bar{x}(\log a)^{10} = 2(\alpha x + y),$$
$$2\bar{x}^{01} - \bar{x}(\log b)^{01} = 2(\beta x + y).$$

Les directrices de Wilczynski décrivent des congruences W, car on

$$R^{11} = 0, \quad S^{11} = 0.$$

Les foyers de ces droites se déterminent aisément. Définissons les quantités ξ, η par les relations

$$\xi^2 + \alpha = 0, \quad \eta^2 + \beta = 0.$$

(1) Voir TERRACINI, *Sulle superficie aventi un sistema, o entrambi, di asintotiche in complessi lineairi*. Appendice IV au traité de *Geometria proiettiva differenziale* de G. FUBINI et E. CECH. Tome II, pp. 771-782 (Bologna Zanichelli, 1927).

Les foyers de la droite xy sont

$$\xi\eta x + y, \qquad \xi\eta x - y$$

et ceux de la droite mn,

$$\eta m + \xi n, \ \ \eta m - \xi n.$$

11. Nous allons maintenant nous occuper de la congruence (i). Nous avons

$$\mathrm{I} = \mathrm{U} - \mathrm{V}, \quad \mathrm{I}_1 = \mathrm{I}^{01} = \mathrm{U}_1 + 4a\mathrm{U}, \quad \mathrm{I}_{-1} = \mathrm{I}^{10} = \mathrm{V}_1 + 4b\mathrm{V},$$

$$\mathrm{I}_2 = \mathrm{I}_1^{01} - \mathrm{I}(\log ab)^{01} = \mathrm{U}_1^{01} + \mathrm{U}_1\left(\log\frac{b}{a}\right)^{01},$$

$$\mathrm{I}_{-2} = \mathrm{I}_{-1}^{10} - \mathrm{I}_{-2}(\log ab)^{10} = \mathrm{V}_1^{10} + \mathrm{V}_1\left(\log\frac{a}{b}\right)^{10}.$$

Observons que l'on trouve

$$\mathrm{I}_2^{10} = 0, \qquad \mathrm{I}_{-2}^{01} = 0,$$

de sorte que I donne naissance à une suite de Laplace

$$\mathrm{I}_2,\ \mathrm{I}_1,\ \mathrm{I},\ \mathrm{I}_{-1},\ \mathrm{I}_{-2},$$

qui s'arrête aux points I_2, I_{-2} en présentant le cas de Laplace.

La courbe (I_2) appartient au plan ϖ_v et la courbe (I_{-2}) au plan ϖ_u.

Désignons par $(\bar{\bar{x}})$ la seconde surface focale de la congruence (i), par $\bar{\bar{\mathrm{U}}}$, $\bar{\bar{\mathrm{V}}}$ les points qui représentent les tangentes aux asymptotiques u, v de $(\bar{\bar{x}})$ en $\bar{\bar{x}}$. Les points $\bar{\bar{\bar{\mathrm{U}}}}$, $\bar{\bar{\bar{\mathrm{V}}}}$ sont consécutifs dans une suite de Laplace $\bar{\bar{\bar{\mathrm{L}}}}$

$$\ldots,\ \bar{\bar{\bar{\mathrm{U}}}}_2,\ \bar{\bar{\bar{\mathrm{U}}}}_1,\ \bar{\bar{\bar{\mathrm{U}}}},\ \bar{\bar{\bar{\mathrm{V}}}},\ \bar{\bar{\bar{\mathrm{V}}}}_1,\ \bar{\bar{\bar{\mathrm{V}}}}_2,\ \ldots \qquad (\bar{\bar{\bar{\mathrm{L}}}})$$

Considérons sur la surface $(\bar{\bar{\bar{\mathrm{U}}}}_1)$ une courbe u. Les tangentes aux courbes v aux points de cette courbe u doivent passer par I_2, car la suite $\mathrm{I}_2, \ldots, \mathrm{I}_{-2}$ est inscrite dans la suite $\bar{\bar{\bar{\mathrm{L}}}}$. Mais ce point est fixe lorsque u varie, donc les tangentes en question passent par le point I_2 qui ne dépend que de v et par conséquent la suite $\bar{\bar{\bar{\mathrm{L}}}}$ s'arrête au point $\bar{\bar{\bar{\mathrm{U}}}}_2 \equiv \mathrm{I}_2$ en présentant le cas de Laplace.

De même, la suite $\overline{\overline{L}}$ s'arrête au point $\overline{\overline{V}}_2 \equiv I_{-2}$ en présentent également le cas de Laplace. La courbe $(\overline{\overline{U}}_2)$ appartient au plan ϖ_v et la courbe $(\overline{\overline{V}}_2)$ au plan ϖ_u.

Si nous désignons par R_u la réglée lieu des tangentes aux courbes v aux points d'une courbe u et par R_v la réglée lieu des tangentes aux courbes u aux points d'une courbe v de la surface $(\bar{\bar{x}})$, les réglées R_u, R_v appartiennent respectivement aux complexes linéaires qui ont pour images les hyperplans $\overline{\overline{V}}\overline{\overline{V}}_1\overline{\overline{V}}_2\overline{\overline{V}}_2^{10}\overline{\overline{V}}_2^{20}$ polaires des points $\overline{\overline{U}}_2$ par rapport à Q et aux complexes linéaires qui ont pour images les hyperplans $\overline{\overline{U}}\overline{\overline{U}}_1\overline{\overline{U}}_2\overline{\overline{U}}_2^{01}\overline{\overline{U}}_2^{02}$ polaires des points $\overline{\overline{V}}_2$.

Le point $\bar{\bar{x}}$ appartient à la droite joignant le point x au point $m - n$. On trouve facilement

$$\bar{\bar{x}} = 4(a - b)x + m - n.$$

La quadrique de Lie $\overline{\overline{\Phi}}$ attachée au point $\bar{\bar{x}}$ est représentée par les sections de Q par les plans $\overline{\overline{U}}\overline{\overline{U}}_1\overline{\overline{U}}_2$, $\overline{\overline{V}}\overline{\overline{V}}_1\overline{\overline{V}}_2$. La quadrique $\overline{\overline{\Phi}}_1$ est représentée par les sections de Q par les plans $\overline{\overline{U}}_1\overline{\overline{U}}_2\overline{\overline{U}}_2^{01}$, $\overline{\overline{V}}_1\overline{\overline{V}}_2\overline{\overline{V}}_2^{10}$. Enfin la quadrique $\overline{\overline{\Phi}}_2$ est représentée par les sections de Q par les plans $U_2U_2^{01}U_2^{02}$, $V_2V_2^{10}V_2^{20}$, c'est-à-dire par les plans ϖ_v, ϖ_u, elle coïncide donc avec Φ_1.

A côté de la congruence (j), *il existe une seconde congruence* W *dont* (x) *est une nappe focale. La seconde nappe focale est une surface dont les réglées gauches asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires.*

Observons que la surface $(\bar{x})$ est surface focale d'une congruence $(\bar{i})$ dont la seconde surface focale est de même nature que la surface $(\bar{\bar{x}})$. La droite i est représentée sur Q par le conjugué harmonique $\bar{I}$ de $\bar{J}$ par rapport aux points $\bar{U}$, $\bar{V}$ sur la droite $\overline{UV}$.

Liége, le 18 novembre 1959.