Bulletin de la Classe des sciences

Sur les surfaces de genres arithmétique et géométrique nuls possédant une courbe bicanonique effective

Lucien Godeaux

Résumé
On démontre que si le système canonique d'une surface algébrique est un faisceau et si la surface contient une involution cyclique privée de points unis dont l’image est privée de courbe canonique, les courbes canoniques sont elliptiques et la surface image possède une courbe bicanonique formée de deux courbes elliptiques.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les surfaces de genres arithmétique et géométrique nuls possédant une courbe bicanonique effective,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — On démontre que si le système canonique d'une surface algébrique est un faisceau et si la surface contient une involution cyclique privée de points unis dont l'image est privée de courbe canonique, les courbes canoniques sont elliptiques et la surface image possède une courbe bicanonique formée de deux courbes elliptiques.

Le problème de la détermination des surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls est posé depuis que Castelnuovo a donné les conditions de rationnalité d'une surface algébrique (1894). Il a reçu des solutions partielles de la part de Castelnuovo, d'Enriques, de M. Campedelli et de nous-même [1]. Récemment, M. Burniat, dans un travail en cours de publication, a réussi à construire toute une série de surfaces répondant à la question.

Les surfaces non rationnelles de genres $p_a = p_g = 0$ peuvent se répartir en deux catégories : celles dont les systèmes pluricanoniques sont composés au moyen d'un faisceau de courbes elliptiques et celles dont les courbes bicanoniques sont irréductibles. C'est de ces dernières surfaces que nous nous sommes occupé et ce sont des surfaces de cette nature que M. Burniat a réussi à construire. Nous avons d'ailleurs démontré, dans l'opuscule cité plus haut, que le bigenre P_2 est au plus égal à 10 et les surfaces construites par M. Burniat ont pour le bigenre P_2 les valeurs de 2 à 7.

---

[1] On trouvera la bibliographie de ces travaux dans notre exposé sur *Les surfaces non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls*. Actualités scientifiques, N° 123 (Paris, Hermann, 1934).

Le procédé que nous avons utilisé pour construire les surfaces en question consiste à former l'image d'une involution cyclique dépourvue de points unis, d'ordre $p_a + 1$, appartenant à une surface régulière de genre arithmétique p_a. Dans cette note, nous partons d'une surface régulière dont le système canonique est un faisceau de courbes irréductibles, contenant une involution cyclique dépourvue de points unis. Si la surface image de cette involution est dépourvue de courbe canonique, les courbes canoniques de la surface primitive sont elliptiques et la courbe bicanonique de la surface image se compose de deux courbes elliptiques. Nous avions déjà construit antérieurement une surface particulière de ce type (1).

1. Soit F une surface algébrique régulière dont le système canonique est un faisceau de courbes irréductibles K de genre $p^{(1)}$. Nous avons donc $p_a = 2$. Supposons que F contienne une involution cyclique I privée de points unis et que la surface F', image de cette involution, soit dépourvue de courbe canonique. Nous désignerons par T la transformation birationnelle de F en soi génératrice de cette involution.

Entre le genre arithmétique $p_a = 2$ de F et celui $p'_a = 0$ de F', on sait que nous avons la relation

$$p_a + 1 = p(p'_a + 1),$$

d'où $p = 3$.

La transformation T opère, sur le faisceau canonique $|K|$, comme une homographie et il y a donc deux courbes unies K_1, K_2. A ces courbes correspondent sur F' des courbes Γ_1, Γ_2. Si π est le genre de Γ_1, nous avons par la formule de Zeuthen appliquée à la correspondance (1, 3) entre les courbes Γ_1, K_1, la relation

$$p^{(1)} - 1 = 3(\pi - 1).$$

La même formule, appliquée à la correspondance entre les courbes Γ_2, K_2, montre que Γ_2 est également de genre π.

(1) *Sur une surface algébrique non rationnelle de genres arithmétique et géométrique nuls, et de genre linéaire un* (Bulletin de la Société roy. des Sciences de Liège, 1934, pp. 184-187).

Le faisceau canonique $|K|$ a $p^{(1)}-1$ points-base auxquels correspondent $\pi-1$ points communs aux courbes Γ_1, Γ_2.

A une courbe K correspond sur F′ une courbe Γ de genre $p^{(1)}$, engendrant un faisceau $|\Gamma|$. Inversement, à une courbe Γ correspondent trois courbes de $|K|$.

Observons que si K varie d'une manière continue dans $|K|$ et tend vers une des courbes K_1 ou K_2, la courbe homologue Γ tend vers la courbe Γ_1 ou la courbe Γ_2 comptée trois fois. On a donc

$$\Gamma \equiv 3\Gamma_1 \equiv 3\Gamma_2.$$

Les $\pi-1$ points-base du faisceau $|\Gamma|$ sont triples pour ces courbes.

2. Dans le faisceau $|2K|$, qui appartient au système bicanonique de F, se trouvent trois courbes unies pour T, à savoir $2K_1$, $2K_2$, K_1+K_2.

Soit $|\Gamma_1'|$ l'adjoint à Γ_1. Puisque F′ est dépourvue de courbe canonique, aucune courbe Γ_1' ne peut contenir la courbe Γ_1 et par conséquent $|\Gamma_1|$ a la dimension $\pi-1$. Les courbes Γ_1' découpent sur Γ_2 une série paracanonique complète $g_{2\pi-2}^{\pi-2}$, donc il y a une courbe Γ_1' qui contient Γ_2 comme partie. La courbe $\Gamma_1'-\Gamma_2$ a pour homologue sur F une courbe K unie pour T et comme $\Gamma_1'-\Gamma_2$ ne peut coïncider avec Γ_1, cette courbe K est nécessairement K_2. On a donc

$$\Gamma_1' \equiv 2\Gamma_2, \quad \text{et de même,} \quad \Gamma_2' \equiv 2\Gamma_1.$$

Cela étant, le biadjoint $|\Gamma_1''|$ à Γ_1 est

$$\Gamma_1'' \equiv \Gamma_1' + \Gamma_2 \equiv 2\Gamma_1 + \Gamma_2.$$

Par conséquent, le système bicanonique de F′ est

$$|\Gamma_1''-\Gamma_1| = |\Gamma_1+\Gamma_2|.$$

3. Le système bicanonique de F a la dimension

$$P_2 - 1 = p_a + p^{(1)} - 1 = 3(\pi-1) + 2\ ;$$

il contient les courbes 2K et si $\pi > 1$, il est plus ample que le faisceau $|2K|$. Il en résulte que le système bicanonique $|\Gamma_1+\Gamma_2|$ de F′ peut ne pas se réduire à cette courbe. Ce dernier système a la dimension $\pi-1$.

Formons le système tricanonique de F'. Nous avons

$$\Gamma_1''' \equiv (2\Gamma_1 + \Gamma_2)' \equiv 4\Gamma_1 \equiv \Gamma_1 + 3\Gamma_2,$$

d'où

$$\Gamma_1''' - \Gamma_1 \equiv 3\Gamma_1 \equiv 3\Gamma_2 \equiv \Gamma.$$

Les courbes bicanoniques C_2 de F' ont le genre $3\pi - 2$, par conséquent le système tricanonique $|C_3|$ a la dimension $3\pi - 2$. Si $\pi > 1$, cette dimension est supérieure à trois.

Puisque la courbe $3\Gamma_1$ appartient totalement à $|C_3|$, les courbes C_3 découpent, sur Γ_1, une série d'ordre $3\pi - 3$ et de dimension $3\pi - 3$. Mais alors, la courbe Γ_1 serait rationnelle, ce qui est impossible. On en conclut que l'on a $\pi = 1$ et par conséquent $p^{(1)} = 1$.

4. On peut former aisément les courbes pluricanoniques de la surface F'. Il existe tout d'abord une seule courbe bicanonique, $\Gamma_1 + \Gamma_2$, formée de deux courbes elliptiques qui ne se rencontrent pas. On a $P_2 = 1$.

Le système tricanonique est constitué par le faisceau $|\Gamma|$ et on a $P_3 = 2$.

Le système tétracanonique comprend une seule courbe $2(\Gamma_1 + \Gamma_2)$ et on a $P_4 = 1$.

Le système 5-canonique comprend les courbes $4\Gamma_1 + \Gamma_2$ et $\Gamma_1 + 4\Gamma_2$, et on a $P_5 = 2$.

Le système 6-canonique comprend les courbes $6\Gamma_1$, $3(\Gamma_1 + \Gamma_2)$, $6\Gamma_2$, c'est-à-dire coïncide avec le faisceau $|\Gamma|$ compté deux fois. On a $P_6 = 3$.

Dans une note antérieure, citée au début, nous avons construit un exemple de la surface F' en partant d'une surface F intersection d'une hypersurface cubique et de la variété de Segre représentant les couples de points d'une droite et d'un plan, dans un espace S_5 à cinq dimensions. Cette surface contient un faisceau de courbes elliptiques planes, situées dans les plans appartenant à la variété de Segre, et qui est le faisceau canonique de la surface.

Liège, le 11 octobre 1958.