Bulletin de la Classe des sciences

Surfaces dont les réglées gauches asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires

Lucien Godeaux

Résumé
Remarques sur la construction des surfaces dont les réglées asymptotiques gauches appartiennent à des complexes linéaires. La surface la plus générale de cette espèce ne peut être obtenue comme surface focale d'une congruence W dont l'autre surface focale a ses asymptotiques d'un mode appartenant à des complexes linéaires.

Surfaces dont les réglées gauches asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Remarques sur la construction des surfaces dont les réglées asymptotiques gauches appartiennent à des complexes linéaires. La surface la plus générale de cette espèce ne peut être obtenue comme surface focale d'une congruence W dont l'autre surface focale a ses asymptotiques d'un mode appartenant à des complexes linéaires.

C. Segre a remarqué que si une surface réglée est nappe focale d'une congruence W, la seconde nappe focale de celle-ci est en général une surface dont les asymptotiques d'un mode appartiennent à des complexes linéaires. G. Fubini est parvenu à démontrer l'inverse de ce théorème, c'est-à-dire qu'une surface dont les asymptotiques d'un mode appartiennent à des complexes linéaires peut toujours être considérée comme nappe focale d'une congruence W dont la seconde nappe focale est une réglée. Ce théorème a permis à M. Terracini de déterminer toutes les surfaces dont les asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires (1).

Soit (x) une surface rapportée à ses asymptotiques u, v. Aux points d'une ligne u (sur laquelle u varie), menons les tangentes aux courbes v. Nous obtenons ainsi une surface réglée asymptotique gauche que nous dirons associée à la ligne u. Cela étant, nous dirons que la surface (x) est une surface F_0 si les lignes u

(1) Terracini, *Sulle superficie aventi un sistema, o entrambi, di asintotiche in complessi lineari*. Appendice IV à la *Geometria proiettiva differenziale* de G. Fubini et E. Cech, tome II (Bologna, Zanichelli, 1927).

sont des droites, une surface F_1 si les lignes u appartiennent à des complexes linéaires, une surface F_2 si les réglées gauches asymptotiques associées aux lignes u appartiennent à des complexes linéaires.

Si (x) et $(\bar{x})$ sont les deux nappes focales d'une congruence W, le théorème de Fubini exprime que si (x) est une surface F_1, la congruence peut toujours être choisie de telle sorte que $(\bar{x})$ soit une surface F_0. L'interprétation de ce théorème lorsque l'on considère les suites de Laplace de l'espace S_5 associées aux surfaces (x), $(\bar{x})$ conduit à une généralisation de la question (²).

Représentons par les points U, V de l'hyperquadrique Q de Klein les tangentes aux asymptotiques u, v de la surface (x), par $\bar{U}$, $\bar{V}$ les tangentes aux asymptotiques de la surface $(\bar{x})$. Les points U, V d'une part, les points $\bar{U}$, $\bar{V}$ d'autre part, sont consécutifs dans des suites de Laplace L : ..., U_n, ..., U, V, ..., V_n, ... et $\bar{L}$: ..., $\bar{U}_n$ ..., $\bar{U}$, $\bar{V}$, ..., $\bar{V}_n$, ..., chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u. Les droites de la congruence W sont représentées par des points J intersections des droites UV, $\bar{U}\bar{V}$ et J appartient à une suite de Laplace inscrite dans les suites L, $\bar{L}$.

Si (x) est une surface F_0, la suite L s'arrête au point U, si c'est une surface F_1, elle s'arrête au point U_1, si c'est une surface F_2, au point U_2, en présentant chaque fois le cas de Laplace. Le théorème de Fubini se traduit de la manière suivante : Si la suite L s'arrête au point U_1, on peut choisir la congruence W de manière que la suite $\bar{L}$ s'arrête au point $\bar{U}$.

Dans nos recherches citées plus haut, nous avons montré que si (x) est une surface F_1, c'est-à-dire si la suite L s'arrête au point U_1 (en présentant le cas de Laplace), la suite $\bar{L}$ s'arrête au point $\bar{U}$, ou au point $\bar{U}_1$, ou au point $\bar{U}_2$ et la surface $(\bar{x})$ est une surface F_0, ou une surface F_1, ou une surface F_2. Ceci nous conduit au pro-

(²) *La théorie des surfaces et l'Espace réglé* (Actualités scient., N° 138, Paris, Hermann, 1934), *Sur les surfaces associées à une suite de Laplace terminée* (Colloque de Géométrie différentielle du C. B. R. M., Paris, Masson, 1951, pp. 191-203), *Alcune Osservazioni sulle Congruenze W* (Rendiconti del Seminario di Torino, 1953-54, pp. 39-48), *Sur les surfaces dont les réglées gauches asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires* (Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar, Hamburg, 1955, pp. 57-63).

blème suivant : Si (x) est une surface F_2, c'est-à-dire si la suite L s'arrête au point U_2 en présentant le cas de Laplace, est-il toujours possible de choisir la congruence W de telle sorte que la suite $\overline{L}$ s'arrête au point $\overline{U}_1$, c'est-à-dire que $(\bar{x})$ soit une surface F_1. Contrairement à ce qu'on pourrait penser, il n'en est rien. C'est ce que nous nous proposons de démontrer dans cette note.

1. Soit (j) une congruence W dont les surfaces focales sont (x), $(\bar{x})$, les asymptotiques sur ces surfaces étant les courbes u, v. Soient U, V les points de l'hyperquadrique Q de Klein représentant les tangentes xx^{10}, xx^{01} aux asymptotiques u, v en un point x de la surface (x). On a

$$U^{10} + 2bV = 0, \quad V^{01} + 2aU = 0,$$

a et b étant des fonctions de u, v. Les points U, V sont consécutifs dans une suite de Laplace

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots, \tag{L}$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

A la surface $(\bar{x})$, nous associons de même une suite de Laplace analogue

$$\ldots, \overline{U}_n, \ldots, \overline{U}_1, \overline{U}, \overline{V}, \overline{V}_1, \ldots, \overline{V}_n, \ldots \tag{$\overline{L}$}$$

La droite j est représentée par un point J appartenant aux droites UV, $\overline{U}\overline{V}$ et ce point décrit un réseau conjugué aux congruences engendrées par ces droites.

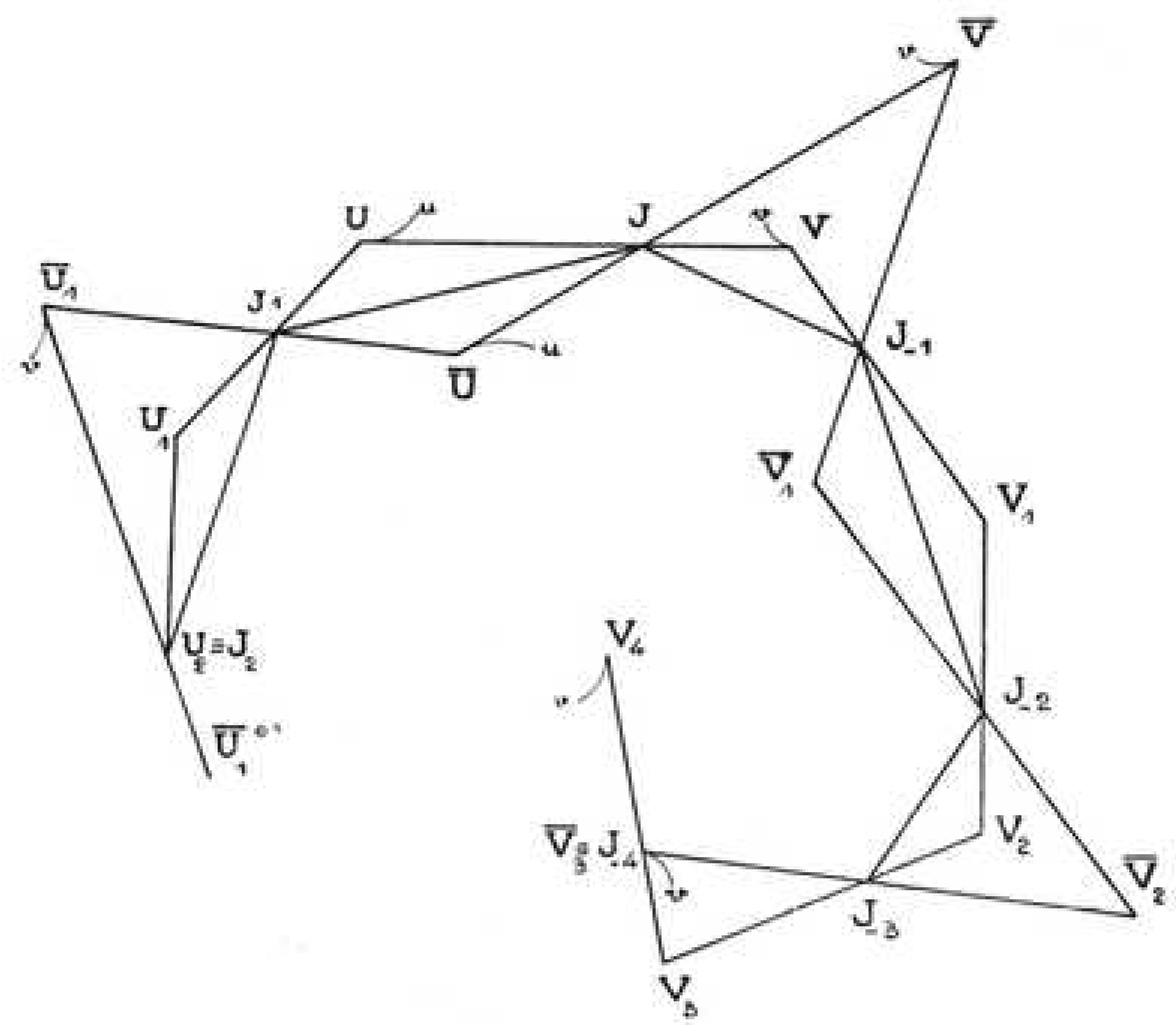
Le point J appartient à une suite de Laplace

$$\ldots, J_n, \ldots, J_1, J, J_{-1}, \ldots, J_{-n}, \ldots \tag{J}$$

inscrite dans les suites L, $\overline{L}$. D'une manière précise, le point J_n appartient aux droites $U_{n-1}U_n$ et $\overline{U}_{n-1}\overline{U}_n$ et le point J_{-n} aux droites $V_{n-1}V_n$, $\overline{V}_{n-1}\overline{V}_n$.

Supposons que la surface (x) soit une surface F_2 et la surface $(\bar{x})$ une surface F_1. Dans ces conditions, la suite L s'arrête au point U_2 en présentant le cas de Laplace et la suite $\overline{L}$ s'arrête au point $\overline{U}_1$ en présentant le cas de Laplace également. Nous supposerons que les points U_2, $\overline{U}_1$, qui ne dépendent que de v, engendrent, lorsque v varie, des courbes n'appartenant pas à des hyperplans.

Dans ces conditions, la suite L se termine au point V_4 en présentant le cas de Goursat et la suite $\overline{L}$ se termine au point $\overline{V}_3$ en présentant également le cas de Goursat. Nous avons établi que les suite L et $\overline{L}$ présentent la configuration indiquée par la figure ci-contre.



Le point J_2 coïncide avec le point U_2 et appartient à la droite $\overline{U}_1\overline{U}_1^{01}$.

Le premier point à établir est la possibilité de ces circonstances, c'est-à-dire :

1) Déterminer J de telle sorte que J_2 coincide avec U_2.

2) Déterminer J de telle sorte que J_2 se trouve sur la droite $\overline{U}_1\overline{U}_1^{01}$.

Ce sont ces deux problèmes que nous allons d'abord étudier.

2. Rappelons tout d'abord les notations qui nous sont nécessaires.

Nous avons

$$U_1 = U^{01} - U(\log.\ b)^{01}, \quad U_2 = U_1^{01} - U_1\,(\log.\ bh)^{01},$$

où

$$h_1 = -(\log.\ b)^{11} + 4ab, \ h_2 = -(\log.\ bh_1)^{11} + h_1.$$

Ensuite

$$J_1 = \mu U_1 - \mu_1 U, \qquad J_2 = \mu_1 U_2 - \mu_2 U_1,$$

où

$$\mu_1 = \mu^{01} - \mu\ (\log.\ b)^{01}, \quad \mu_2 = \mu_1^{01} - \mu_1\ (\log.\ bh_1)^{01}.$$

La condition pour que la suite L s'arrête au point U_2 en présentant le cas de Laplace est $h_2 = 0$, car on a $U_2^{10} = h_2 U_1$. Pour que d'autre part J_2 coïncide avec U_2, on doit avoir $\mu_2 = 0$, c'est-à-dire

$$\mu^{02} - \mu^{01}\ (\log.\ b^2 h_1)^{01} - \mu[(\log.\ b)^{02} - (\log.\ b)^{01}\ (\log.\ bh_1)^{01}] = 0.$$

En considérant u comme une constante, soient $\varphi_1(u, v)$, $\varphi_2(u, v)$ deux solutions particulières indépendantes de cette équation. La solution générale peut s'écrire

$$\mu = \theta_1(u)\varphi_1(u,\ v) + \theta_2(u)\varphi_2(u,\ v),$$

où $\theta_1(u)$, $\theta_2(u)$ sont des fonctions arbitraires de u.

Nous avons

$$J = \lambda U - \mu V$$

avec, par un choix convenable du facteur de proportionnalité (Demoulin),

$$\mu^{10} + 2b\lambda = 0, \quad \lambda^{01} + 2a\mu = 0.$$

On a donc

$$2b\lambda + \theta_1'\varphi_1 + \theta_2'\varphi_2 + \theta_1\varphi_1^{10} + \theta_2\varphi_2^{10} = 0,$$

et ensuite

$$2b\lambda\ (\log.\ b)^{01} + 2b\lambda^{01} + \theta_1'\varphi_1^{01} + \theta_2'\varphi_2^{01} + \theta_1\varphi_1^{11} + \theta_2\varphi_2^{11} = 0.$$

En tenant compte du fait que φ_1, φ_2 satisfont à la relation

$$\mu^{11} - \mu^{10} (\log. b)^{01} - 4ab\mu = 0,$$

on en déduit

$$\theta'_1[\varphi_1^{01} - \varphi_1 (\log. b)^{01}] + \theta'_2[\varphi_2^{01} - \varphi_2 (\log. b)^{01}] = 0.$$

Si θ_1, θ_2 ne sont pas des constantes, l'expression

$$\frac{\varphi_1^{01} - \varphi_1 (\log. b)^{01}}{\varphi_2^{01} - \varphi_2 (\log. b)^{01}}$$

doit être indépendante de v. En exprimant que sa dérivée par rapport à v est nulle, on trouve que les solutions φ_1, φ_2 ne sont pas indépendantes ou que b ne dépend que de v. On doit donc prendre pour θ_1, θ_2 des constantes C_1, C_2.

On aura donc

$$\begin{aligned} \mu &= C_1\varphi_1(u, v) + C_2\varphi_2(u, v), \\ 2b\lambda &= - C_1\varphi_1^{10} - C_2\varphi_2^{10} ; \end{aligned}$$

et dans ces conditions, le point J_2 coincidera avec le point U_2.

3. Abordons maintenant le second problème et, pour des raisons de simplicité typographique, remplaçons $\bar{L}$ par L. Il s'agit de déterminer λ et μ de telle façon que le point J_2 appartienne à la droite $U_1U_1^{01}$.

Nous avons

$$J_1 = \mu U_1 - \mu_1 U,$$

d'où l'on déduit

$$J_1^{01} - J_1 (\log. b\mu_1)^{01} = \mu[U_1^{01} - U_1 (\log. \mu_1)^{01}].$$

Observons que l'on a

$$\mu_1 = \mu^{01} - \mu \ (\log. b)^{01}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \mu_1^{10} &= \mu^{11} - \mu^{10} (\log. b)^{01} - \mu (\log. b)^{11} \\ &= \mu^{11} - \mu^{10} (\log. b)^{01} - 4ab\mu = 0. \end{aligned}$$

Par suite, on a

$$[J_1^{01} - J_1 (\log. b\mu_1)^{01}]^{10} = [J_1^{01} - J_1 (\log. b\mu_1)^{01}] (\log. \mu)^{10}.$$

Si l'on prend

$$J_2 = \frac{1}{\mu} [J_1^{01} - J_1 (\log. b\mu_1)^{01}] = U_1^{01} - U_1 (\log. \mu_1)^{01},$$

on a $J_2^{10} = 0$ et, comme nous l'avons établi, le point J_2 ne dépend que de v.

Observons que si l'on a $\mu_1^{10} = 0$, c'est-à-dire

$$\mu^{11} - \mu^{10} (\log. b)^{01} - \mu (\log. b)^{11} = 0,$$

comme on a $\mu^{11} - \mu^{10} (\log. b)^{01} - 4ab\mu = 0$, on en déduit $(\log. b)^{11} = 4ab$ et $h_1 = 0$. La condition nécessaire et suffisante pour que la suite L se termine au point U_1 en présentant le cas de Laplace et que le point J_2 appartienne à la droite $U_1U_1^{01}$ est que $\mu_1^{10} = 0$.

4. Revenons à notre problème initial. La surface (x) et la suite L sont données. On choisit la congruence W en se donnant le point J de la droite UV, satisfaisant aux conditions trouvées plus haut pour que J_2 coïncide avec U_2. Il s'agit de trouver la surface $(\bar{x})$ et la suite $\bar{L}$ de maàière que celle-ci s'arrête au point $\bar{U}_1$ et que la droite $\bar{U}_1\bar{U}_1^{01}$ passe par le point $J_2 \equiv U_2$.

Pour la suite $\bar{L}$, nous utiliserons les mêmes notations que pour la suite L, mais surmontées d'une barre. On devra donc avoir $\bar{h}_1 = 0$ et $\bar{\mu}_1$ ne devra dépendre que de v.

Rappelons quelques formules établies précédemment (¹), mais en tenant compte ici que $h_2 = 0$. Posons

$$\begin{aligned}
\psi &= \lambda[2\lambda_2 + 2\lambda_1 (\log. ak_1)^{10} + \lambda\alpha] \\
&\qquad - \lambda_1^2 - \mu[2\mu_1 (\log. bh_1)^{01} + \mu\beta] + \mu_1^2, \\
\xi &= 2\lambda_3 + 2\lambda_2 (\log. a^3k_1^2k_2)^{10} + 2\alpha_1\lambda_1 \\
&\qquad + \alpha\lambda (\log. a^2\alpha)^{10} + 4b[2\mu_1 (\log. bh_1)^{01} + \mu\beta[, \\
\eta &= -2\beta_1\mu_1 - \beta\mu (\log. b^2\beta)^{01} - 4a[\lambda_2 + \lambda_1 (\log. ak_1)^{10} + \lambda\alpha],
\end{aligned}$$

(¹) Voir notre note *Sulle congruenze W* (Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni, Roma, 1956, pp. 36-45). Il faut toutefois modifier les notations de cette note en remplaçant ξ, η respectivement par $-\eta$, $-\xi$.

où l'on a

$$k_i = -(\log.\, a k_1 \ldots k_{i-1})^{11} + k_{i-1},$$
$$\lambda_i = \lambda_{i-1}^{01} - \lambda_{i-1}(\log.\, a k_1 \ldots k_{i-1})^{10},$$
$$\alpha = 2\,(\log.\, a)^{20} + \overline{(\log.\, a)^{10}}^{\,2} + 4(b^{01} + c_1),$$
$$\beta = 2\,(\log.\, b)^{02} + \overline{(\log.\, b)^{01}}^{\,2} + 4\,(a^{10} + c_2),$$
$$\alpha_1 = \alpha + (\log.\, a k_1)^{20} + (\log.\, a k_1)^{10}\,(\log.\, a^2 k_1)^{10},$$
$$\beta_1 = \beta + (\log.\, b h_1)^{02} + (\log.\, b h_1)^{01}\,(\log.\, b^2 h_1)^{01}.$$

Nous avons les relations

$$\xi^{01} + 2b\eta = 0, \quad \eta^{10} + 2a\xi = 0, \quad \psi^{10} = \xi\lambda, \quad \psi^{01} = \eta\mu.$$

Nous avons en outre

$$\frac{1}{\psi}\,\mathrm{J} = \bar\lambda\overline{\mathrm{U}} - \bar\mu\overline{\mathrm{V}},$$

où

$$\bar\lambda = \lambda : \psi, \quad \bar\mu = \mu : \psi.$$

Nous avons ensuite

$$\bar\mu^{10} + 2\bar b\bar\lambda = 0, \quad \lambda^{01} + 2\bar a\bar\mu = 0,$$

où

$$2\bar b = \frac{\lambda}{\mu}\left(\log.\frac{\psi}{\lambda}\right)^{10} = \frac{2b\psi + \xi\mu}{\psi},$$
$$2\bar a = \frac{\lambda}{\mu}\left(\log.\frac{\psi}{\lambda}\right)^{01} = \frac{2a\psi + \eta\lambda}{\psi}.$$

La valeur de $\bar\mu_1$ est donnée par

$$\bar\mu_1 = \bar\mu^{01} - \bar\mu\,(\log.\, \bar b)^{01} = \frac{\bar b\bar\mu^{01} - \bar\mu\bar b^{01}}{\bar b}$$

c'est-à-dire par

$$\bar\mu_1 = \frac{(2b\psi + \xi\mu)\left(\dfrac{\mu}{\psi}\right)^{01} - \mu\left(\dfrac{2b\psi + \xi\mu}{\psi}\right)^{01}}{2b\psi + \xi\mu}.$$

Un calcul simple donne

$$\bar{\mu}_1 = \frac{2b\mu_1}{2b\psi + \xi\mu}.$$

Pour notre objet, nous devons avoir $\bar{\mu}_1 = 0$, c'est-à-dire

$$2bh_1\psi + \xi\left[\mu_1\left(\log.\frac{b}{\xi}\right)^{01} + h_1\mu\right] = 0.$$

Lorsque, dans cette relation, on remplace μ par $C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2$, on obtient une équation du second degré en C_1, C_2 dont les coefficients sont des fonctions de u, v. Il n'est pas possible d'y satisfaire pour des valeurs constantes de C_1, C_2. Pour satisfaire à cette relation, il faut donc se donner certaines conditions relatives aux fonctions $\varphi_1(u, v)$, $\varphi_2(u, v)$, c'est-à-dire particulariser la surface (x). On observera que les fonctions $\varphi_1(u, v)$, $\varphi_2(u, v)$ doivent cependant dépendre de u car autrement on aurait $\mu^{10} = 0$.

En tenant compte de nos résultats antérieurs, on en conclut que si la surface (x) est générale, la seconde surface focale de la congruence W est une surface pour laquelle la suite $\bar{L}$ s'arrête au point $\bar{U}_2$ (surface F_2) ou au point $\bar{U}_3$.

5. Le résultat négatif auquel nous sommes parvenu pourrait conduire à se demander s'il existe des surfaces F_2. Nous signalerons à ce propos que des surfaces de ce type sont connues et ont été rencontrées par M. Vincensini [1].

On pourra aussi consulter sur ces surfaces l'ouvrage de M. G. Bol [2].

Liège, le 28 mars 1958.

[1] *Sur certaines surfaces à lignes de courbure planes* (Annales de l'École Normale Supérieure, 1941, pp. 141-164), *Sur les surfaces dont les réglées asymptotiques d'un système appartiennent à des complexes linéaires* (Comptes Rendus, 3 novembre 1954).

[2] *Projektive Differential-Geometrie*, Tome II (Goettingue, Vandenhoeck & Ruprecht, 1954).