Bulletin de la Classe des sciences

Observation sur les involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique

Lucien Godeaux

Résumé
Observation sur les surfaces algébriques contenant une involution n'ayant qu'un nombre fini de points unis, non engendrée par des transformations birationnelles de la surface en soi.

Observation sur les involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Observation sur les surfaces algébriques contenant une involution n'ayant qu'un nombre fini de points unis, non engendrée par des transformations birationnelles de la surface en soi.

Dans leur *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (1), F. Enriques et M. F. Severi ont utilisé la propriété suivante : Une involution n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface de Picard ou de Jacobi, est engendrée par un groupe de transformations birationnelles de la surface en soi. Le raisonnement par lequel ils établissaient cette propriété nous avait paru susceptible d'être étendu aux surfaces algébriques quelconques (2). Cependant, dès 1926, nous avions pensé à un contre-exemple. Il peut exister, sur une courbe algébrique C, une involution dépourvue de points unis, non engendrée par un groupe de transformation birationnelle de la courbe C en soi (3). Si l'on considère la surface représentant les couples de points

(1) Acta Mathematica, 1909, t. 32, pp. 283-392, t. 33, pp. 321-403. Voir t. 32, pp. 331-338.

(2) *Sur les involutions douées d'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1° sem 1914, pp. 408-413).

(3) A notre demande, A. Comessatti, auquel on doit de profondes recherches sur les involutions appartenant à une courbe algébrique, a donné la construction des involutions dont il est question ici. Sa lettre a été publiée. Voir A. Comessatti, *Sur les involutions dépourvues de points unis appartenant à une courbe algébrique* (Bulletin de la Société roy. des Sciences de Liège, 1937, pp. 178-180).

de la courbe C et d'une seconde courbe algébrique C′ (produit des courbes C, C′), il existe sur cette surface une involution privée de points unis qui ne satisfait pas à la propriété en question. Nous avons repris l'examen du raisonnement conduisant à cette propriété et sommes arrivés à la conclusion suivante : La propriété est exacte si l'on peut trouver sur la surface des courbes qui ne contiennent aucun couple de points appartenant à un même groupe de l'involution. L'existence de telles courbes est peu probable. Nous croyons cependant que s'il y a des points unis, la structure de ceux-ci peut permettre d'établir, dans certains cas, la propriété envisagée.

Pour plus de simplicité, nous raisonnons en supposant la surface régulière. Comme nous le montrons ensuite, l'extension aux surfaces irrégulières est immédiate.

1. Soit F une surface algébrique régulière contenant une involution I, d'ordre $n > 2$, non composée au moyen d'une autre involution et n'ayant qu'un nombre fini de points unis.

Considérons sur F un système linéaire $|C|$, ∞^1 au moins, n'ayant pas pour points-base des points unis de I et n'appartenant pas à celle-ci.

Les groupes de l'involution I dont un point se trouve sur une courbe C ont leurs $n-1$ autres points variables sur une courbe K que l'on peut supposer, à priori, en général irréductible. Il existe en général un certain nombre fini, α, de groupes de l'involution I dont deux points appartiennent à une courbe C. Les $n-2$ points qui complètent un tel groupe sont doubles pour la courbe K correspondante, qui possède ainsi $(n-2)\alpha$ points doubles variables avec la courbe C.

Lorsque la courbe C varie dans $|C|$, la courbe K décrit un système continu rationnel, d'indice supérieur à l'unité puisque $n > 2$ et possédant $(n-2)\alpha$ points doubles variables. Il en résulte, en vertu d'un théorème de F. Enriques (1), que les courbes K sont courbes totales d'un système linéaire $|K|$ dont les courbes sont dépourvues de points doubles variables et dont la dimension est supérieure à celle de $|C|$.

(1) *Un 'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1896, pp. 30-35).

Soit $\overline{K}$ une courbe de $|K|$ qui ne soit pas la transformée d'une courbe de $|C|$. Les $n-1$ points qui, avec les points de $\overline{K}$, forment des groupes de l'involution I, engendrent une courbe L que nous pouvons à priori supposer en général irréductible.

Choisissons une courbe C_1 de $|C|$ qui ne passe par aucun des points unis de l'involution et soit K_1 la courbe de $|K|$ qui lui correspond.

Faisons varier $\overline{K}$ d'une manière continue dans $|K|$ en la faisant tendre vers la courbe K_1. La courbe L varie d'une manières continue sur F et se réduit à la limite à la courbe $C_1 + (n-2)K_1$.

2. Désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les n points d'un groupe de l'involution I. Lorsque x_2 par exemple décrit la courbe $\overline{K}$, $x_1, x_3, \ldots, x_n$ décrivent la courbe L.

Si nous considérons la surface de Riemann représentant la courbe $\overline{K}$, nous pouvons faire décrire à x_2 un cycle $\overline{\sigma}$ de telle sorte que, sur L, les points x_1, x_3 soient échangés.

Dans le passage continu de $\overline{K}$ à K_1, ou de la surface de Riemann $\overline{K}$ à la surface de Riemann K_1, au cycle $\overline{\sigma}$ correspond un cycle σ de K_1 qui peut être ou non homologue à zéro.

Supposons que dans le passage de $\overline{K}$ à K_1, donc de L à $C_1 + (n-2)K_1$, le point x_1 passe sur la courbe C_1 et le point x_3 sur la courbe K_1, le point x_2 appartenant à K_1. Lorsque x_2 décrit le cycle σ, les points x_1, x_3 doivent s'échanger.

Si le cycle σ n'est pas homologue à zéro, l'échange du point x_1 de C_1 et du point x_3 de K_1 ne peut se faire qu'en un point commun à ces deux courbes. Mais alors, ce point serait uni pour l'involution I alors que la courbe C_1 ne passe par hypothèse par aucun des points unis. La cycle σ doit donc être homologue à zéro.

Le cycle σ étant homologue à zéro, ne peut être qu'un cycle entourant un des $(n-2)\alpha$ points P′ double pour K_1, qui naît lors du passage de $\overline{K}$ à K_1. Le groupe de l'involution I qui contient P′ possède deux points P_1, P_2 situés sur C_1 et ces deux points appartiennent également à K_1.

Faisons décrire à x_2 sur la surface de Riemann K_1 un cycle passant par P′. Lorsque le point x_1, sur C_1, s'approche de P_1, le point x_3, sur K_1, s'approche de P_2. Il peut se faire que x_1, continuant son chemin, passe sur K_1 en P_1, le point x_3 passant sur C_1 en P_2.

On peut expliquer ce qui se passe par un raisonnement intuitif : Lorsque x_2 s'approche de P' sur une des branches de la courbe K_1 en ce point, x_1 tend vers P_1 sur C_1 et x_3 tend vers P_2 sur K_1. Le point x_2 continuant son mouvement sur K_1, x_1, peut passer sur K_1 en P_1 et x_3 sur C_1 en P_2. Le point x_2 tendant vers P' sur l'autre branche de K_1 en P', x_1 tend vers P_2 sur K_1 et x_3 tend vers P_1 sur C_1. Lorsque le point x_2 continue son mouvement, x_1 passe sur C_1 en P_2 et x_3 passe sur K_1 en P_1.

On ne peut donc conclure que la courbe K_1 ni la courbe L soient nécessairement réductibles si la courbe C_1 contient des couples de points appartenant à un même groupe de l'involution I. Par suite, l'involution I n'est pas nécessairement engendrée par un groupe de transformations birationnelles de la surface F en soi lorsqu'il existe de tels couples de points.

3. Lorsque la surface F est irrégulière, $|C|$ appartient à un système continu $\{C\}$ et les courbes K à un système continu $\{K\}$ formé de systèmes linéaires $|K|$ plus amples que $|C|$, donc $\{K\}$ est plus ample que $\{C\}$; le raisonnement précédent et sa conclusion subsistent.

Liége, le 29 juin 1959.