Bulletin de la Classe des sciences

# Sur les surfaces de genres géométrique et arithmétique nuls possédant un faisceau de courbes bicanoniques irréductibles

Lucien Godeaux

**Résumé**
On démontre que la surface de genres pa — pg — 0 ayant un faisceau de courbes bicanoniques irréductibles, représente une involution cyclique du cinquième ordre, privée de points unis, appartenant à une surface de genres pa = pg = 4.

## COMMUNICATIONS DES MEMBRES

### GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

# Sur les surfaces de genres géométrique et arithmétique nuls possédant un faisceau de courbes bicanoniques irréductibles,

par LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie.

*Résumé.* — On démontre que la surface de genres $p_a = p_g = 0$ ayant un faisceau de courbes bicanoniques irréductibles, représente une involution cyclique du cinquième ordre, privée de points unis, appartenant à une surface de genres $p_a = p_g = 4$.

On sait que F. Enriques a démontré que la surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$, $P_3 = 0$ (surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre) est l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface de genres $p_a = P_4 = 1$ [1]. Nous basant sur ce résultat, Nous avons cherché à construire des surfaces de genre $p_a = p_g = 0$, $P_2 > 1$ comme images d'involutions dépourvues de points unis appartenant à des surfaces algébriques. Précisément, nous avons montré que si une surface régulière de genre $p_a$ contient une involution cyclique d'ordre $p_a + 1$, privée de points unis, la surface image de cette involution a les genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 > 1$ [2]. Une application de cette remarque nous a conduit construire une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 2$, à courbes bicanoniques irréductibles [3]. Il suffit de partir d'une surface dn cinquième ordre transformée en soi par une homographie cyclique de période cinq, possédant quatre points unis, ces points n'appartenant pas à la surface. L'image de l'involution ainsi obtenue sur la surface est une surface du septième ordre possédant comme droites doubles tacnodales les arêtes d'un quadrilatère gauche et comme droites simples les diagonales de ce quadrilatère (droites exceptionnelles). Il restait à prouver que l'on obtient ainsi la surface la plus générale de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 2$, à courbes bicanoniques irréductibles. C'est la démonstration de ce fait qui fait l'objet de cette note, sous l'hypothèse que les quatre points-base du faisceau de courbes bicanoniques sont distincts.

Partant d'une surface F de genres $p_a = p_g = 0, p^{(1)} = P_2 = 2$, contenant un faisceau de courbes bicanoniques irréductibles, nous démontrons qu'il existe au moins une courbe six-canonique formée d'une part de trois courbes bicanoniques et d'autre part de deux courbes tricanoniques. Nous en déduisons l'existence de quatre courbes isolées de genre deux, au moyen desquelles on peut former deux courbes bicanoniques et quatre courbes tricanoniques. Nous montrons alors que l'on peut, par une transformation birationnelle, ramener cette surface à celle que nous avons rencontrée comme image d'une involution dont il a été question plus haut.

Il est probable que les raisonnements précédents pourront conduire à la détermination des surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, à courbes bicanoniques irréductibles, mais il faudra au préalable avoir des indications sur la dimension du système linéaire minimum contenant les courbes sommes de deux systèmes linéaires.

1. Soit F une surface algébrique de genre $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 2$, possédant un faisceau de courbes bicanoniques irréductibles.

Nous désignerons par $|C_2|$ le système bicanonique, de degré et de genre quatre, par $|C_3|$ le système tricanonique, de dimension $P_3 - 1 = 3$, par $|C_4|$ le système quatre-canonique, de dimension $P_4 - 1 = 6$, enfin par $|C_6|$ le système six-canonique, de dimension $P_6 - 1 = 15$.

Dans le système $|C_4|$, il ne peut exister de courbe dégénérée comprenant une courbe tricanonique, car elle serait complétée par une courbe canonique, ce qui est impossible. Par conséquent, les courbes quatre-canoniques dégénérées le sont en deux courbes bicanoniques.

Les courbes $C_4$ formées de deux courbes bicanoniques forment un système de dimension deux. Par conséquent, puisque $|C_4|$

est de dimension 6, il existe un système linéaire de dimension 3, formé de courbes qui ne sont pas dégénérées en deux courbes $C_2$. Nous désignerons ce système par $|\overline{C}_4|$.

Dans le système $|C_6|$, il existe des courbes formées d'une courbe $\overline{C}_4$ irréductible et d'une courbe $C_2$. Quatre points étant choisis arbitrairement sur F, par trois quelconques de ces points passe une courbe $\overline{C}_4$ et par le dernier une courbe $C_2$, par conséquent par ces quatre points passent des courbes $\overline{C}_4 + C_2$ en nombre fini et le système linéaire $|\overline{C}_4 + C_2|$ a une dimension $r_{4+2}$ au moins égale à 5. Il en résulte qu'il existe dans le système $|C_6|$, de dimension 15, un système linéaire de dimension au plus égale à 9, dont les courbes ne sont pas formées d'une courbe $\overline{C}_4$ irréductible et d'une courbe $C_2$. Nous désignerons ce système par $|\overline{C}_6|$.

Dans le système $|\overline{C}_6|$, il existe des courbes formées de trois courbes $C_2$ et des courbes formées de deux courbes $C_3$. Les premières forment un système linéaire de dimension trois et les secondes un système de dimension six. Ces deux systèmes ont au moins une courbe commune. Par conséquent, il existe au moins une courbe 6-canonique formée d'une part de trois courbes $C_2$ et d'autre part de deux courbes $C_3$. Nous allons passer en revue les différentes hypothèses qui peuvent être faites.

2. Supposons en premier lieu qu'il existe une courbe $\overline{C}_6$ formée à la fois d'une courbe $C_2$ comptée trois fois et d'une courbe $C_3$ comptée deux fois. Il doit alors exister une courbe $\Gamma$ telle que $C_2 \equiv 2\Gamma$, $C_3 \equiv 3\Gamma$. La courbe $\Gamma$ ne peut d'ailleurs être une courbe canonique.

On a successivement

$$\Gamma'' - \Gamma \equiv 2\Gamma, \quad \Gamma'' \equiv 3\Gamma, \quad \Gamma''' \equiv 2\Gamma + \Gamma'$$

et

$$\Gamma''' - \Gamma \equiv \Gamma + \Gamma' \equiv 3\Gamma,$$

d'où $\Gamma' \equiv 2\Gamma$. Mais alors, $\Gamma' - \Gamma \equiv \Gamma$ et $\Gamma$ serait une courbe canonique de F, ce qui est impossible.

Supposons en second lieu qu'il existe une courbe $\overline{C}_6$ qui soit à la fois formée d'une courbe $C_2$ comptée trois fois et de deux courbes $C_3^*$, $C_3^{**}$ de $|C_3|$. Il doit exister deux courbes $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ telles que

$$C_2 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2,\ C_3^* \equiv 2\Gamma_1 + \Gamma_2,\ C_3^{**} \equiv \Gamma_1 + 2\Gamma_2.$$

On a alors

$$C_2' \equiv \Gamma_1' + \Gamma_2 \equiv \Gamma_1 + 2\Gamma_2,$$

d'où

$$\Gamma_1' - \Gamma_1 \equiv \Gamma_2.$$

$\Gamma_2$ serait alors une courbe canonique de F, contrairement à l'hypothèse.

Supposons en troisième lieu qu'il existe une courbe $\overline{C}_6$ formée à la fois d'une courbe $C_3$ comptée deux fois et de deux courbes $C_2^*$, $C_2^{**}$, la première comptée deux fois. Il doit alors exister trois courbes $\Gamma$, $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ telles que

$$C_2^* \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2,\quad C_2 \equiv 2\Gamma,\quad C_3 \equiv \Gamma + \Gamma_1 + \Gamma_2.$$

Nous avons

$$(\Gamma_1 + \Gamma_2)' \equiv \Gamma_1' + \Gamma_2 \equiv \Gamma + \Gamma_1 + \Gamma_5,$$

d'où

$$\Gamma_1' - \Gamma_1 \equiv \Gamma.$$

La courbe $\Gamma$ serait alors une courbe canonique de F, ce qui est impossible.

Supposons maintenant qu'il existe une courbe $\overline{C}_6$ qui soit à la fois une courbe $C_3$ comptée deux fois et trois courbes $C_2^*$, $C_2^{**}$, $C_2^{***}$. Il existe alors trois courbes $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$ telles que

$$C_2^* \equiv \Gamma_2 + \Gamma_3,\ C_2^{**} \equiv \Gamma_3 + \Gamma_1,\ C_2^{***} \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2,$$
$$C_3 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3.$$

On a

$$(\Gamma_2 + \Gamma_3)' \equiv \Gamma_2' + \Gamma_3 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3,$$

d'où

$$\Gamma_2' \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2,\ \ \Gamma_2' - \Gamma_2 \equiv \Gamma_1.$$

La courbe $\Gamma_1$ serait donc une courbe canonique de F, ce qui est impossible.

Supposons qu'il existe une courbe $\overline{C}_6$ formée à la fois de deux courbes $C_3^*$, $C_3^{**}$ et de deux courbes $C_2^*$, $C_2^{**}$, la première comptée deux fois. Il doit alors exister quatre courbes $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$, $\Gamma_4$ telles que

$$C_2^* \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2, \; C_2^{**} \equiv \Gamma_3 + \Gamma_4,$$
$$C_3^* \equiv 2\Gamma_1 + \Gamma_3, \; C_3 \equiv 2\Gamma_2 + \Gamma_4.$$

Ce cas se présente effectivement, la surface F que nous avons rencontrée présentant cette particularité.

Il nous reste une dernière hypothèse, celle où il existe une courbe $\overline{C}_6$ qui soit à la fois formée de trois courbes $C_2^*$, $C_2^{**}$, $C_2^{***}$ et de deux courbes $C_3^*$, $C_3^*$. Il doit alors exister six courbes $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$, $\Gamma_4$, $\Gamma_5$, $\Gamma_6$ telles que

$$C_2^* \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2, \; C_2^{**} \equiv \Gamma_3 + \Gamma_4, \; C_2^{***} \equiv \Gamma_5 + \Gamma_6,$$
$$C_3^* \equiv \Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_5, \; C^{**} \equiv \Gamma_2 + \Gamma_4 + \Gamma_6.$$

Nous allons voir que ce cas ne peut se présenter.

3. Plaçons-nous dans la dernière hypothèse, où l'on a donc

$$C_2 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2 \equiv \Gamma_3 + \Gamma_4 \equiv \Gamma_5 + \Gamma_6,$$
$$C_3 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_5 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_4 + \Gamma_6.$$

Les courbes $\Gamma_1$, $\Gamma_5$, ..., $\Gamma_6$ sont isolées, car si $\Gamma_1$ par exemple décrivait un faisceau, toutes les courbes bicanoniques $\Gamma_1 + \Gamma_2$ seraient réductibles, contrairement à l'hypothèse.

On a

$$C_2' \equiv \Gamma_1' + \Gamma_2 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_4 + \Gamma_6,$$

donc $\Gamma_1' \equiv \Gamma_4 + \Gamma_6$. On peut donc écrire

$$\Gamma_1' \equiv \Gamma_4 + \Gamma_6, \quad \Gamma_3' \equiv \Gamma_2 + \Gamma_6, \quad \Gamma_5' \equiv \Gamma_2 + \Gamma_4,$$
$$\Gamma_2' \equiv \Gamma_3 + \Gamma_5, \quad \Gamma_4' \equiv \Gamma_1 + \Gamma_5, \quad \Gamma_6' \equiv \Gamma_1 + \Gamma_3.$$

Désignons par $n_i$, $\pi_i$ le degré et le genre virtuel de la courbe $\Gamma_i$ et par $n_{ik}$ le nombre de points communs aux deux courbes $\Gamma_i$, $\Gamma_k$.

En appliquant le théorème de Riemann-Roch à la courbe $\Gamma_i$, on a $n_i = \pi_i - 1$. D'autre part, en exprimant que le système $\Gamma_1 + \Gamma_2$ a le degré et le genre quatre, on a

$$n_1 + n_2 + 2n_{12} = 4, \pi_1 + \pi_2 + n_{12} - 1 = 4,$$

d'où l'on conclut $n_{12} = 1$, $\pi_1 + \pi_2 = 4$. Observons de plus que les courbes adjointes à $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ existant, on a $\pi_1 \geqslant 1$, $\pi_2 \geqslant 1$.

Le même raisonnement montre que l'on a

$$n_{34} = n_{56} = 1, \quad \pi_3 + \pi_4 = 4, \quad \pi_5 + \pi_6 = 4,$$
$$\pi_3 \geqslant 1, \quad \pi_4 \geqslant 1, \quad \pi_5 \geqslant 1, \quad \pi_6 \geqslant 1.$$

En exprimant que la courbe $\Gamma_i$ est rencontrée par son adjointe en $2\pi_i - 2$ points, on obtient les relations

$$n_{14} + n_{16} = 2\pi_1 - 2, \quad n_{23} + n_{25} = 2\pi_2 - 2, \ldots,$$
$$n_{16} + n_{36} = 2\pi_6 - 2.$$

Supposons que nous puissions avoir $\pi_1 = 1$, d'où $n_1 = 0$, $\pi_2 = 3$, $n_2 = 2$.

La première des relations précédentes donne $n_{14} = n_{16} = 0$

En considérant les intersections de $\Gamma_1$ avec $\Gamma_1 + \Gamma_2 \equiv \Gamma_3 + \Gamma_4 \equiv \Gamma_5 + \Gamma_6$, on trouve $n_{13} = 1$, $n_{15} = 1$. En considérant les intersections de $\Gamma_3$ avec $\Gamma_1 + \Gamma_2 \equiv \Gamma_5 + \Gamma_6$, on trouve $n_{23} = n_3 = \pi_3 - 1$. De même, la considération des intersections de $\Gamma_5$ avec $\Gamma_1 + \Gamma_2 \equiv \Gamma_5 + \Gamma_6$, donne $n_{25} = n_5 = \pi_5 - 1$.

La courbe $\Gamma'_2 \equiv \Gamma_3 + \Gamma_5$ doit rencontrer $\Gamma_2$ en 4 points, donc on a $n_{23} + n_{25} = 4$ et par suite $\pi_3 + \pi_5 = 6$. Les nombres $\pi_3$ et $\pi_5$ sont au plus égaux à 3, donc on a $\pi_3 = \pi_5 = 3$ et $\pi_4 = \pi_6 = 1$.

La courbe $\Gamma'_6 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_3$ doit rencontrer $\Gamma_6$ en 0 points, donc $n_{36} = 0$. Mais d'autre part, la courbe $\Gamma'_3 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_6$ doit rencontrer $\Gamma_3$ en 4 points, donc on a $n_{36} = 2$. On est donc conduit à une absurdité et les genres des courbes $\Gamma_i$ sont tous égaux à 2.

4. Dans le cas où tous les genres des courbes $\Gamma_i$ sont égaux à 2, on a $n_i = 1$ et

$$n_{14} + n_{16} = 2, \ n_{23} + n_{25} = 2, \ldots, \ n_{16} + n_{36} = 2.$$

De plus, en considérant les intersections de chacune des courbes

$\Gamma_i$ avec $\Gamma_1 + \Gamma_2 \equiv \Gamma_3 + \Gamma_4 \equiv \Gamma_5 + \Gamma_6$, on obtient les relations

$$n_{13} + n_{14} = n_{15} + n_{16} = 2,$$
$$n_{23} + n_{24} = n_{25} + n_{26} = 2, \ldots, \quad n_{16} + n_{26} = n_{36} + n_{46} = 2.$$

Il est aisé de voir que les solutions de ces équations sont $n_{ik} = 1$.

Cela étant, les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_6$ se coupent deux à deux en un point et les courbes $C_2$ rencontrent chacune de ces courbes en deux points, qui sont nécessairement les quatre points-base du faisceau $|C_2|$, points que nous supposerons distincts. Les courbes $\Gamma_1 + \Gamma_2$ et $\Gamma_3 + \Gamma_4$ se coupent en quatre points, qui sont donc les points-base précédents. Nous désignerons par $A_{ik}$ le point commun aux courbes $\Gamma_i, \Gamma_k$ $(i = 1, 2\,;\ k = 3, 4)$.

Supposons que $\Gamma_5$ passe par $A_{14}$ et par suite par $A_{23}$. Alors $\Gamma_6$ passe par $A_{13}$ et par $A_{24}$. La courbe $\Gamma_1' \equiv \Gamma_4 + \Gamma_6$ coupe $\Gamma_1$ suivant le couple $A_{13} + A_{14}$ et la courbe $\Gamma_2' \equiv \Gamma_3 + \Gamma_5$ suivant le même couple. Or, comme $|\Gamma_1'|$ et $|\Gamma_2'|$ sont distincts (sans quoi $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ seraient équivalentes), la courbe $\Gamma_1'$ doit couper $\Gamma_1$ suivant un couple canonique et la courbe $\Gamma_2'$ suivant un couple paracanonique. L'absurdité à laquelle nous sommes conduit montre que la courbe $\Gamma_5$ passe par $A_{13}$ et $A_{24}$, et la courbe $\Gamma_6$ par $A_{14}$ et $A_{23}$. Alors le point $A_{14}$ compté deux fois forme un couple canonique et le point $A_{13}$ compté deux fois un couple paracanonique de $\Gamma_1$.

La courbe $\Gamma_1'$ coupe $\Gamma_2$ suivant le couple $A_{23} + A_{24}$, qui est un groupe paracanonique de $\Gamma_2$. La courbe $\Gamma_2'$ coupe $\Gamma_2$ suivant le même couple, qui est par suite un groupe canonique de $\Gamma_2$. L'absurdité à laquelle nous sommes conduit montre que l'hypothèse examinée ici ne peut se présenter.

5. Examinons maintenant la dernière hypothèse, où l'on a

$$C_2 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2 \equiv \Gamma_3 + \Gamma_4, \qquad C_3 \equiv 2\Gamma_1 + \Gamma_3 \equiv 2\Gamma_2 + \Gamma_4.$$

Les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ sont isolées. On le démontre comme dans le cas précédent. De plus, si l'on désigne par $n_i$, $\pi_i$ le degré et le genre virtuels de $\Gamma_i$, par $n_{ik}$ le nombre de points communs à $\Gamma_i, \Gamma_k$, on a encore

$$n_i = \pi_i - 1, \quad n_{12} = n_{34} = 1, \quad \pi_1 + \pi_2 = 4,$$
$$\pi_3 + \pi_4 = 4, \quad \pi_1 \geqslant 1, \quad \pi_2 \geqslant 1, \ \pi_3 \geqslant 1, \quad \pi_4 \geqslant 1.$$

Le système bicanonique $|C_2|$ a quatre points-base que nous supposerons distincts, donc les courbes $\Gamma_1 + \Gamma_2$, $\Gamma_3 + \Gamma_4$ se rencontrent en quatre points que nous désignerons comme plus haut par $A_{13}$, $A_{14}$, $A_{23}$, $A_{24}$.

La courbe $\Gamma'_1 \equiv \Gamma_2 + \Gamma_4$ doit rencontrer $\Gamma_1$ en $2\pi_1 - 2$ points, donc $\Gamma_4$ rencontre $\Gamma_1$ en $2\pi_1 - 3$ points. Ce nombre ne pouvant être négatif, on a $\pi_1 \geqslant 2$. De même, $\pi_2 \geqslant 2$ et par conséquent, $\pi_1 - \pi_2 - 2$. On en déduit $n_{14} = 1$, $n_{23} = 1$, $n_1 = 1$, $n_2 = 1$.

Une courbe $C_2$ rencontre la courbe $\Gamma_1$ en $n_1 + n_{12} = 2$ points. On a $n_{13} + n_{14} = 2$, d'où $n_{13} = 1$. De même $n_{24} = 1$. $\Gamma'_3 \equiv 2\Gamma_2$ découpe sur $\Gamma_3$ un couple canonique, d'où $\pi_3 = 2$, $\pi_4 = 2$.

Le système $|\Gamma'_1|$ est régulier et est un faisceau ; il doit découper. sur la courbe $\Gamma_1$ la série canonique complète $g_2^1$.

Considérons les systèmes $|2\Gamma_4|$, $|\Gamma_2 + \Gamma_3|$, $|\Gamma_1 + \Gamma_4|$, $|2\Gamma_3|$ D'après le théorème de Riemann-Roch, ils sont au moins simplement infinis. Le premier système ne peut coïncider avec $|\Gamma'_1| = |\Gamma_2 + \Gamma_4|$, car alors toutes les courbes de $|\Gamma'_1|$ seraient dégénérées et comprendraient comme partie $\Gamma_4$ ; les courbes $\Gamma_2$ et $\Gamma_4$ seraient équivalentes, ce qui est impossible. Le second système ne peut coïncider avec $|\Gamma'_1|$ pour une raison analogue. Le troisième système ne peut appartenir à $|\Gamma'_1|$ car la courbe $\Gamma_4$ serait une courbe canonique. Par contre, le système $|2\Gamma_3|$ découpe sur $\Gamma_1$ une série $g_2^1$ qui ne peut être que la série canonique. On a donc

$$|\Gamma'_1| = |\Gamma_2 + \Gamma_4| = |2\Gamma_3|.$$

Un raisonnement analogue montre que l'on a

$$|\Gamma'_2| = |\Gamma_1 + \Gamma_3| = |2\Gamma_4|,$$
$$|\Gamma'_3| = |\Gamma_1 + \Gamma_4| = |2\Gamma_2|,$$
$$|\Gamma'_4| = |\Gamma_2 + \Gamma_3| = |2\Gamma_1|.$$

De ce qui précède, on conclut

$$|C'_2| = |\Gamma'_1 + \Gamma_2| = |\Gamma_2 + 2\Gamma_3|,$$
$$|C'_2| = |\Gamma_1 + \Gamma'_2| = |\Gamma_1 + 2\Gamma_4|.$$

Les courbes $2\Gamma_1 + \Gamma_3$, $2\Gamma_2 + \Gamma_4$, $2\Gamma_3 + \Gamma_2$, $2\Gamma_4 + \Gamma_1$ sont donc des courbes tricanoniques et déterminent complètement le système $|C_3|$, de dimension trois. Observons que ce système a deux points-base : $A_{12}$ commun aux courbes $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ et le point $A_{34}$ commun aux courbes $\Gamma_3$, $\Gamma_4$. Le système tricanonique a le degré effectif sept et est donc simple.

6. Rapportons projectivement les courbes $C_3$ aux plans de l'espace. Le système ayant deux points-base $A_{12}$, $A_{34}$, il correspond à F une surface F' d'ordre sept sur laquelle sont tracées deux droites exceptionnelles $a_{12}$, $a_{34}$ respectivement homologues de $A_{12}$, $A_{34}$.

Désignons par $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$ les plans qui correspondent respectivement aux courbes $2\Gamma_1 + \Gamma_3$, $2\Gamma_2 + \Gamma_4$, $2\Gamma_3 + \Gamma_2$, $2\Gamma_4 + \Gamma_1$.

Au faisceau de courbes déterminé par $2\Gamma_1 + \Gamma_3$, $2\Gamma_4 + \Gamma_1$ correspond le faisceau de plans passant par la droite $a_1 = (\alpha_1, \alpha_4)$. Le premier faisceau contient la composante fixe $\Gamma_1$ et la droite $a_1$, qui est double pour F', correspond à la courbe $\Gamma_1$ dans un sens qui sera précisé plus loin.

De même, les droites $a_2 = (\alpha_2, \alpha_3)$, $a_3 = (\alpha_3, \alpha_1)$, $a_4 = (\alpha_4, \alpha_2)$ sont doubles pour la surface F' et correspondent respectivement aux courbes $\Gamma_2$, $\Gamma_3$, $\Gamma_4$.

La courbe $2\Gamma_1 + \Gamma_3$ passe deux fois par $A_{12}$ et une fois par $A_{34}$, donc le plan $\alpha_1$ contient la droite $a_{12}$ et coupe $a_{34}$ en un point que nous désignerons par $A_2$. Le plan $\alpha_2$ contient également $a_{12}$ et coupe $a_{34}$ en un point $A_1$ qui est distinct de $A_2$, puisque $\Gamma_3$ et $\Gamma_4$ ne se touchent par en $A_{34}$.

De même, les plans $\alpha_3$, $\alpha_4$ contiennent la droite $a_{34}$ et coupent $a_{12}$ en des points distincts $A_4$, $A_3$ respectivement.

La droite $a_1$, intersection de $\alpha_1$ et $\alpha_4$ passe nécessairement par $A_2$ et $A_3$. La droite $a_2$ passe par $A_1$, $A_4$, la droite $a_3$ par $A_2$, $A_4$, la droite $a_4$ par $A_1$, $A_3$.

La section de F' par le plan $\alpha_1$, qui correspond à la courbe $2\Gamma_1 + \Gamma_3$, doit comprendre la droite double $a_1$ comptée deux fois, la droite double $a_3$ et la droite exceptionnelle (simple) $a_{12}$. On en conclut que la droite $a_1$ est une droite double tacnodale de F', la droite double infiniment voisine se trouvant dans le plan $\alpha_1$. Aux points de la courbe $\Gamma_1$ correspondent les points infiniment voisins de cette droite double tacnodale.

De même, les droites $a_2$, $a_3$, $a_4$ sont doubles tacnodales pour F', les droites doubles infiniment voisines se trouvant respectivement dans les plans $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$.

7. Rapportons l'espace au tétraèdre de référence $A_1A_2A_3A_4$, l'équation du plan $\alpha_i$ étant $x_i = 0$ et formons l'équation de la surface F'.

On voit tout d'abord que les intersections de F' avec les plans $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$ sont respectivement

$$x_1 = x_4^4x_3^2x_2 = 0,\ x_2 = x_3^4x_4^2x_1 = 0,\ x_3 = x_1^4x_2^2x_4 = 0,\ x_4 = x_2^4x_1^2x_3 = 0.$$

Les autres termes de l'équation contiennent le facteur $x_1x_2x_3x_4$ et cette équation peut donc s'écrire

$$a_1x_1^4x_2^2x_4 + a_2x_2^4x_1^2x_3 + a_3x_3^4x_4^2x_1 + a_4x_4^4x_3^2x_2 + x_1x_2x_3x_4f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

où $f_3 = 0$ est l'équation d'une surface cubique passant simplement par les droites $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$. On a

$$f_3 = b_1x_1^2x_2 + b_2x_2^2x_1 + b_3x_3^2x_4 + b_4x_4^2x_3 + c_1x_2x_3x_4 + c_2x_3x_4x_1 + c_3x_4x_1x_2 + c_4x_1x_2x_3.$$

L'équation de la surface F' peut donc finalement s'écrire

$$a_1x_1^4x_2^2x_4 + a_2x_2^4x_1^2x_3 + a_3x_3^4x_4^2x_1 + a_4x_4^4x_3^2x_2 + (b_1x_1^2x_2 + b_2x_2^2x_1 + b_3x_3^2x_4 + b_4x_4^2x_3 + c_1x_2x_3x_4 + c_2x_3x_4x_1 + c_3x_4x_1x_2 + c_4x_1x_2x_3)x_1x_2x_3x_4 = 0.$$

Les adjointes d'ordre $7 - 4 = 3$ à F' sont des surfaces cubiques circonscrites au tétraèdre de référence et touchant le long de $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ respectivement les plans $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$. De telles surfaces n'existent pas et l'on a bien $p_g = 0$.

Les biadjointes sont des surfaces du sixième ordre passant trois fois par les droites $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ en touchant respectivement le long de ces droites les plans $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$ et deux fois par les droites $a_{12}$, $a_{34}$. Elles sont formées par les quatre faces du tétraèdre de référence et par les quadriques

$$x_1x_2 + kx_3x_4 = 0.$$

On a donc bien $P_2 = 2$ et les courbes bicanoniques sont irréductibles.

Les triadjointes sont formées des faces du tétraèdre de référence comptées deux fois et des plans de l'espace. On a $P_3 = 4$.

La surface $F'$ est l'image de l'involution privée de points unis déterminée sur la surface du cinquième ordre

$$a_1X_1^5 + a_2X_2^5 + a_3X_3^5 + a_4X_4^5 + b_1X_1^3X_2X_3 + b_2X_2^3X_1X_4 + \\ + b_3X_3^3X_2X_4 + b_4X_4^3X_1X_3 + c_1X_2^2X_4^2X_3 + c_2X_1^2X_3^2X_4 + \\ c_3X_4^2X_1^2X_2 + c_4X_2^2X_3^2X_1 = 0$$

par l'homographie de période cinq

$$X_1' : X_2' : X_3' : X_4' = X_1 : \epsilon^3X_2 : \epsilon^2X_3 : \epsilon X_4,$$

où $\epsilon$ est une racine primitive cinquième de l'unité.

On obtient cette surface en rapportant projectivement aux plans de l'espace les surfaces cubiques

$$\lambda_1X_1^2X_3 + \lambda_2X_2^2X_4 + \lambda_3X_3^2X_2 + \lambda_4X_4^2X_1 = 0.$$

Ainsi se trouve démontré le théorème suivant :

*Une surface algébrique de genres* $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 2$, *à courbes bicanoniques irréductibles, peut se ramener à la surface image d'une involution cyclique d'ordre cinq, privée de points unis, appartenant à une surface de genres* $p_a = p_g = 4$, $p^{(1)} = 6$, *dans l'hypothèse où les quatre points-base du système bicanonique sont distincts.*

Liège, le 1er septembre 1958.

---

BIBLIOGRAPHIE

(1) *Un'osservazione relativa alla superficie di bigenere uno* (Rendiconti della Accademia di Bologna, 1907-1908, pp. 40-45). Au sujet de cette surface, voir aussi F. ENRIQUES, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (Memorie della Soc. Ital. delle Scienze, detta dei XL, 1896, t. X, pp. 1-81) ; *Sopra le superficie algebriche di bignere uno* (Idem., t. XIV, 1906, pp. 327-352).

(2) Voir note exposé sur *les Surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls* (Actualités scient., N° 123, 1934, Paris, Hermann).

(3) *Sur une surface algébrique de genres zéro et de bigenre deux* (Rendiconti della Accad. Naz. dei Lincei, 2e sem. 1931, pp. 479-481) ; *Sur les surfaces algébriques de genres arithmétique et géométrique zéro dont le genre linéaire est égal à deux* (Bull. Acad. roy. de Belgique, 1932, pp. 26-37).