Bulletin de la Classe des sciences

Note sur une transformation birationnelle de l'espace

Lucien Godeaux

Résumé

Construction d'une transformation birationnelle de l'espace en partant d'un système homaloïdal formé des surfaces cubiques passant par une quartique gauche de seconde espèce et touchant un plan en un point.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Note sur une transformation birationnelle de l'espace,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Construction d'une transformation birationnelle de l'espace en partant d'un système homaloïdal formé des surfaces cubiques passant par une quartique gauche de seconde espèce et touchant un plan en un point.

De nombreuses transformations birationnelles de l'espace ont été étudiées, mais dans la plupart des cas, les systèmes homaloïdaux de surfaces ne présentent pas de conditions de contact le long des courbes fondamentales ou aux points fondamentaux. Il convient cependant de signaler d'importantes recherches de M. Burniat (1) sur le cas où il y a contact en des points fondamentaux et aussi certaines recherches de M. Linsman (2).

Le but de cette note est l'étude d'une transformation birationnelle obtenue en partant d'un système homaloïdal dont les surfaces touchent un plan en un point fixe. La formation du second

(1) *Sur les points fondamentaux des transformations birationnelles de l'espace* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELG., 1932, pp. 223-233, 867-876, 923-936 ; 1933 pp. 163-178) ; *Sur les transformations birationnelles de l'espace ayant deux points fondamentaux associés isolés* (IDEM, 1934, pp. 753-766, 887-901 ; 1935, pp. 48-65).

(2) *Sur les transformations birationnelles de l'espace dépourvues de courbes fondamentales* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELG., 1933, pp. 1254-1262 ; 1934, pp. 222-233, 296-303) ; *Sur les points de contact d'un système homaloidal* (BULL. DE LA SOC. ROY. DES SCIENCES DE LIÈGE, 1935, pp. 54-56).

système homaloïdal présente un certain intérêt qu'il nous a paru intéressant de signaler [1].

1. Soient Γ_4 une quartique gauche de seconde espèce, Q la quadrique qui la contient. Considérons un point A n'appartenant pas à Q et un plan α passant par A et rencontrant Γ_4 en quatre points distincts.

Les surfaces cubiques devant contenir Γ_4 doivent passer par 13 points de cette courbe et sont donc en nombre ∞^6. Celles de ces surfaces qui passent par A et touchent en ce point le plan α forment un système linéaire triplement infini que nous désignerons par $|F|$.

Dans le système $|F|$, il y a une surface dégénérée $\alpha + Q$. D'autre part les surfaces F assujetties à toucher en A une droite n'appartenant pas à α ont un point double en A ; nous les désignerons par F_0. Elles forment un réseau $|F_0|$ et passent par les trois bisécantes a_1, a_2, a_3 de Γ_4 issues de A.

Nous allons montrer que $|F|$ est un système homaloïdal.

Considérons une surface $\overline{F}$ de $|F|$ et représentons-la point par point sur le plan σ, de manière qu'aux sections planes de $\overline{F}$ correspondent des cubiques passant par six points $O_1, O_2, \ldots, O_6$ (non situés sur une conique et dont trois ne sont jamais en ligne droite) et qu'à la courbe Γ_4 corresponde une courbe du sixième ordre γ_6 passant trois fois par O_1, O_2 et deux fois par O_3, O_4, O_5, O_6. Soit A' le point homologue de A.

Aux sections de $\overline{F}$ par les autres surfaces F correspondent des cubiques planes θ passant deux fois par A' et une fois par les points O_3, O_4, O_5, O_6. Les cubiques θ forment un réseau homaloïdal et par conséquent trois surfaces F n'appatenant pas à un même faisceau se rencontrent en un seul point variable avec les surfaces. Le système $|F|$ est donc homaloïdal.

A une courbe θ correspond sur la surface $\overline{F}$ une quintique rationnelle ayant un point double en A, les tangentes en ce point

[1] Au sujet des transformations birationnelles de l'espace, on peut consulter nos travaux : *Les transformations birationnelles de l'espace* (Mémorial des Sciences mathématiques, fasc. LXVII, Paris, Gauthier-Villars, 1935) ; *Géométrie algébrique*, tome I (Paris, Masson et Liège, Sciences et Lettres, 1948).

appartenant au plan α, et s'appuyant en dix points sur la courbe Γ_4. Deux surfaces de $|F|$ se rencontrent donc suivant une quintique C présentant les particularités précédentes. Dans l'intersection d'une courbe C et d'une surface F qui ne la contient pas, le point A compte pour quatre.

Deux surfaces F rencontrent le plan α suivant deux cubiques ayant un point double en A et passant par les quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 de rencontre de Γ_4 avec α. Elles ont encore en commun un point qui appartient à la courbe C commune aux deux surfaces.

2. Désignons par S_3 l'espace contenant $|F|$ et rapportons projectivement les surfaces F aux plans d'un second espace S'_3. Nous obtenons ainsi une transformation birationnelle T. Aux plans de S_3 correspondent dans S'_3 des surfaces F' du cinquième ordre et aux droites de S_3, des cubiques C'. Observons qu'une droite de S_3 n'appartient pas en général à une surface F, donc les cubiques C' sont en général gauches.

Pour déterminer les courbes-base du système homaloïdal $|F'|$, recherchons les surfaces fondamentales du système $|F|$.

Les génératrices rectilignes de Q trisécantes de la courbe Γ_4 sont fondamentales pour $|F|$ et à ces génératrices correspondent les points d'une conique Γ'_2 simple pour les surfaces F'.

Reprenons le réseau homaloïdal $|\theta|$ du plan σ rencontré plus haut. La droite $A'O_3$ est fondamentale pour ce réseau et il lui correspond sur $\overline{F}$ une conique δ s'appuyant en quatre points sur Γ_4 et passant par A. A la section de $\overline{F}$ par le plan α correspond dans σ une cubique $\bar{\gamma}_3$ passant par $O_1, O_2, \ldots, O_6$ et ayant un point double en A'. La droite $A'O_3$ ne rencontre pas $\bar{\gamma}_3$ en dehors de A', O_3 et par conséquent la conique δ touchent le plan α en A.

La conique δ n'est pas rencontrée en dehors de A et de Γ_4 par les surfaces F, donc elle est fondamentale pour $|F|$. Il lui correspond dans S'_3 un point, double pour les surfaces F'.

On peut reprendre le même raisonnement pour les droites $A'O_4$, $A'O_5$, $A'O_6$.

Considérons maintenant la conique δ' passant par A', O_3, O_4, O_5, O_6. Elle est fondamentale pour le réseau $|\theta|$ et il lui correspond sur $\overline{F}$ une conique δ rencontrant Γ_4 en quatre points et touchant α en A.

On voit donc que sur une surface F se trouvent cinq coniques fondamentales δ pour F et aux coniques δ situées sur les différentes surfaces F correspondent les points d'une quintique Γ'_5 double pour les surfaces F'.

Les courbes Γ'_2, F'_5 sont les seules courbes fondamentales, base du système $|F'|$, car l'intersection de deux surfaces F' se compose de Γ'_2, de Γ'_5 comptée quatre fois et d'une cubique C'.

Dans S_3 la quadrique Q et la surface Δ, lieu des coniques δ, forment la jacobienne de $|F|$. Celle ci est d'ordre six. De plus la surface Δ passe deux fois par Γ_4. Elle a un point multiple d'ordre quatre en A, le cône tangent étant formé du plan α et de la jacobienne du réseau des cônes tangents en A aux surfaces F_0, c'est-à-dire des plans a_2a_3, a_3a_1, a_1a_2.

3. Désignons par α' le plan qui correspond dans S'_3 à la surface $\alpha + Q$. Ce plan contient la conique Γ'_2.

Sur la surface $\alpha + Q$, les surfaces F découpent des quintiques C dégénérées en la section par le plan α de la surface F considérée et les deux trisécantes de Γ_4 s'appuyant, en dehors de A_1, A_2, A_3, A_4, sur cette section.

La surface $\alpha + Q$ contient cinq coniques δ, à savoir les coniques formées de la droite $AA_i (i = 1, 2, 3, 4)$ et de la trisécante de Γ_4 s'appuyant sur cette droite en un point distincts de A_i, et la conique déterminée par les points A, A_1, A_2, A_3, A_4. Aux quatre premières correspondent quatre points A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 communs aux courbes Γ'_5, Γ'_2. A la dernière correspond un point A' n'appartenant pas à Γ'_2, cinquième point d'intersection de Γ'_5 avec α'.

Désignons par φ les sections des surfaces F par le plan α ; ce sont des cubiques ayant un point double en A et passant par A_1, A_2, A_3, A_4 ; elles forment un réseau homaloïdal. Désignons par φ' les sections par le plan α', en dehors de Γ'_2, des surfaces F'. Ce sont également des cubiques ayant un point double en A' et passant par A'_1, A'_2, A'_3, A'_4. Elles forment donc un réseau homaloïdal et par conséquent il existe une surface F' dont le plan α' fait partie, car autrement les courbes φ' seraient en nombre ∞^3.

Entre les plans α, α', T détermine une correspondante birationnelle qui fait correspondre aux droites de α les cubiques φ' et aux droites de α', les cubiques φ.

4. Considérons une surface $\overline{F}_0$ de $|F_0|$, surface possédant un point double en A et passant par les droites a_1, a_2, a_3, cordes de Γ_4 passant par A.

Projetons $\overline{F}_0$ de A sur un plan σ et soient O_1, O_2, O_3 les intersections de a_1, a_2, a_3 avec σ. Aux sections planes de $\overline{F}_0$ correspondent dans σ des cubiques γ_3 passant par O_1, O_2, O_3 et par trois autres points O_4, O_5, O_6. Ces six points sont sur une conique γ_2 représentant le domaine de A sur $\overline{F}_0$. Observons qu'il n'y a que deux des droites AO_4, AO_5, AO_6, par exemple les deux premières, qui rencontrent Γ_4, donc à cette courbe correspond dans σ une quartique γ_4 ayant des points doubles en O_1, O_2, O_3, des points simples en O_4, O_5, mais ne passant pas par O_6.

A la section de $\overline{F}_0$ par le plan α correspond dans σ une droite r rencontrant γ_2 en deux points R_1, R_2, images des points de la section infiniment voisins de A.

Aux sections de la surface $\overline{F}_0$ par les surfaces F correspondent dans σ des cubiques θ passant deux fois par O_6, une fois par O_4, O_5, R_1, R_2 et formant donc un réseau homaloïdal $|\theta|$. En particulier, lorsque la surface F est une surface F_0, les cubiques θ comprennent comme partie la conique γ_2 et sont complétées par les droites passant par O_6.

Aux surfaces F_0 correspondent dans S_3' les plans d'une gerbe de sommet A_0'.

Les droites O_4O_6, O_5O_6 représentent les deux trisécantes de Γ_4 appartenant à la surface $\overline{F}_0$. Aux droites O_6R_1, O_6R_2 correspondent sur $\overline{F}_0$ des coniques δ s'appuyant en quatre points sur Γ_4 et touchant le plan α en A. On en conclut que le plan de S_3' homologue de $\overline{F}_0$ ne rencontre plus Γ_5' qu'en deux points en dehors de A_0' et que ce point est donc triple pour cette courbe.

5. Si nous considérons la section de $\overline{F}_0$ par une autre surface F_0 ; elle comprend, en dehors de Γ_4, les droites a_1, a_2, a_3 et une conique Ψ représentée dans σ par une droite passant par O_6. Cette conique Ψ s'appuie en quatre points sur Γ_4, passe par A en y ayant comme tangente la quatrième droite s commune aux cônes tangents en A à $\overline{F}_0$ et à la seconde surface F_0 considérée Elle rencontre encore α en un second point commun aux sections des surfaces F_0 considérées en dehors de A, A_1, A_2, A_3, A_4. L'ensemble des droites a_1, a_2, a_3 et de la conique Ψ est une courbe C.

A la conique Ψ, T fait correspondre une droite s' passant par A'_0. La transformation T induit donc entre les gerbes de sommets A et A'_0 une transformation birationnelle T' faisant correspondre à la droite s la droite s'.

A la surface $\overline{F}_0$ correspond un plan β' passant par A'_0 ; aux coniques Ψ se trouvant sur $\overline{F}_0$ (et formant un faisceau) correspondent les droites s' du faisceau (A'_0, β'). Les tangentes s aux coniques Ψ appartiennent au cône tangent à $\overline{F}_0$ en A. On en conclut qu'aux cônes du second ordre passant par a_1, a_2, a_3, T' fait correspondre les plans passant par A'_0. Donc T' est une transformation quadratique.

Une droite s passant par A est rencontrée en deux points par les surfaces F, en dehors de A, dont T fait correspondre à s une conique Ψ' passant par A'_0 et touchant en ce point la droite s' que T' fait correspondre à s. La conique Ψ' se trouve dans le plan que T fait correspondre à l'unique surface F_0 contenant la droite s.

Supposons que la surface $\overline{F}_0$ soit tangente en A au plan a_2a_3. Le cône tangent en A se décompose en ce plan et en un plan passant par a_1. Si l'on prend la représentation sur le plan σ, la conique γ_2 est décomposée en deux droites, l'une contenant les points O_1, O_2, O_6, l'autre les points O_3, O_4, O_5. Le point R_1 appartient à la première droite, le point R_2 à la seconde. Il n'existe donc plus sur la surface $\overline{F}_0$ qu'une conique δ, représentée dans σ par la droite O_6R_2. Aux ∞^1 surfaces F_0 tangentes en A au plan a_2a_3 correspondent les plans passant par la droite a'_1 et ces plans ne rencontrent plus Γ'_5 qu'en un seul point variable. Par conséquent, la droite a'_1 est tangente en A'_0 à la courbe Γ'_5.

On peut faire le même raisonnement en partant des plans a_3a_1, a_1a_2 et l'on voit que les droites fondamentales a'_1, a'_2, a'_3 de la transformation T' dans la gerbe de sommet A'_0 sont tangentes en ce point à la courbe Γ'_5.

6. La conique Ψ correspondant à une droite s' passant par A'_0 rencontre un plan de S_3 en deux points, donc cette droite s' rencontre une surface F' en deux points en dehors de A'_0 et ce point est donc triple pour les surfaces F'.

Une conique Ψ est l'intersection de deux surfaces F_0 et touche en A la droite s commune aux cônes tangents en A aux deux surfaces, en dehors de a_1, a_2, a_3. La droite s peut appartenir au plan α et dans ce cas, la conique Ψ devient une conique δ. A cette conique correspond un point P' de Γ'_5 appartenant à la droite s'. Dans ces conditions, le lieu de la droite s' lorsque s décrit le faisceau (A, α) est le cône Q' projetant Γ'_5 de A'_0. Ce point étant triple pour Γ'_5, le cône Q' est du second ordre.

Au point du plan α infiniment voisin de A sur la droite s considérée correspondent les points de la droite s'. On retrouve ainsi la justification du fait que les surfaces F touchent le plan α en A.

Les génératrices du cône Q' ne rencontrent plus les surfaces F' en dehors de Γ'_5, ces droites sont donc fondamentales pour le système $|F'|$.

Au plan α correspond dans S'_3 une surface du cinquième ordre contenant α' comme partie et complétée par une surface du quatrième ordre passant doublement par δ'_5. Cette surface du quatrième ordre contient le cône Q' et est par conséquent le cône Q' compté deux fois.

On observera que dans la transformation induite par T entre les plans α et α', au domaine du point A correspond la conique déterminée par les points A, A_1, A_2, A_3, A_4. Cette conique est précisément l'intersection du plan α et du cône Q'.

Dans la transformation T' entre les gerbes de sommets A, A'_0, le cône Q' correspond évidemment au plan α.

7. Les droites g' s'appuyant en deux points distincts sur Γ'_5 et en un point sur Γ'_2 sont fondamentales pour le système $|F'|$.

Les droites s'appuyant en deux points distincts sur Γ'_5 et sur une droite d' engendrent une surface d'ordre treize passant trois fois par d' et quatre fois par Γ'_5. Cette surface rencontre la conique Γ'_2, en dehors des points d'appui de Γ'_5 sur $F\Gamma'_2$, en dix points. Donc la surface Δ', lieu des droites g', est du dixième ordre ; elle passe quatre fois par Γ'_5 et trois fois par Γ'_2. Le restant de l'intersection de Δ' avec le plan α' est formé des quatre droites passant par A' et respectivement par A'_1, A'_2, A'_3, A'_4.

A une droite g' correspond dans S_3 une courbe C formée de deux coniques δ et d'une trisécante de Γ_4.

Considérons un point P de Γ_4. Par ce point passe une trisécante g de Γ_4 et deux coniques δ, puisque Γ_4 est double pour Δ. Les surfaces F passant par g forment un réseau et touchent en P la quadrique Q. Il existe donc un faisceau de surfaces F ayant un point double en P. La base de ce faisceau, en dehors de Γ_4, est constituée par la droite g et par les deux coniques δ passant par P. Aux surfaces F considérées correspondent les plans passant par une génératrice g' de Δ' et les points de cette génératrice représentent les points infiniment voisins de P.

La surface Δ' est la surface fondamentale associée à la courbe fondamentale Γ_4 et l'ordre de Δ' est bien égal au nombre, dix, des points d'appui des courbes C sur Γ_4.

8. Une droite de S_3 rencontrant Q en deux points et Δ en six points, la courbe C' qui lui correspond s'appuie en deux points sur Γ'_2 et en six points sur Γ'_5. Les courbes C' étant des cubiques gauches et devant dépendre de quatre paramètres ne sont pas assujetties à d'autre condition. En particulier, elles ne passent pas par A'_0 et par suite aux points infiniment voisins de A'_0 correspondent dans S_3 les points d'une courbe.

Soient P un point de a_1 et ϖ un plan passant par cette droite. Il existe un faisceau de surfaces F_0 touchant ϖ en P. A ces surfaces correspondent les plans passant par une droite p' et aux points infiniment voisins de P situés dans le plan ϖ correspondent les points de p'. La droite p' n'est autre que la droite du plan $a'_2a'_3$, passant par A'_0, que T' fait correspondre au plan ϖ. Il en résulte que, lorsque P variant sur a_1, aux points infiniment voisins de a_1 correspondent les points infiniment voisins de A'_0 dans le plan $a'_2a'_3$.

De même, aux points infiniment voisins de a_2 (ou de a_3) correspondent les points infiniment voisins de A'_0 situés dans le plan $a'_3a'_1$ (ou dans le plan $a'_1a'_2$).

On en conclut que les surfaces F' ont en A'_0 un point triple triplanaire, les plans tangents étant les faces du trièdre d'arêtes a'_1, a'_2, a'_3.

Aux plans passant par A correspondent dans S'_3 des surfaces F' contenant comme partie fixe le cône Q'. La partie variable est une surface cubique ayant un point double en A'_0. Le cône tangent en ce point à cette surface est le cône que T′ fait correspondre au plan considéré ; ce cône passe par les droites a'_1, a'_2, a'_3.

La jacobienne de $|F'|$ est formée des surfaces Δ' et Q′. C'est une surface d'ordre seize passant sept fois par Γ'_2 et trois fois par Γ'_5. Si l'on défalque de cette surface la composante Δ', il reste une surface du sixième ordre ne passant plus par Γ'_2 mais passant trois fois par Γ'_5. Cette surface est formée par le cône Q′ compté trois fois.

La jacobienne du système $|F'|$ est formée de la surface Δ' et du cône Q′ compté trois fois.

Liège, le 23 avril 1959.