Bulletin de la Classe des sciences

Construction d'une surface algébrique possédant une seule courbe canonique de genre cinq

Lucien Godeaux

Résumé
Construction d'une surface d'ordre seize, située dans un espace à cinq dimensions, possédant une seule courbe canonique d'ordre huit et de genre cinq.

Construction d'une surface algébrique possédant une seule courbe canonique de genre cinq,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Construction d'une surface d'ordre seize, située dans un espace à cinq dimensions, possédant une seule courbe canonique d'ordre huit et de genre cinq.

Lorsque l'on veut construire une surface algébrique de genres $p_a = p_g = 1$, $p^{(1)} = 5$, $P_2 = 6$, la première idée qui vient à l'esprit est de considérer, dans un espace linéaire à cinq dimensions, la surface intersection de deux hyperquadriques et d'une hypersurface du quatrième ordre touchant un hyperplan le long d'une hyperquadrique. Si

$$f_0(x_0, x_1, \ldots, x_5) = 0, \qquad f_1(x_0, x_1, \ldots, x_5) = 0$$

sont les équations des deux hyperquadriques et

$$[\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_5)]^2 + x_0\Psi_3(x_0, x_1, \ldots, x_5) = 0$$

celle de l'hypersurface du quatrième ordre, la surface F, intersection de ces hypersurfaces, touche l'hyperplan $x_0 = 0$ le long de la courbe C : $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, qui est une courbe d'ordre huit, de genre cinq, dont la série canonique est découpée par les hyperplans. Pour que la surface F réponde à la question, il faut que la courbe C soit la courbe canonique et que le système bicanonique soit celui des sections hyperplanes. Or, on sait qu'en général, le système canonique de la surface considérée est découpé par les hyperquadriques. Pour que la surface F réponde à la question, il faut donc que ses équations satisfassent à d'autres conditions. L'objet de cette note est de construire une surface F répondant à la question. A vrai dire, nous y arrivons par une voie détournée, en construisant la surface comme image d'une involution et il en résulte que la surface construite a le diviseur de Severi égal à quatre, alors qu'il est vraisemblable que la surface la plus générale de la famille indiquée a le diviseur égal à l'unité.

1. Dans une note récente [1], nous avons démontré que la variété algébrique V_6 à six dimensions, obtenue dans un espace S_{15} en exprimant que les matrices

$$\begin{Vmatrix} Y_{00} & Y_{01} & Y_{02} \\ Y_{01} & Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{02} & Y_{12} & Y_{22} \end{Vmatrix}, \qquad \begin{Vmatrix} Z_{00} & Z_{01} & Z_{02} & Z_{03} \\ Z_{01} & Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{02} & Z_{12} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{03} & Z_{13} & Z_{23} & Z_{33} \end{Vmatrix} \tag{1}$$

sont de caractéristique un, est coupée par un espace S_{11} suivant une surface F de genres $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 9$, $P_2 = 12$.

Les courbes canoniques sont découpées sur F par les espaces

$$\lambda_0 Y_{00} + \lambda_1 Y_{01} + \lambda_2 Y_{02} = 0,$$
$$\lambda_0 Y_{01} + \lambda_1 Y_{11} + \lambda_2 Y_{12} = 0,$$
$$\lambda_0 Y_{02} + \lambda_1 Y_{12} + \lambda_2 Y_{22} = 0,$$

et le système bicanonique coïncide avec celui des sections hyperplanes.

Considérons dans S_{15} l'homographie H d'équations

$$Y'_{00} : Y'_{01} : Y'_{02} : Y'_{11} : Y'_{12} : Y'_{22} : Z'_{00} :$$
$$Z'_{01} : Z'_{11} : Z'_{22} : Z'_{23} : Z'_{33} : Z'_{02} : Z'_{03} : Z'_{12} : Z'_{13} =$$
$$Y_{00} : -Y_{01} : -Y_{02} : Y_{11} : Y_{12} :$$
$$Y_{22} : -Z_{00} : -Z_{01} : -Z_{11} : -Z_{22} : -Z_{23} : -Z_{33} : Z_{02} : Z_{03} : Z_{12} : Z_{13}.$$

---

[1] *Une famille de surfaces algébriques de diviseur deux* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELG., 1959, pp. 373-380).

Chacune des matrices (1) est transformée en soi par l'homographie H et les axes ponctuels de celle-ci sont deux espaces S_7, S'_7 à sept dimensions dont les équations sont

$$Y_{01} = Y_{02} = Z_{00} = Z_{01} = Z_{11} = Z_{22} = Z_{23} = Z_{33} = 0, \quad (S_7)$$
$$Y_{00} = Y_{11} = Y_{12} = Y_{22} = Z_{02} = Z_{03} = Z_{12} = Z_{13} = 0. \quad (S'_7)$$

Supposons que l'espace S_{11} qui contient F soit l'intersection de quatre hyperplans unis pour l'homographie H, deux passant par S_7 et deux par S'_7. Écrivons les équations des deux premiers sous la forme

$$\begin{aligned} Y_{01} &= a_1Z_{00} + a_2Z_{01} + a_3Z_{11} + b_1Z_{22} + b_2Z_{23} + b_3Z_{33}, \\ Y_{02} &= a'Z_{00} + a'_2Z_{01} + a'_3Z_{11} + b'_1Z_{22} + b'_2Z_{23} + b'_3Z_{33} \end{aligned} \tag{2}$$

et celles des deux derniers sous la forme

$$f_1(Y_{00}, Y_{11}, \ldots, Z_{13}) = 0, \; f_2 = 0.$$

L'homographie H transforme en elle-même la surface F et engendre sur celle-ci une involution I du second ordre. Observons que l'homographie H détermine dans l'espace S_{11} contenant F une homographie ayant pour axes ponctuels deux espaces linéaires à cinq dimensions qui ne rencontrent pas la surface F. L'involution I est dépourvue de points unis.

2. Désignons par F′ une surface image de l'involution I. Pour obtenir ce modèle, il suffit de projeter F à partir de S'_7 sur S_7. On obtiendra donc les équations de F′ en éliminant Y_{01}, Y_{02}, Z_{00}, Z_{01}, ..., Z_{33} entre les équations de F.

On a tout d'abord deux équations

$$Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2 = 0, \quad Z_{02}Z_{13} - Z_{03}Z_{12} = 0. \tag{3}$$

Nous avons

$$\frac{Z_{00}}{Z_{02}Z_{03}} = \frac{Z_{01}}{Z_{12}Z_{03}} = \frac{Z_{11}}{Z_{12}Z_{13}} = \rho, \qquad \rho\rho' = \frac{1}{Z_{03}Z_{12}}.$$
$$\frac{Z_{22}}{Z_{02}Z_{12}} = \frac{Z_{23}}{Z_{03}Z_{12}} = \frac{Z_{33}}{Z_{03}Z_{13}} = \rho',$$

Des équations (2), on déduit

$$\rho A + \rho' B = Y_{01}, \qquad \rho A' + \rho' B' = Y_{02},$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} A &= a_1 Z_{02} Z_{03} + a_2 Z_{12} Z_{03} + a_3 Z_{12} Z_{13}, \\ B &= b_1 Z_{02} Z_{12} + b_2 Z_{03} Z_{12} + b_3 Z_{03} Z_{13}, \\ A' &= a'_1 Z_{02} Z_{03} + a'_2 Z_{12} Z_{03} + a'_3 Z_{12} Z_{13}, \\ B' &= b'_1 Z_{02} Z_{12} + b'_2 Z_{03} Z_{12} + b'_3 Z_{03} Z_{13}. \end{aligned}$$

On en tire

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} Y_{01} & B \\ Y_{02} & B' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & Y_{01} \\ A' & Y_{02} \end{vmatrix} Z_{03} Z_{12}.$$

On a d'autre part

$$\frac{Y_{01}^2}{Y_{11}} = \frac{Y_{01} \cdot Y_{02}}{Y_{12}} = \frac{Y_{02}^2}{Y_{22}} = Y_{00},$$

d'où

$$(AB' - A'B)^2 = [(AB' + A'B')Y_{12} - A'B'Y_{11} - ABY_{22}]\, Y_{00} Z_{03} Z_{12}.$$

Posons

$$\begin{aligned} \varphi_0 = (a_1 b'_1 - a'_1 b_1)\, Z_{02}^2 + (a_1\, b'_3 - a'_1 b_3)\, Z_{03}^2 + (a_3 b'_1 - a'_3 b_1) Z_{12}^2 \\ + (a_3 b'_3 - a'_3 b_3)\, Z_{13}^2 + (a_1 b'_2 - a'_1 b_2)\, Z_{02} Z_{03} \\ + (a_2 b'_1 - a'_2 b_1)\, Z_{02} Z_{12} + (a_2 b'_2 - a'_2 b_2)\, Z_{03}\, Z_{12} \\ + (a_2 b'_3 - a'_2 b_3)\, Z_{03} Z_{13} + (a_3 b'_2 - a'_3 b_2) Z_{12} Z_{13}, \end{aligned}$$

$$\varphi_1 = (a_1 b'_1 + a'_1 b_1)\, Z_{02}^2 + \ldots + (a_3 b'_2 + a'_3 b_2)\, Z_{12} Z_{13},$$

$$\varphi_2 = a'_1 b'_1 Z_{02}^2 + a'_1 b'_3 Z_{03}^2 + \ldots + a'_3 b'_2 Z_{12} Z_{13},$$

$$\varphi_3 = a_1 b_1 Z_{02}^2 + a_1 b_3 Z_{03}^2 + \ldots + a_3 b_2 Z_{12} Z_{13}.$$

L'équation précédente devient

$$\varphi_0^2 = Y_{00}(Y_{12}\varphi_1 - Y_{11}\varphi_2 - Y_{22}\varphi_3). \tag{4}$$

Les équations (3) et (4), jointes à $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ représentent la surface F', plongée dans un espace S_5, lui-même plongé dans l'espace S_7.

La surface F est d'ordre 32 et la surface F′ d'ordre 16, ce qui confirme que l'involution I est dépourvue de points unis.

3. Entre le genre arithmétique $p_a = 3$ de F et celui p'_a de F′, nous avons la relation

$$p_a + 1 = 2(p'_a + 1),$$

d'où $p'_a = 1$. La surface F étant régulière, il en est de même de F′ et pour cette surface on a $p'_g = 1$. La surface F′ possède donc une courbe canonique unique.

Le genre π de cette courbe est lié au genre linéaire $p^{(1)} = 9$ de F par la relation

$$p^{(1)} - 1 = 2(\pi - 1),$$

d'où $\pi = 5$.

Voyons maintenant quelle est la courbe canonique de F′,

Les courbes canoniques de F transformées en elles-mêmes par H sont la courbe découpée par l'hyperplan

$$Y_{00} = 0, \quad Y_{01} = 0, \quad Y_{02} = 0$$

et les courbes découpées par les hyperplans

$$\lambda_1 Y_{01} + \lambda_2 Y_{02} = 0, \quad \lambda_1 Y_{11} + \lambda_2 Y_{12} = 0, \quad \lambda_1 Y_{12} + \lambda_2 Y_{22} = 0.$$

A la première correspond l'unique courbe canonique de F′, dont les équations sont donc

$$Y_{00} = 0, \qquad Y_{11} Y_{22} = Y_{12}^2,$$

$$Z_{02} Z_{13} - Z_{03} Z_{12} = 0, \qquad \varphi_0 = 0, \ f_1 = 0, \ f_2 = 0.$$

Cette courbe est l'intersection de trois hyperquadriques dans un espace linéaire à quatre dimensions ; c'est donc une courbe d'ordre huit et de genre cinq dont la série canonique est découpée par les hyperplans.

On remarquera que l'hyperplan $Y_{00} = 0$ touche la variété (4) le long de la variété quadratique $Y_{00} = 0$, $\varphi_0 = 0$.

Le système bicanonique de F′ est par construction constitué par les sections hyperplanes et on a $P_2 = 6$.

Comme nous l'avons établi dans notre note citée plus haut, le diviseur de Severi de la surface F est égal à deux. La surface F′

étant l'image d'une involution d'ordre deux, privée de points unis, appartenant à F, le diviseur de Severi de F' est le double de celui de F, donc quatre.

4. Examinons de plus près la variété (4).

Observons tout d'abord que dans S_7, se trouvent deux espaces linéaires à trois dimensions, η d'équations $Z_{02} = Z_{03} = Z_{12} = Z_{13} = 0$ et ζ, d'équations $Y_{00} = Y_{11} = Y_{12} = Y_{22} = 0$, qui ne se rencontrent pas.

Dans l'espace ζ, les équations $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ représentent quatre quadriques linéairement indépendantes mais liées cependant par la relation

$$\varphi_0^2 - \varphi_1^2 + 4\varphi_2\varphi_3 = 0.$$

Dans l'espace S_7, ces équations représentent quatre cônes quadratiques ayant pour sommet l'espace η.

L'équation (4) représente une variété ayant comme espace double η et rencontrant ζ suivant la quadrique $\varphi_0 = 0$ comptée deux fois.

L'équation $Z_{02}Z_{13} - Z_{03}Z_{12} = 0$ représente un cône de sommet η.

L'équation $Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2 = 0$ représente un cône ayant pour sommet un espace à quatre dimensions contenant ζ. Enfin $Y_{00} = 0$ représente un hyperplan contenant l'espace ζ.

Coupons par l'espace S_5 représenté par $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ et soient η', ζ' les droites suivant lesquelles cet espace coupe les espaces η, ζ.

La surface F' est dans S_5 l'intersection d'un cône quadratique ayant pour sommet un plan contenant la droite ζ', d'un second cône quadratique de sommet η' et d'une hypersurface du quatrième ordre passant deux fois par la droite η' et touchant un hyperplan passant par la droite ζ' le long d'une hyperquadrique.

L'espace η est double pour la variété (4) et pour le cône $Z_{02}Z_{03} - Z_{03}Z_{12} = 0$, donc, dans cet espace, le cône $Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2 = 0$ est quadruple pour la variété envisagée dans S_7. Il en résulte que la surface F' a deux points quadruples sur la droite η'.

Liège, le 1er mai 1959.