Bulletin de la Classe des sciences

Note sur les surfaces de genres zéro possédant un réseau irréductible de courbes bicanoniques (première communication)

Lucien Godeaux

Résumé

On démontre qu'une surface algébrique de genres Pa = PΦ = 0, P(1)= P2 = 3, dont les courbes bicanoniques sont irréductibles, contient une courbe T' de genre trois et de degré deux, telle que la courbe soit une courbe bicanonique et que, si les courbes T' sont les adjointes à T' , les courbes T' + T' soient des courbes tricanoniques et que les courbes 2T' soient des courbes quatre-canoniques. Le diviseur de Severi de la surface est pair.

Citer ce document / Cite this document :

Godeaux Lucien. Note sur les surfaces de genres zéro possédant un réseau irréductible de courbes bicanoniques (première communication). In: Bulletin de la Classe des sciences, tome 45, 1959. pp. 52-58;

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1959.67638;

https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1959_num_45_1_67638;

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Note sur les surfaces de genres zéro possédant un réseau irréductible de courbes bicanoniques,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(Première communication).

Résumé. — On démontre qu'une surface algébrique de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 3$, dont les courbes bicanoniques sont irréductibles, contient une courbe Γ de genre trois et de degré deux, telle que la courbe 2Γ soit une courbe bicanonique et que, si les courbes Γ' sont les adjointes à Γ, les courbes $\Gamma + \Gamma'$ soient des courbes tricanoniques et que les courbes $2\Gamma'$ soient des courbes quatre-canoniques. Le diviseur de Severi de la surface est pair.

Le premier exemple d'une surface algébrique de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 3$ dont les courbes bicanoniques sont irréductible est dû à M. Campedelli [1]. C'est un plan double dont la courbe de diramation, du dixième ordre, possède six couples de points triples infiniment voisins, non situés sur une conique. Nous avons plus tard construit un second exemple comme image d'une involution cyclique d'ordre huit, privée de points unis, appartenant à une surface de genres $p_a = p_g = 7$, $p^{(1)} = 17$, $P_2 = 24$ [2]. Récemment, dans un mémoire en cours de publication, M. Burniat a réussi à construire des plans quadruples abéliens dont l'un a les genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 3$.

---

[1] CAMPEDELLI, *Sui piani doppi con curva di diramazione del decimo ordine* (RENDICONTI DELLA ACCADEMIA DEI LINCEI, 1° sem. 1932, pp. 358-362) ; *Sopra alcuni piani doppi notevoli con curva di diramazione del decimo ordine* (IDEM, pp. 536-542).

[2] GODEAUX, *Sur la construction de surfaces non rationnelles de genres zéro* (BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, 1949, pp. 688-693).

Dans l'exemple que nous avons construit, il existe une courbe Γ, de genre trois et de degré deux, telle que la courbe 2Γ soit une courbe bicanonique. De plus, si $|\Gamma'|$ est le système adjoint à la courbe Γ, les courbes $\Gamma + \Gamma'$ sont des courbes tricanoniques et les courbes $2\Gamma'$ sont des courbes quatre-canoniques ([3]). L'objet de cette note préliminaire est de démontrer que cette circonstance se présente pour toute surface F de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = p_2 = 3$.

Appliquant ce théorème au plan double de M. Campedelli, on voit que la courbe de diramation, du dixième ordre, dégénère en une quartique γ et en trois coniques γ_1, γ_2, γ_3. Ces trois coniques se touchent deux à deux en deux points et la quartique γ passe par les six points de contact en y touchant les coniques. Le plan double obtenu dans ces conditions avait d'ailleurs été considéré par M. Campedelli comme cas particulier ; nous démontrons que c'est le cas général.

1. Soit F une surface algébrique de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 3$, dont les courbes bicanoniques sont en général irréductibles.

Les courbes bicanoniques C_2 forment un réseau $|C_2|$ irréductible de genre sept et de degré huit.

Les courbes tricanoniques C_3 forment un système linéaire de dimension $P_3 - 1 = 6$, de degré 18 et de genre 13.

Le système quatre-canonique $|C_4|$ a la dimension $P_4 - 1 = 12$, le degré 32 et le genre 21.

Le système six-canonique $|C_6|$ a la dimension $P_6 - 1 = 30$, le degré 72 et le genre 43.

Une courbe 4-canonique C_4 ne peut comprendre une courbe tricanonique comme partie, puisque $p_g = 0$, mais il y a ∞^4 de ces courbes qui sont dégénérées en deux courbes bicanoniques C^2. Il en résulte que dans le système 4-canonique, il y a un système linéaire de dimension sept dont les courbes ne sont pas formées de deux courbes bicanoniques. Nous désignerons ce système par $|\overline{C}_4|$.

([1]) D'après une communication de M. Burniat, la même propriété existe sur le plan quadruple abélien qu'il a construit.

2. Prenons comme modèle projectif de la surface F la surface tricanonique, d'ordre 18, à sections hyperplanes C_3 de genre 13, dans un espace linéaire S_3 à six dimensions. Nous la désignerons dans la suite par F.

Sur la surface F, les courbes C_2 sont d'ordre 12 et les hyperplans les coupent suivant les groupes canoniques. Par conséquent, il y a ∞^9 hyperquadriques V_2^5 de S_6 passant par une courbe C_2. Ces hyperquadriques coupent ultérieurement F suivant des courbes 4-canoniques C_4.

Les hyperquadriques passant par une courbe C_2 découpent, sur une autre courbe C_2, soit $\overline{C}_2$, une série linéaire d'ordre 16 et de dimension 9, par conséquent il n'y a pas en général d'hyper quadrique V_5^2 contenant à la fois C_2 et $\overline{C}_2$, en dehors éventuellement des hyperquadriques contenant F.

Les hyperquadriques passant par une courbe C_2 découpent encore sur F des courbes $\overline{C}_4$. Or, les courbes $\overline{C}_4$ forment un système linéaire de dimension sept et il y a ∞^9 hyperquadriques passant par C_2, donc il y a au moins deux hyperquadriques indépendantes contenant la surface F.

Nous supposerons que la surface F appartient à k ($k \geqslant 2$) hyperquadriques V_5^2 linéairement indépendantes. Dans ces conditions, les hyperquadriques passant par une courbe C_2 découpent, sur F, ∞^{9-k} courbes $\overline{C}_4$.

3. Dans le système 6-canonique $|C_6|$ de F, il y a :

des courbes décomposées en trois courbes bicanoniques C_2.

des courbes formées de deux courbes tricanoniques C_3.

des courbes formées d'une courbe 4-canonique $\overline{C}_4$ et d'une courbe C_2.

Le système de dimension minimum contenant les courbes C_6 formées de trois courbes C_2 a la dimension $r \geqslant 9$. En effet, si l'on rapporte projectivement les courbes C_2 aux droites d'un plan σ, on obtient un plan octuple dont la courbe de diramation a l'ordre six au moins (et précisément l'ordre six si le plan octuple est cyclique). Aux courbes C_6 formées de trois courbes C_2 correspondent des ternes de droites octuples, contenus dans le système des cubiques octuples de σ, dont la dimension est 9. Appelons Σ ce système.

Soit Σ_1 le système linéaire compris dans le système $|C_6|$ n'ayant aucune courbe commune avec Σ. Le système Σ_1 a la dimension $29 - r$. Parmi ses courbes se trouvent les courbes formées de deux courbes C_3, qui sont en nombre ∞^{12} et les courbes formées d'une courbe $\overline{C}_4$ et d'une courbe C_2, qui sont en nombre ∞^9. Il en résulte qu'il y a au moins ∞^{r-8} courbes C_6 qui sont formées à la fois de deux courbes C_3 et d'une courbe $\overline{C}_4$ jointe à une courbe C_2. Comme $r \geqslant 9$, il y a au moins ∞^1 de ces courbes.

4. La circonstance précédente peut se présenter de deux manières :

Il existe sur F deux courbes Γ_1, Γ_2 dont la somme est une courbe C_2 et deux courbes X_1, X_2 dont la somme est une courbe $\overline{C}_4$, de telle sorte que les courbes $\Gamma_1 + X_1$, $\Gamma_2 + X_2$ soient des courbes tricanoniques.

On a

$$C_2 = \Gamma_1 + \Gamma_2, \quad C_1' = C_3 = \Gamma_1' + \Gamma_2 = \Gamma_2 + X_2,$$

d'où $X_2 = \Gamma_1'$ et de même $X_1 = \Gamma_2'$.

Les courbes $\Gamma_1 + \Gamma_2'$, $\Gamma_2 + \Gamma_1'$ sont tricanoniques, donc des sections hyperplanes de F. Désignons par r_1, r_2 les dimensions des espaces linéaires contenant Γ_1, Γ_2 et par π_1, π_2 les genres de ces courbes.

Les hyperplans contenant Γ_1 sont en nombre ∞^{5-r_1} et découpent sur Γ_2 la série canonique complète, puisque F est régulière. On a donc $\pi_2 - 1 = 5 - r_1$, c'est-à-dire $\pi_2 + r_1 = 6$. On a de même $\pi_1 + r_2 = 6$. Mais de plus, la série canonique complète d'une courbe n'ayant pas de point fixe, les courbes Γ_1, Γ_2 ne se rencontrent pas. Une courbe C_2 serait donc dégénérée en deux courbes Γ_1, Γ_2 ne se rencontrant pas, ce qui est impossible. D'ailleurs, $\Gamma_1 + \Gamma_2$ ayant le genre sept, on aurait $\pi_1 + \pi_2 = 8$ d'où $r_1 + r_2 = 4$. Les courbes Γ_1, Γ_2 ne peuvent être rationnelles puisque Γ_1', Γ_2' doivent exister ; on doit donc avoir $r_1 > 1$, $r_2 > 1$, donc $r_1 = r_2 = 2$. Par deux plans de S_6 ne se rencontrant pas passe un hyperplan, donc la courbe $\Gamma_1 + \Gamma_2$ appartiendrait à un hyperplan, ce qui est impossible.

5. Le second cas à examiner est celui où il existe une courbe C_2 décomposée en une courbe Γ comptée deux fois.

On a donc

$$C_2 = 2\Gamma,\ C_2' = C_3 = \Gamma + \Gamma',\ C_3' = C_4 = 2\Gamma'.$$

Sur F, la courbe Γ est d'ordre six, elle est rencontrée en quatre points par les courbes C_2 et en huit points par les courbes C_4. De $C_4 = 2\Gamma'$, on déduit que la courbe Γ est de genre trois et de $C_3 = \Gamma + \Gamma'$, qu'elle est de degré deux.

Il y a ∞^2 courbes Γ', donc il y a ∞^2 courbes C_6 formées à la fois de deux courbes C_3 et d'une courbe C_4 jointe à une courbe C_2. On a donc $r = 10$.

D'autre part, on a

$$2\Gamma' = 4\Gamma = 2C_2,$$

et comme les courbes Γ' ne peuvent être équivalentes à une courbe C_2, on voit que le diviseur de Severi σ de F est pair.

La courbe Γ appartient à un espace S_3 à trois dimensions et celui-ci doit nécessairement appartenir à $k - 1$ au moins des hyperquadriques contenant F.

Les hyperquadriques touchant F le long de la courbe Γ découpent sur F des courbes du système $|\bar{C}_4|$. Parmi ces hyperquadriques se trouvent les cônes ayant pour sommet l'espace S_3 ; ces cônes forment un système linéaire de dimension cinq. Les courbes $\bar{C}_4$ découpées par les hyperquadriques passant par une courbe C_2 sont en nombre ∞^{9-k} et on a donc $9 - k \geqslant 5$, d'où $k \leqslant 4$. La surface F appartient donc au plus à quatre hyperquadriques linéairement indépendantes (et au moins à deux).

6. Les hyperquadriques V_5^2 ne contenant pas F découpent sur cette surface un système linéaire Σ_2 de dimension $27 - k$. Ce système est celui de dimension minimum contenant les courbes formées de deux courbes C_3. Le système Σ de dimension minimum, contenant les courbes formées de trois courbes C_2, a comme on l'a vu la dimension 10. Comme le système $|C_6|$ a la dimension 30, les systèmes Σ et Σ_2 ont en commun un système linéaire Σ_3 de dimension $7 - k$.

Dans Σ, les courbes C_6 formées de trois courbes C_2, forment un système continu de dimension six. Il y a au moins ∞^{3-k} courbes de Σ_3 appartenant à ce système continu ; une de ces courbes est formée d'une part par trois courbes C_2 et d'autre part par deux courbes C^3. Par conséquent, si $k = 2$, il existe au moins ∞^1 courbes C_6 présentant cette particularité, si $k = 3$, il en existe au moins un nombre fini, si $k = 4$, il peut ne pas en exister.

En reprenant le raisonnement fait dans une note antérieure [1], on voit que deux cas peuvent se présenter :

a) Il existe sur F quatre courbes Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 telles que les courbes $\Gamma_1 + \Gamma_2$, $\Gamma_3 + \Gamma_4$ soient des courbes bicanoniques et les courbes $2\Gamma_1 + \Gamma_3$, $2\Gamma_2 + \Gamma_4$ des courbes tricanoniques. La courbe C_6 est formées par les courbes $\Gamma_1 + \Gamma_2$ comptée deux fois et par la courbe $\Gamma_3 + \Gamma_4$.

b) Il existe sur F six courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_6$ telles que les courbes $\Gamma_1 + \Gamma_2$, $\Gamma_3 + \Gamma_4$, $\Gamma_5 + \Gamma_6$ soient bicanoniques et les courbes $\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_1$, $\Gamma_2 + \Gamma_4 + \Gamma_6$ soient tricanoniques. La courbe C_6 est formée par la somme des six courbes Γ.

Nous reviendrons plus tard sur l'étude de ces questions.

7. Considérons le plan double de M. Campedelli. La courbe de diramation de ce plan est une courbe D_{10} d'ordre dix, possédant six points triples $A_1, A_2, \ldots, A_6$ non situés sur une conique, chacun des points triples ayant un point triple infiniment voisin. Nous désignerons par a la tangente (triple) à D_{10} au point A.

Les courbes canoniques du plan double devraient être des coniques passant par les six points A ; ces courbes n'existent pas et on a $p_g = 0$. Les courbes bicanoniques sont les quartiques doubles γ passant par les points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ en y touchant respectivement les droites $a_1, a_2, \ldots, a_6$. Elles sont irréductibles, on a $P_2 = 3$ et nous pouvons appliquer le théorème établi plus haut.

Il existe une courbe bicanonique formée d'une courbe comptée deux fois. Une courbe γ ne peut dégénérer en une conique comptée deux fois, puisque les points A ne peuvent appartenir à une co-

---

[1] *Sur les surfaces de genres géométrique et arithmétique nuls possédant un faisceau de courbes bicanoniques irréductibles* (BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROY. DE BELGIQUE, 1958, pp. 783-749).

nique. La seule solution est donc qu'une courbe γ fasse partie de la courbe de diramation D_{10}.

Dans ces conditions, la courbe D_{10} est complétée par une courbe du sixième ordre possédant six tacnodes $A_1, A_2, \ldots, A_6$, les tangentes tacnodales étant respectivement $a_1, a_2, \ldots, a_6$. Cette courbe, de genre — 2, est dégénérée et comme on le voit aisément, dégénérée en trois coniques deux à deux bitangentes.

De ce qui précède, on conclut que la courbe D_{10} est nécessairement réductible. Dans son mémoire, M. Campedelli avait signalé cette réductibilité probable de la courbe D_{10} et avait étudié le cas où cette courbe dégénère en une quartique et trois coniques comme il vient d'être indiqué, obtenant ainsi le plan double le plus général du type considéré.

Villefranche-sur-Mer, le 5 janvier 1959.