Bulletin de la Classe des sciences

Note sur les surfaces de genres zéro possédant un réseau irréductible de courbes bicanoniques (troisième communication)

Lucien Godeaux

Résumé
On démontre que les surfaces envisagées appartiennent à trois types dont on donne les caractéristiques.

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Note sur les surfaces de genres zéro possédant un réseau irréductible de courbes bicanoniques,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.
(Troisième communication).

Résumé. — On démontre que les surfaces envisagées appartiennent à trois types dont on donne les caractéristiques.

Dans cette troisième communication [1] nous considérons en premier lieu le cas où une courbe six-canonique est formée d'une part par deux courbes bicanoniques dont l'une est comptée deux fois et d'autre part par deux courbes tricanoniques. Cette hypothèse implique l'existence sur la surface de quatre courbes isolées. Nous démontrons que ce cas ne peut se présenter que si la courbe bicanonique qui intervient une fois dans la courbe six-canonique envisagée est formée par une courbe comptée deux fois.

Nous retournons ensuite aux différentes surfaces rencontrées dans notre première note. Après avoir montré qu'il ne peut exister sur ces surfaces une infinité de courbes six-canoniques formée de trois courbes bicanoniques et de deux courbes tricanoniques, nous constatons qu'il existe trois catégories de surfaces. Sur chacune de ces surfaces il existe une courbe isolée Γ, de genre trois et de degré deux, telle que 2Γ soit une courbe bicanonique, $\Gamma + \Gamma'$ des courbes tricanoniques et $2\Gamma'$ des courbes tétracanoniques. Les surfaces des deux premières catégories contiennent en outre soit six courbes de genre trois et de degré deux, soit deux courbes de même caractères.

[1] Les deux premières communications ont paru dans le BULLETIN DE L'ACADÉMIE, 1959, pp. 52-58, 59-68.

L'existence des surfaces des trois catégories est démontrée par l'exemple que nous avons construit autrefois [1].

1. Soit F une surface algébrique de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 3$ possédant un réseau irréductible de courbes bicanoniques C_2. Nous supposerons qu'il existe sur F une courbe six-canonique formée à la fois de trois courbes bicanoniques C_2 et de deux courbes tricanoniques C_3 de la manière suivante : Il existe sur F quatre courbes Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 telles que les courbes $\Gamma_1 + \Gamma_2$, $\Gamma_3 + \Gamma_4$ soient des courbes bicanoniques et $2\Gamma_1 + \Gamma_3$, $2\Gamma_2 + \Gamma_4$ des courbes tricanoniques, la courbe six-canonique C_6 étant $2(\Gamma_1 + \Gamma_2) + \Gamma_3 + \Gamma_4$.

Le système tricanonique $|C_3|$ étant l'adjoint au système bicanonique $|C_2|$, on a

$$\Gamma_1' = \Gamma_2 + \Gamma_4, \quad \Gamma_2' = \Gamma_1 + \Gamma_3, \quad \Gamma_3' = 2\Gamma_2, \quad \Gamma_4' = 2\Gamma_1.$$

Si nous désignons par π_i le genre de Γ_i (supérieur à zéro puisque le système adjoint existe), par n_{ii} son degré et par n_{ik} le nombre de points communs aux courbes Γ_i, Γ_k, nous avons

$$\begin{gathered} 2\pi_1 - 2 = n_{12} + n_{14}, \quad 2\pi_2 - 2 = n_{12} + n_{13}, \\ 2\pi_3 - 2 = 2n_{23}, \quad 2\pi_4 - 2 = 2n_{14}. \end{gathered} \tag{1}$$

De plus, le système bicanonique $|C_2|$ ayant le genre sept et le degré huit, on a

$$\begin{aligned} &\pi_1 + \pi_2 + n_{12} = 8 &&\pi_3 + \pi_4 + n_{34} = 8, \\ &n_{11} + n_{22} + 2n_{12} = 8, &&n_{33} + n_{44} + 2n_{34} = 8. \end{aligned} \tag{2}$$

2. Le système $|\Gamma_1'|$ ne peut contenir le système $|C_2|$ comme partie, car alors le système canonique $|\Gamma_1' - \Gamma_1|$ existerait. Il en résulte que les courbes C_2 découpent, sur la courbe Γ_1, une série linéaire non spéciale, d'ordre $n_{11} + n_{12}$ et de dimension $n_{11} + n_{12} - \pi_1$. Les courbes C_2 passant par $n_{11} + n_{12} - \pi_1 + 1$ points de Γ_1 contiennent cette courbe et sont complétées par les courbes Γ_2.

[1] *Sur la construction des surfaces non rationnelles de genres zéro* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1919, pp. 688-693).

Le système $|C_2|$ ayant la dimension deux et en désignant par r_2 la dimension de $|\Gamma_2|$, on a donc

$$2 - (n_{11} + n_{12} - \pi_1 + 1) = r_2,$$

c'est-à-dire

$$n_{11} + n_{12} = \pi_1 + 1 - r_2.$$

Pour la même raison, on a

$$n_{12} + n_{22} = \pi_2 + 1 - r_1.$$

En additionnant ces relations membre à membre et en tenant compte des relations (2), on a

$$n_{12} = 2 - (r_1 + r_2).$$

Le réseau $|C_2|$ étant irréductible, les courbes Γ_1, Γ_2 ne peuvent toutes deux appartenir à des faisceaux ; l'une, par exemple Γ_1, est isolée, l'autre Γ_2 pouvant être isolée ou appartenir à un faisceau. On a donc $r_1 = r_2 = 0$ ou $r_1 = 0$, $r_2 = 1$.

Plaçons-nous dans cette dernière hypothèse ; on a alors $n_{12} = 1$. Les courbes Γ_2 coupent la courbe Γ_1 en un seul point, nécessairement fixe, puisque Γ_1 n'est pas rationnelle. Il en résulte qu'il existe une courbe Γ_2 contenant Γ_1 comme partie. Supposons que l'on ait $\Gamma_2 \equiv \Gamma_1 + X$. Alors $C_2 \equiv 2\Gamma_1 + X$, d'où l'on déduit

$$\Gamma_1' + \Gamma_1 + X \equiv 2\Gamma_2 + \Gamma_4 \equiv 2\Gamma_1 + 2X + \Gamma_4,$$
$$\Gamma_1' - \Gamma_1 \equiv \Gamma_4 + X$$

et la surface aurait une courbe canonique d'où $p_g \geqslant 1$, contrairement à l'hypothèse.

Les courbes Γ_1, Γ_2 sont donc isolées. On a alors

$$n_{12} = 2, \qquad n_{11} = \pi_1 - 1, \qquad n_{22} = \pi_2 - 1.$$

D'une manière analogue, on établit que les courbes Γ_3, Γ_4 sont isolées et que l'on a

$$n_{34} = 2, \qquad n_{33} = \pi_3 - 1, \qquad n_{44} = \pi_4 - 1.$$

3. Considérons les intersections des courbes bicanoniques et tricanoniques données successivement avec Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4. Nous avons

$$n_{11} + n_{12} = n_{13} + n_{14}, \qquad n_{12} + n_{22} = n_{23} + n_{24},$$
$$n_{13} + n_{23} = n_{33} + n_{34}, \qquad n_{14} + n_{24} = n_{34} + n_{44},$$
$$2n_{11} + n_{13} = 2n_{12} + n_{14}, \qquad 2n_{12} + n_{23} = 2n_{22} + n_{24},$$
$$2n_{13} + n_{33} = 2n_{23} + n_{34}, \qquad 2n_{14} + n_{34} = 2n_{24} + n_{44},$$

qui deviennent actuellement

$$\pi_1 + 1 = n_{13} + n_{14}, \qquad \pi_2 + 1 = n_{23} + n_{24},$$
$$\pi_3 + 1 = n_{13} + n_{23}, \qquad \pi_4 + 1 = n_{14} + n_{14},$$
$$2\pi_1 + n_{13} = n_{14} + 6, \qquad 2\pi_2 + n_{24} = n_{23} + 6,$$
$$\pi_3 + 2n_{13} = 2n_{23} + 3, \qquad \pi_4 + 2n_{24} = 2n_{14} + 3.$$

A ces équations, il faut ajouter les équations (1) qui sont actuellement

$$2\pi_1 = n_{14} + 4,\ 2\pi_2 = n_{23} + 4,\ \pi_3 = n_{23} + 1,\ \pi_4 = n_{14} + 1.$$

On en déduit

$$n_{ii} = 2, \qquad n_{ik} = 2, \qquad \pi_i = 3.$$

Les quatre courbes Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 sont isolées, de genre trois, de degré deux et se rencontrent deux à deux en deux points.

4. Les courbes Γ'_1 découpent sur Γ_1 la série canonique complète et comme $|\Gamma'_1|$ ne peut contenir Γ_1, $|\Gamma'_1|$ est un réseau.

Sur la courbe Γ_2, les courbes Γ'_1 découpent une série d'ordre quatre, non spéciale, donc de dimension un. Par conséquent, il existe une courbe Γ'_1 qui contient la courbe Γ_2 et qui est complétée par une courbe isolée qui n'est autre que Γ_4. Le même raisonnement peut être répété en partant des systèmes $|\Gamma'_1|$, $|\Gamma'_2|$, $|\Gamma'_3|$, $|\Gamma'_4|$ vis-à-vis des courbes Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4. Nous poserons

$$\Gamma'_1 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_4, \qquad \Gamma'_1 \equiv \Gamma_3 + X_{13}, \qquad \Gamma'_1 \equiv \Gamma_4 + \Gamma_2,$$
$$\Gamma'_2 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_3, \qquad \Gamma'_2 \equiv \Gamma_3 + \Gamma_1, \qquad \Gamma'_2 \equiv \Gamma_4 + X_{24},$$
$$\Gamma'_3 \equiv \Gamma_1 + X_{31}, \qquad \Gamma'_3 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_2, \qquad \Gamma'_3 \equiv \Gamma_4 + X_{34},$$
$$\Gamma'_4 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_1, \qquad \Gamma'_4 \equiv \Gamma_2 + X_{42}, \qquad \Gamma'_4 \equiv \Gamma_3 + X_{43}.$$

On a

$$\Gamma''_1 \equiv \Gamma'_3 + X_{13} \equiv 2\Gamma_2 + X_{13} \equiv \Gamma_1 + C_2 \equiv 2\Gamma_1 + \Gamma_2,$$

d'où l'on déduit

$$X_{13} + \Gamma_2 \equiv 2\Gamma_1.$$

On obtiendra de même

$$X_{24} + \Gamma_1 \equiv 2\Gamma_2, \quad X_{31} + \Gamma_2 \equiv 2\Gamma_3, \quad X_{31} + \Gamma_4 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_3,$$
$$X_{34} + \Gamma_1 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_3, \quad X_{42} + \Gamma_1 \equiv 2\Gamma_4, \quad X_{42} + \Gamma_3 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_4,$$
$$X_{43} + \Gamma_2 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_4.$$

5. Observons que l'on a

$$X_{13} + X_{24} \equiv C_2, \quad X'_{13} \equiv \Gamma_1 + \Gamma_4, \quad X'_{24} \equiv \Gamma_2 + \Gamma_3,$$
$$X'_{13} + X_{24} \equiv X'_{24} + X_{13} \equiv C_3, \quad X'_{13} + X'_{24} \equiv 2C_2 \equiv C_4.$$

Comme nous l'avons montré dans notre première communication, cela n'est possible que si X_{13} et X_{24} coïncident en une courbe que nous appellerons Γ.

On a de même

$$X_{32} + X_{42} \equiv C_2, \quad X'_{31} \equiv \Gamma_2 + \Gamma_3, \quad X'_{42} \equiv \Gamma_1 + \Gamma_4,$$
$$X'_{31} + X_{42} \equiv X'_{42} + X_{31} \equiv C_3, \quad X'_{31} + X'_{42} \equiv C_4.$$

Par conséquent, les courbes X_{31} et X_{42} coïncident en une courbe qui sera appelée $\overline{\Gamma}$.

Observons que l'on a

$$\overline{\Gamma}' \equiv \Gamma_1 + \Gamma_4 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_3 \equiv \Gamma',$$

donc Γ et $\overline{\Gamma}$ coïncident et on a

$$\Gamma'_1 \equiv \Gamma_3 + \Gamma, \quad \Gamma'_2 \equiv \Gamma_4 + \Gamma, \quad \Gamma'_3 \equiv \Gamma_1 + \Gamma, \quad \Gamma'_4 \equiv \Gamma_1 + \Gamma,$$
$$\Gamma' \equiv \Gamma_1 + \Gamma_4 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_3,$$
$$\Gamma + \Gamma_1 \equiv 2\Gamma_2 \equiv 2\Gamma_4, \quad \Gamma + \Gamma_2 \equiv 2\Gamma_1 \equiv 2\Gamma_3, \quad \Gamma + \Gamma_3 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_4,$$
$$\Gamma + \Gamma_4 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_3.$$

6. Considérons maintenant les courbes X_{34} et X_{43}. On a

$$X_{34} + X_{43} \equiv C_2, \quad X'_{34} \equiv 2\Gamma_3, \quad X'_{43} \equiv 2\Gamma_4,$$
$$X'_{34} + X_{43} \equiv X'_{43} + X_{34} \equiv C_3, \quad X'_{34} + X'_{43} \equiv C_4.$$

On en conclut que les courbes X_{34} et X_{43} coïncident en une courbe que nous appellerons Γ_0 et qui satisfait aux relations fonctionnelles

$$\Gamma_0 + \Gamma_1 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_3, \quad \Gamma_0 + \Gamma_2 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_4.$$

Mais on a $\Gamma_2 + \Gamma_3 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_4 \equiv \Gamma'$, donc les relations entraînent $\Gamma_1 \equiv \Gamma_2$, contrairement à l'hypothèse que ces courbes sont distinctes.

Ainsi donc, le cas où il existe *quatre* courbes distinctes Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 telles que

$$C_2 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2 \equiv \Gamma_3 + \Gamma_4 \qquad C_3 \equiv 2\Gamma_1 + \Gamma_3 \equiv 2\Gamma_2 + \Gamma_4.$$

ne peut se présenter.

Il importe de remarquer que ceci suppose l'existence de quatre courbes Γ et non d'un nombre supérieur. Si l'on suppose qu'il existe plus de quatre courbes, on retombe dans l'hypothèse examinée dans notre deuxième communication.

7. Il nous reste à examiner un cas qui apparaît comme un cas limite du précédent, lorsque l'on suppose que les courbes Γ_3, Γ_4 sont confondues.

Supposons donc, en modifiant légèrement nos notations, que les courbes Γ_3, Γ_4 soient confondues en une courbe Γ et que l'on ait

$$C_2 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2 \equiv 2\Gamma, \quad C_3 \equiv 2\Gamma_1 + \Gamma \equiv 2\Gamma_2 + \Gamma,$$
$$C_6 = 2(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma).$$

Observons tout de suite que :

a) La courbe Γ est isolée, car si elle décrivait un faisceau, le système bicanonique serait composé au moyen de ce faisceau et serait donc réductible.

b) La courbe $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma$ n'est pas une courbe tricanonique, car autrement on aurait

$$\Gamma_1' \equiv \Gamma_1 + \Gamma, \quad \Gamma_1' - \Gamma_1 \equiv \Gamma$$

et la surface posséderait une courbe canonique.

Cela étant, on a

$$\Gamma_1' \equiv \Gamma_2 + \Gamma, \quad \Gamma_2' \equiv \Gamma_1 + \Gamma, \quad \Gamma' \equiv 2\Gamma_1 \equiv 2\Gamma_2.$$

En répétant les raisonnements faits plus haut, on voit que les courbes Γ_1, Γ_2 sont isolées, que les courbes Γ, Γ_1, Γ_2 sont de genre trois et de degré deux, enfin qu'elles se coupent deux à deux en deux points.

On a d'ailleurs

$$\Gamma + \Gamma' \equiv C_3, \quad 2\Gamma' \equiv 2(\Gamma_1 + \Gamma_2) \equiv 2C_2 \equiv C_4.$$

Observons que l'on a

$$C_4 \equiv 4\Gamma \equiv 2\Gamma_1 + 2\Gamma_2 \equiv 4\Gamma_1 \equiv 4\Gamma_2,$$

donc le diviseur de Severi σ de la surface est multiple de quatre.

* * *

8. Dans notre première communication, nous avons vu que trois cas pouvaient se présenter :

1) La surface tricanonique F appartient à deux hyperquadriques et il existe une simple infinité de courbes six-canoniques dégénérées d'une part en trois courbes bicanoniques et d'autre part en deux courbes tricanoniques.

2) La surface F appartient à trois hyperquadriques et il existe un nombre fini de courbe six-canoniques dégénérées comme il vient d'être indiqué.

3) La surface F appartient à quatre hyperquadriques.

Dans tous les cas, il existe sur la surface une courbe Γ, de genre trois et de degré deux, telle que 2Γ soit une courbe bicanonique, $\Gamma + \Gamma'$ des courbes tricanoniques et $2\Gamma'$ des courbes tétracanoniques.

Examinons le premier cas. Il doit exister une infinité de courbes Γ_1 et de courbes Γ_2 telles que $\Gamma_1 + \Gamma_2 \equiv C_2$ D'après ce qu'on a vu, les courbes Γ_1, Γ_2 ne peuvent engendrer des faisceaux ; elles engendrent donc deux systèmes continus $\{\Gamma_1\}$, $\{\Gamma_2\}$. Ces systèmes ont le genre trois et le degré deux, une courbe Γ_1

coupe une courbe Γ_2 en deux points. Il en résulte qu'il y aurait ∞^2 courbes C_2 réductibles, contrairement à l'hypothèse. Le premier cas ne peut donc se présenter.

9. Comme on l'a vu, la courbe Γ, tracée sur la surface tricanonique F, est d'ordre six et appartient à un espace linéaire S_3 à trois dimensions. Les hyperquadriques touchant la surface F le long de la courbe Γ doivent découper sur F des courbes $\overline{C}_4$ et elles doivent être en nombre ∞^9 (y compris celles qui passent par F).

Deux cas peuvent se présenter :

a) La courbe Γ n'appartient pas à une quadrique. Alors, les hyperquadriques touchant F le long de Γ contiennent l'espace S_3 de cette courbe. Les hyperquadriques touchant F le long de Γ et qui ne contiennent pas F sont des cônes ayant pour sommet l'espace S_3. Ces cônes sont en nombres ∞^5, donc F appartient à quatre hyperquadriques linéairement indépendantes.

b) La courbe Γ appartient à une quadrique Q de S_3. Elle rencontre alors les génératrices rectilignes d un mode en quatre points et celle de l'autre mode en deux points. Parmi les hyperquadriques touchant F le long de Γ et ne contenant pas F, il y en a une au moins qui n'est pas un cône de sommet S_3. On en conclut que la surface F appartient à trois hyperquadriques linéairement indépendantes et les hyperquadriques touchant F le long de Γ sont ∞^6.

10. En résumé : *La surface* F, *de genres* $p_a = p_g = 0$ *possédant un réseau irréductible de courbes bicanoniques, appartient à l'une des catégories suivantes :*

1) *La surface contient sept courbes* Γ, Γ_1, Γ_2, ..., Γ_6 *de genre trois et de degré deux, se rencontrant deux à deux en deux points. Les courbes* 2Γ, $\Gamma_1 + \Gamma_2$, $\Gamma_3 + \Gamma_4$, $\Gamma_5 + \Gamma_6$ *sont des courbes bicanoniques, les courbes* $\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_5$; $\Gamma_2 + \Gamma_4 + \Gamma_6$, $\Gamma + \Gamma'$ *des courbes tricanoniques et les courbes* $2\Gamma'$ *des courbes tétracanoniques.*

2) *La surface contient trois courbes* Γ, Γ_1, Γ_2 *de genre trois et de degré deux, se rencontrant deux à deux en deux points. Les courbes*

2Γ, $\Gamma_1 + \Gamma_2$ sont des courbes bicanoniques, $\Gamma + 2\Gamma_1$, $\Gamma + 2\Gamma_2$, $\Gamma + \Gamma'$ des courbes tricanoniques et $2\Gamma'$ des courbes tétracanoniques.

3) *La surface* F *contient une courbe Γ de genre trois et de degré deux telle que 2Γ soit une courbe bicanoniques, $\Gamma + \Gamma'$ des courbes tricanoniques et $2\Gamma'$ des courbes tétracanoniques.*

Dans les deux premiers cas, le modèle tricanonique de la surface appartient à trois hyperquadriques linéairement indépendantes ; dans le dernier cas, il appartient à quatre hyperquadriques linéairement indépendantes.

11. Comme nous l'avons indiqué plus haut, nous avons construit un exemple d'une surface F de la première catégorie, Cette surface est l'image d'une involution cyclique d'ordre huit. privée de points unis, appartenant à une surface Φ de genres $p_a = p_g = 7$, $p^{(1)} = 17$, $P_2 = 24$. Si T est la transformation birationnelle de Φ en soi génératrice de l'involution, l'image Φ' de l'involution du second ordre engendrée par T^4 a les genres $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 9$, $P_2 = 12$. La surface Φ' contient une involution cyclique d'ordre quatre, privée de points unis, dont l'image est la surface F qui apparait ici comme surface de seconde catégorie.

De même, la surface Φ'', image de l'involution du quatrième ordre engendrée sur Φ par T^2, a les genres $p_a = p_g = 1$, $p^{(1)} = 5$, $P_2 = 6$; elle contient une involution du second ordre, privée de points unis, dont F est l'image. Cette surface apparaît actuellement comme surface de la troisième catégorie.

Il reste à montrer qu'il existe des surfaces des deux premières catégories qui ne sont pas en même temps de la première catégorie.

Liège, le 9 février 1959.