Bulletin de la Classe des sciences

Note sur les surfaces de genres zéro possédant un réseau irréductible de courbes bicanoniques (deuxième communication)

Lucien Godeaux

Résumé
Étude de la surface algébrique de genres Pa = 'Pg — 0, P(1) = P2 = 3 dont les courbes bicanoniques forment un réseau irréductible dans le cas où il existe une courbe six-canonique formée d'une part par trois courbes bicanoniques distinctes et d'autre part par deux courbes tricanoniques distinctes.

Citer ce document / Cite this document :

Godeaux Lucien. Note sur les surfaces de genres zéro possédant un réseau irréductible de courbes bicanoniques (deuxième communication). In: Bulletin de la Classe des sciences, tome 45, 1959. pp. 59-68;

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1959.67640;

https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1959_num_45_1_67640;

Fichier pdf généré le 22/06/2023

Note sur les surfaces de genres zéro possédant un réseau irréductible de courbes bicanoniques,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(Deuxième communication).

Résumé. — Étude de la surface algébrique de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 3$ dont les courbes bicanoniques forment un réseau irréductible dans le cas où il existe une courbe six-canonique formée d'une part par trois courbes bicanoniques distinctes et d'autre part par deux courbes tricanoniques distinctes.

Dans notre première communication [1], nous avons montré que si une surface algébrique F de genre $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 3$ possède un réseau irréductible de courbes bicanoniques, elle possède une courbe Γ dont le double est une courbe bicanonique, dont les adjointes forment, avec la courbe Γ, des courbes tricanoniques et les couples d'adjointes des courbes tétracanoniques. Le modèle tricanonique de la surface F, situé dans un espace à six dimensions, appartient à deux, trois ou quatre hyperquadriques indépendantes. Dans les deux premiers cas, la surface F contient au moins une courbe six-canonique formée d'une part de trois courbes bicanoniques et d'autre part de deux courbes tricanoniques. Cette particularité peut se présenter de deux manières :

a) Il existe sur F six courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_6$ telles que les courbes $\Gamma_1 + \Gamma_2$, $\Gamma_3 + \Gamma_4$, $\Gamma_5 + \Gamma_6$ soient des courbes bicanoniques et que les courbes $\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_5$, $\Gamma_2 + \Gamma_4 + \Gamma_6$ soient des courbes tricanoniques.

[1] Bulletin de l'Académie, 1959, pp. 52-58.

b) Il existe sur F quatre courbes Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 telles que $\Gamma_1 + \Gamma_2$, $\Gamma_3 + \Gamma_4$ soient des courbes bicanoniques et que $2\Gamma_1 + \Gamma_3$, $2\Gamma_2 + \Gamma_4$ des courbes tricanoniques.

Dans cette note, nous examinons le premier cas. Nous démontrons que les six courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_6$ sont isolées, qu'elles ont le genre trois et le degré deux, et qu'elles se coupent deux à deux en deux points. Nous en déduisons l'existence de la courbe Γ dont il est question plus haut. Nous formons ensuite les systèmes bicanonique et tricanonique de la surface.

Une surface de genre $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 3$ que nous avons construite autrefois prouve l'existence de la surface F étudiée ici.

1. Soit F une surface algébrique de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 3$, dont les courbes bicanoniques C_2 forment un réseau irréductible.

Nous allons examiner l'hypothèse où il existe une courbe six-canonique C_6 formée d'une part de trois courbes bicanoniques C_2 et d'autre part de deux courbes tricanoniques C_3. D'une manière précise, nous supposerons qu'il existe sur F six courbes distinctes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_6$ telles que l'on ait

$$C_2 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2 \equiv \Gamma_3 + \Gamma_4 \equiv \Gamma_5 + \Gamma_6,$$
$$C_3 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_5 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_4 + \Gamma_6,$$

la courbe six-canonique étant formée des six courbes Γ.

Le système tricanonique $|C_3|$ étant l'adjoint du système bicanonique $|C_2|$, nous avons

$$\Gamma_1' \equiv \Gamma_4 + \Gamma_6, \quad \Gamma_3' \equiv \Gamma_6 + \Gamma_2, \quad \Gamma_5' \equiv \Gamma_2 + \Gamma_4,$$
$$\Gamma_2' \equiv \Gamma_3 + \Gamma_5, \quad \Gamma_4' \equiv \Gamma_3 + \Gamma_1, \quad \Gamma_6' \equiv \Gamma_1 + \Gamma_3.$$

Nous désignerons par π_i le genre de Γ_i, par n_{ii} son degré, par n_{ik} le nombre de points communs à Γ_i, Γ_k. Nous représenterons suivant l'usage par [X, Y] le nombre de points communs à deux courbes X, Y. Enfin, nous désignerons par r_i la dimension du système $|\Gamma_i|$.

Les courbes C_2 ont le genre sept et le degré huit, par conséquent, en exprimant que la courbe $\Gamma_1 + \Gamma_2$ a ces caractères, on a

$$\pi_1 + \pi_2 + n_{12} = 8, \quad n_{11} + n_{22} + 2n_{12} = 8. \tag{1}$$

Nous avons également

$$n_{11} + n_{12} = n_{13} - n_{14} = n_{15} + n_{16}. \tag{2}$$

2. Observons que le système $|\Gamma_1|$ ne peut contenir le système linéaire $|C_2|$, car la courbe $\Gamma_1' - \Gamma_1$, qui ne peut exister puisque $p_g = 0$, comprendrait la courbe Γ_2 comme partie. Il en résulte que les courbes C_2 découpent sur une courbe Γ_1, une série linéaire d'ordre $n_{11} + n_{12}$ non spéciale et par conséquent de dimension $n_{11} + n_{12} - \pi_1$.

Les courbes C_2 passant par $n_{11} + n_{12} - \pi_1 + 1$ points d'une courbe Γ_1 contiennent cette courbe et sont complétées par les courbes Γ_2. On a donc

$$2 - (n_{11} + n_{12} - \pi_1 + 1) = r_2,$$

c'est-à-dire

$$n_{11} + n_{12} = \pi_1 + 1 - r_2.$$

En intervertissant les rôles des courbes Γ_1, Γ_2, on a de même

$$n_{22} + n_{12} = \pi_2 + 1 - r_1.$$

En additionnant membre à membre ces deux relations et en tenant compte des équations (1), on a

$$n_{12} = 2 - (r_1 + r_2).$$

Les courbes Γ_1, Γ_2 ne peuvent toutes deux appartenir à des faisceaux car les ∞^2 courbes bicanoniques C_2 seraient réductibles, contrairement à l'hypothèse. L'une au moins de ces courbes, soit par exemple Γ_1, est isolée et on a $r_1 = 0$. La courbe Γ_2 peut être isolée ($r_2 = 0$) ou appartenir à un faisceau ($r_2 = 1$).

Plaçons-nous dans cette dernière hypothèse. La formule précédente donne $n_{12} = 1$ et les courbes Γ_2 rencontrent la courbe Γ_1 en un point fixe, car on a $n_{11} + n_{12} - \pi_1 = 0$. On a $n_{11} = \pi_1 - 1$ Mais alors, la courbe Γ_2 passant par un point quelconque de Γ_1 contient cette courbe comme partie, alors que l'on a supposé Γ_1 et Γ_2 distinctes. On ne peut donc avoir $r_2 = 1$ et les courbes Γ_1, Γ_2 sont isolées.

3. Si $r_1 = r_2 = 0$, on a

$$n_{12} = 2, \quad n_{11} = \pi_1 - 1, \quad n_{22} = \pi_2 - 1.$$

La relation (2) donne actuellement

$$\pi_1 + 1 = n_{13} + n_{14} = n_{15} + n_{16},$$

d'où, en tenant compte de $\Gamma_1' \equiv \Gamma_4 + \Gamma_6$,

$$2\pi_1 + 2 = n_{13} + n_{15} + n_{14} + n_{16} = n_{13} + n_{15} + 2\pi_1 - 2,$$

$$n_{13} + n_{15} = 4.$$

De la relation $\Gamma_2' \equiv \Gamma_3 + \Gamma_5$, on déduit

$$[\Gamma_2', \Gamma_1] = n_{13} + n_{15} = 4.$$

D'autre part, de la relation fondamentale

$$\Gamma_2' + \Gamma_1 \equiv \Gamma_1' + \Gamma_2,$$

on tire

$$[\Gamma_2', \Gamma_1] = \pi_1 + 1.$$

On a donc $[\Gamma_2', \Gamma_1] = 4 = \pi_1 + 1$, d'où $\pi_1 = 3$, $n_{11} = 2$.
On trouvera de même $\pi_2 = 3$, $n_{22} = 2$ et plus généralement

$$n_{11} = n_{22} = n_{33} = n_{44} = n_{55} = n_{66} = 2,$$

$$n_{12} = n_{34} = n_{56} = 2,$$

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \pi_5 = \pi_6 = 3.$$

4. En considérant les intersections de

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 \equiv \Gamma_3 + \Gamma_4 \equiv \Gamma_5 + \Gamma_6$$

successivement avec chacune des six courbes Γ, on a

$$n_{13} + n_{14} = n_{15} + n_{16} = 4, \quad n_{23} + n_{24} = n_{25} + n_{26} = 4,$$

$$n_{13} + n_{23} = n_{35} + n_{36} = 4, \quad n_{14} + n_{24} = n_{45} + n_{46} = 4,$$

$$n_{15} + n_{25} = n_{35} + n_{36} = 4, \quad n_{16} + n_{26} = n_{36} + n_{46} = 4.$$

On en déduit

$$n_{13} = n_{24}, \; n_{14} = n_{23}, \; n_{15} = n_{26}, \; n_{16} = n_{25}, \; n_{35} = n_{46}, \; n_{36} = n_{45}.$$

D'autre part, en considérant les expressions de Γ_1', Γ_3', Γ_5', on trouve

$$n_{14} + n_{16} = 4, \quad n_{36} + n_{23} = 4, \quad n_{25} + n_{45} = 4,$$

d'où l'on déduit $n_{ik} = 2$.

Ainsi donc, *les courbes Γ_1, Γ_2, ..., Γ_6 sont des courbes isolées de genre trois et de degré deux, qui se rencontrent deux à deux en deux points.*

5. La surface F étant régulière, le système $|\Gamma_1'|$ découpe sur la courbe Γ_1 la série canonique complète et comme il ne peut contenir cette courbe ($p_g = 0$), il a la dimension $\pi_1 - 1 = 2$.

Sur la courbe Γ_2, le système $|\Gamma_1'|$ découpe une série paracanonique g_4^1. La courbe Γ_1' qui passe par deux points de Γ_2 contient cette courbe et est complétée par une courbe isolée X_{12}. On a donc

$$\Gamma_1' \equiv \Gamma_2 + X_{12},$$

d'où

$$\Gamma_1'' \equiv \Gamma_2' + X_{12} \equiv \Gamma_1 + C_2.$$

On en déduit

$$X_{12} + \Gamma_3 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_6, \quad X_{12} + \Gamma_5 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_4.$$

On a également les relations fonctionnelles

$$X_{12} + \Gamma_5' \equiv \Gamma_1' + \Gamma_4, \qquad X_{12} + \Gamma_2 \equiv \Gamma_4 + \Gamma_6.$$

Sur la courbe Γ_3, $|\Gamma_1'|$ découpe également une série paracanonique g_4^1 et il existe donc une courbe X_{13}, isolée, telle que $\Gamma_1' \equiv \Gamma_3 + X_{13}$.

D'une manière générale, nous poserons

$$\begin{aligned}
\Gamma_1' &\equiv \Gamma_2 + X_{12} \equiv \Gamma_3 + X_{13} \equiv \Gamma_4 + X_{14} \equiv \Gamma_5 + X_{15} \equiv \Gamma_6 + X_{16},\\
\Gamma_2' &\equiv \Gamma_1 + X_{21} \equiv \Gamma_3 + X_{23} \equiv \Gamma_4 + X_{24} \equiv \Gamma_5 + X_{25} \equiv \Gamma_6 + X_{26},\\
\Gamma_3' &\equiv \Gamma_1 + X_{31} \equiv \Gamma_2 + X_{32} \equiv \Gamma_4 + X_{34} \equiv \Gamma_5 + X_{35} \equiv \Gamma_6 + X_{36},\\
\Gamma_4' &\equiv \Gamma_1 + X_{41} \equiv \Gamma_2 + X_{42} \equiv \Gamma_3 + X_{43} \equiv \Gamma_5 + X_{45} \equiv \Gamma_6 + X_{46},\\
\Gamma_5 &\equiv \Gamma_1 + X_{51} \equiv \Gamma_2 + X_{52} \equiv \Gamma_3 + X_{53} \equiv \Gamma_4 + X_{54} \equiv \Gamma_6 + X_{56},\\
\Gamma_6 &\equiv \Gamma_1 + X_{61} \equiv \Gamma_2 + X_{62} \equiv \Gamma_3 + X_{63} \equiv \Gamma_4 + X_{64} \equiv \Gamma_5 + X_{65}.
\end{aligned}$$

Toutes les courbes X_{ik} sont isolées.

6. De $\Gamma_1' \equiv \Gamma_3 + X_{13}$, on déduit

$$\Gamma_1'' \equiv \Gamma_2 + \Gamma_6 + X_{13} \equiv 2\Gamma_1 + \Gamma_2 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_5 + \Gamma_6,$$

d'où

$$X_{13} + \Gamma_6 \equiv 2\Gamma_1, \quad X_{13} + \Gamma_2 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_5.$$

On a également

$$X_{13} + \Gamma_3 \equiv \Gamma_4 + \Gamma_6.$$

De $\Gamma_4' \equiv \Gamma_2 + X_{42}$, on déduit de même

$$X_{42} + \Gamma_3 \equiv \Gamma_4 + \Gamma_6, \quad X_{42} + \Gamma_5 \equiv 2\Gamma_4.$$

Les courbes X_{13}, X_{42} étant isolées, coïncident.

On démontre, de la même manière, la coïncidence des courbes X_{15} et X_{62}, X_{24} et X_{31}, X_{26} et X_{51}, X_{64} et X_{35}, X_{53} et X_{46}.

On obtient ainsi le tableau suivant :

$$X_{13} + \Gamma_2 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_5, \quad X_{13} + \Gamma_3 \equiv \Gamma_4 + \Gamma_6, \quad X_{13} + \Gamma_5 \equiv 2\Gamma_4,$$
$$X_{13} + \Gamma_6 \equiv 2\Gamma_1,$$

$$X_{15} + \Gamma_2 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_3, \quad X_{15} + \Gamma_3 \equiv 2\Gamma_6, \quad X_{15} + \Gamma_4 \equiv 2\Gamma_1,$$
$$X_{15} + \Gamma_5 \equiv \Gamma_4 + \Gamma_6,$$

$$X_{24} + \Gamma_1 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_6, \quad X_{24} + \Gamma_4 \equiv \Gamma_3 + \Gamma_5, \quad X_{24} + \Gamma_5 \equiv 2\Gamma_2,$$
$$X_{24} + \Gamma_6 \equiv 2\Gamma_3,$$

$$X_{26} + \Gamma_1 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_4, \quad X_{26} + \Gamma_3 \equiv 2\Gamma_2, \quad X_{26} + \Gamma_4 \equiv 2\Gamma_5,$$
$$X_{26} + \Gamma_6 \equiv \Gamma_3 + \Gamma_5,$$

$$X_{35} + \Gamma_1 \equiv 2\Gamma_6, \quad X_{35} + \Gamma_2 \equiv 2\Gamma_3, \quad X_{35} + \Gamma_4 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_3,$$
$$X_{35} + \Gamma_5 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_6,$$

$$X_{46} + \Gamma_1 \equiv 2\Gamma_4, \; X_{46} + \Gamma_2 \equiv 2\Gamma_5, \quad X_{46} + \Gamma_3 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_4,$$
$$X_{46} + \Gamma_6 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_5.$$

7. Nous allons démontrer que les courbes X_{15} et X_{26} coïncident, de même que les courbes X_{34} et X_{43}.

Nous avons

$$X'_{15} + \Gamma_2 \equiv \Gamma_1 + \Gamma'_3 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_6, \quad X'_{15} \equiv \Gamma_1 + \Gamma_6,$$
$$X_{26} + \Gamma_1 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_4,$$
$$X'_{15} + X_{26} \equiv \Gamma_2 + \Gamma_4 + \Gamma_6 \equiv C_3.$$

De même

$$X'_{26} + \Gamma_1 \equiv \Gamma_2 + \Gamma'_4 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_1 + \Gamma_5, \quad X'_{26} \equiv \Gamma_2 + \Gamma_5,$$
$$X'_{26} + X_{15} = \Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_5 \equiv C_3.$$

De plus

$$X_{15} + X_{26} \equiv C_2, X'_{15} + X'_{26} \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_5 + \Gamma_6 \equiv 2C_2 \equiv C_4.$$

Nous avons démontré dans notre première communication que ces circonstances n'étaient possible que si X_{15} et X_{26} coïncidaient. Nous désignerons cette courbe par Γ et nous aurons

$$\Gamma + \Gamma_1 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_4, \quad \Gamma + \Gamma_2 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_3, \quad \Gamma + \Gamma_3 \equiv 2\Gamma_2 \equiv 2\Gamma_6,$$
$$\Gamma + \Gamma_4 \equiv 2\Gamma_1 \equiv 2\Gamma_5, \quad \Gamma + \Gamma_5 \equiv \Gamma_4 + \Gamma_6, \quad \Gamma + \Gamma_6 \equiv \Gamma_3 + \Gamma_5$$

et

$$\Gamma' \equiv \Gamma_1 + \Gamma_6 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_5, \quad 2\Gamma \equiv C_2.$$

Nous avons d'autre part

$$X_{34} + \Gamma_1 \equiv \Gamma_3 + \Gamma_6, \quad X_{34} + \Gamma_4 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_6, \quad X_{34} + \Gamma_5 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_3,$$
$$X_{43} + \Gamma_2 \equiv \Gamma_4 + \Gamma_5, \quad X_{43} + \Gamma_3 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_5, \quad X_{43} + \Gamma_6 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_4.$$

On en déduit

$$X'_{34} \equiv 2\Gamma_3, \qquad X'_{43} \equiv 2\Gamma_5,$$
$$X'_{34} + X_{43} \equiv C_3, \qquad X'_{43} + X_{34} \equiv C_3,$$
$$X_{34} + X_{43} \equiv C_2, \qquad X'_{34} + X'_{43} \equiv C_4,$$

d'où l'on conclut que X_{34} et X_{43} coïncident. Nous désignerons cette courbe par Γ_0 et nous aurons

$$\Gamma_0 + \Gamma_1 \equiv \Gamma_3 + \Gamma_6, \quad \Gamma_0 + \Gamma_2 \equiv \Gamma_4 + \Gamma_5, \quad \Gamma_0 + \Gamma_3 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_5,$$
$$\Gamma_0 + \Gamma_4 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_6, \quad \Gamma_0 + \Gamma_5 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_3, \quad \Gamma_0 + \Gamma_6 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_4,$$
$$\Gamma'_0 \equiv 2\Gamma_3 \equiv 2\Gamma_4, \quad 2\Gamma_0 \equiv C_2.$$

Observons que nous avons

$$\Gamma' \equiv \Gamma_1 + \Gamma_6 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_5,$$

$$\Gamma_0' \equiv 2\Gamma_3 \equiv 2\Gamma_4 \equiv 2\Gamma_2 + \Gamma_6 - \Gamma_5 \equiv 2\Gamma_1 + \Gamma_5 - \Gamma_6,$$

d'où

$$2\Gamma_2 + \Gamma_6 \equiv 2\Gamma_4 + \Gamma_5, \quad 2\Gamma_1 + \Gamma_5 \equiv 2\Gamma_3 + \Gamma_6.$$

8. On a

$$\Gamma_1' \equiv \Gamma_2 + X_{12} \equiv \Gamma_4 + \Gamma_6, \quad \Gamma_2' \equiv \Gamma_1 + X_{21} \equiv \Gamma_3 + \Gamma_5,$$

d'où

$$X_{12} + X_{21} \equiv C_2.$$

On obtient de même

$$X_{13} + X_{24} \equiv X_{35} + X_{46} \equiv X_{56} + X_{65} \equiv C_2.$$

De $\Gamma_1 + \Gamma_6 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_5$, on tire

$$\Gamma_4 + \Gamma_6 - \Gamma_2 \equiv \Gamma_4 + \Gamma_5 - \Gamma_1,$$

c'est-à-dire $X_{12} \equiv X_{56}$. On a encore

$$\Gamma_3 + \Gamma_6 - \Gamma_2 \equiv \Gamma_3 + \Gamma_5 - \Gamma_1,$$

c'est-à-dire $X_{65} \equiv X_{21}$.

Un calcul analogue à celui qui a été fait au N° 6 donne

$$X_{12} + \Gamma_1 \equiv \Gamma_4 + \Gamma_5, \quad X_{12} + \Gamma_2 \equiv \Gamma_4 + \Gamma_6, \quad X_{12} + \Gamma_3 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_5,$$
$$X_{12} + \Gamma_5 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_4, \quad X_{12} + \Gamma_6 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_4,$$

$$X_{21} + \Gamma_1 \equiv \Gamma_3 + \Gamma_5, \quad X_{21} + \Gamma_2 \equiv \Gamma_3 + \Gamma_6, \quad X_{21} + \Gamma_4 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_5$$
$$X_{21} + \Gamma_5 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_3, \quad X_{21} + \Gamma_6 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_3.$$

On vérifie facilement, à l'aide de ces formules, que l'on a

$$C_3 \equiv X_{12} + X_{24} + X_{35} \equiv X_{21} + X_{13} + X_{46}.$$

Cela va nous permettre d'obtenir de nouvelles courbes tricanoniques C_3. En utilisant les formules précédentes de toutes les manières possibles, on aura

$$C_3 \equiv 2\Gamma_1 + \Gamma_4, \quad C_3 \equiv 2\Gamma_6 + \Gamma_3.$$

En comparant aux relations définissant les courbes C_3, on a

$$\Gamma_1 + \Gamma_4 \equiv \Gamma_3 + \Gamma_5, \quad \Gamma_2 + \Gamma_4 \equiv \Gamma_3 + \Gamma_6.$$

Nous avons obtenu plus haut

$$\Gamma + \Gamma_1 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_4, \quad \Gamma_0 + \Gamma_1 \equiv \Gamma_3 + \Gamma_6.$$

Les deux derniers membres sont identiques, donc on a $\Gamma_0 \equiv \Gamma$.

9. Cette conclusion va nous permettre de déterminer X_{12}, X_{21}, X_{13}, X_{24}, X_{35} et X_{46}.

Nous avons

$$\Gamma_1 + \Gamma_5 \equiv X_{13} + \Gamma_2 \equiv X_{46} + \Gamma_6 \equiv \Gamma_0 + \Gamma_3 \equiv \Gamma + \Gamma_3 \equiv 2\Gamma_2 \equiv 2\Gamma_6,$$

d'où $X_{13} = \Gamma_2$, $X_{35} = \Gamma_6$;

$$\Gamma_2 + \Gamma_6 \equiv X_{24} + \Gamma_1 \equiv X_{35} + \Gamma_5 \equiv \Gamma_0 + \Gamma_4$$
$$\equiv \Gamma + \Gamma_4 \equiv 2\Gamma_1 \equiv 2\Gamma_5,$$

d'où $X_{24} = \Gamma_1$, $X_{35} = \Gamma_5$;

$$\Gamma_3 + \Gamma_5 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_4 \equiv X_{21} + \Gamma_1,$$

d'où $X_{21} = \Gamma_4$;

$$\Gamma_4 + \Gamma_6 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_3 \equiv X_{12} + \Gamma_2,$$

d'où $X_{12} = \Gamma_3$.

On obtient ainsi

$$\Gamma'_1 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_3, \quad \Gamma'_2 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_4, \quad \Gamma'_3 \equiv \Gamma + \Gamma_4, \quad \Gamma'_4 \equiv \Gamma + \Gamma_3,$$
$$\Gamma'_5 \equiv \Gamma_3 + \Gamma_6, \quad \Gamma'_6 \equiv \Gamma_4 + \Gamma_5.$$

10. En conclusion, *la surface* F *contient sept courbes isolées de genre trois et de degré deux, se rencontrant deux en deux points.*

Cette surface contient huit systèmes linéaires de genre sept et de degré huit, à savoir le système bicanonique

$$C_2 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2 \equiv \Gamma_3 + \Gamma_4 \equiv \Gamma_5 + \Gamma_6 \equiv 2\Gamma$$

et les systèmes adjoints

$$\Gamma'_1 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_3 \equiv \Gamma_4 + \Gamma_6 \equiv \Gamma + \Gamma_5,$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_2' &\equiv \Gamma_1 + \Gamma_4 \equiv \Gamma_3 + \Gamma_5 \equiv \Gamma + \Gamma_6,\\
\Gamma_3' &\equiv 2\Gamma_1 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_6 \equiv 2\Gamma_5 \equiv \Gamma + \Gamma_4,\\
\Gamma_4' &\equiv \Gamma_1 + \Gamma_5 \equiv 2\Gamma_2 \equiv 2\Gamma_6 \equiv \Gamma + \Gamma_3,\\
\Gamma_5' &\equiv \Gamma_2 + \Gamma_4 \equiv \Gamma_3 + \Gamma_6 \equiv \Gamma + \Gamma_1,\\
\Gamma_6' &\equiv \Gamma_1 + \Gamma_3 \equiv \Gamma_4 \equiv \Gamma_5 \equiv \Gamma + \Gamma_2,\\
\Gamma' &\equiv \Gamma_1 + \Gamma_6 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_5 \equiv 2\Gamma_3 \equiv 2\Gamma_4.
\end{aligned}$$

Quant au système tricanonique C_3, il contient les courbes

$$\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_5,\ \Gamma_2 + \Gamma_4 + \Gamma_6,\ 2\Gamma_1 + \Gamma_4,\ 2\Gamma_2 + \Gamma_3,\ 2\Gamma_3 + \Gamma,$$
$$2\Gamma_4 + \Gamma,\ \Gamma + \Gamma_1 + \Gamma_6,\ \Gamma + \Gamma_2 + \Gamma_5,\ 2\Gamma_5 + \Gamma_4,\ 2\Gamma_6 + \Gamma_3.$$

On reconnait, aux notations près, que la surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 3$ que nous avons construite autrefois comme image d'une involution cyclique d'ordre huit privée de points unis appartenant à une surface de genres $p_a = p_g = 7$, $p^{(1)} = 17$, $P_2 = 24$ (¹) est un cas particulier de la surface F étudiée ici, ce qui prouve l'existence de cette dernière surface.

Liège, le 28 janvier 1959.

(¹) *Sur la construction de surfaces non rationnelles de genres zéro* (BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, 1949, pp. 688-693).