Bulletin de la Classe des sciences

Note sur une surface dont le système canonique a des composantes fixes

Lucien Godeaux

Résumé
Étude d'une surface dont le système canonique et le système bicanonique contiennent des composantes fixes, rationnelles, de degré virtuel inférieur à — 2, et du rôle joué par une courbe exceptionnelle.

COMMUNICATIONS D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Note sur une surface dont le système canonique a des composantes fixes,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Étude d'une surface dont le système canonique et le système bicanonique contiennent des composantes fixes, rationnelles, de degré virtuel inférieur à — 2, et du rôle joué par une courbe exceptionnelle.

Dans une note récente (1), nous avons rencontré une surface algébrique dont le système canonique contient des composantes fixes et dont la partie variable est composée au moyen d'un faisceau de courbes elliptiques. Les composantes fixes sont trois courbes rationnelles de degré — 3 et trois courbes rationnelles de degré $-(\nu + 1)$, ou $\nu > 1$, enfin une courbe rationnelle de degré virtuel — 1. Le système bicanonique ne contient plus cette dernière courbe comme composante fixe et nous nous étions demandé quel rôle jouait celle-ci. Il s'agit bien d'une courbe exceptionnelle et il est facile de transformer birationnellement la surface en une autre sur laquelle correspond à la courbe en question un point simple. Dans cette note, nous reprenons

(1) *Remarques sur la formation des systèmes canonique et pluricanoniques de quelques surfaces algébriques* (sixième note). (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1957, pp. 226-234).

Nous rectifions deux formules de cette note, page 229. A la ligne 17, il faut lire

$$[(t + 1)\{\nu(2s + 3) - (2s + 1)\} + \nu(2\nu + 3) + 2]m = p$$

et dans la formule (2), il faut ajouter 2 au premier membre. La formule qui se trouve à la page 230, ligne 16, est correcte.

l'examen des systèmes canonique et bicanonique de la surface pour préciser nos résultats antérieurs.

Rappelons que nous avions obtenu la surface comme image d'une involution cyclique appartenant à une surface de l'espace ordinaire, ce qui nous a permis de fixer la partie variable des systèmes canonique et bicanonique.

Nous supposons $\nu > 1$. Dans le cas $\nu = 1$, la surface a tous ses genres égaux à l'unité ($p_a = P_4 = 1$) ; nous l'avons étudiée récemment [1].

1. Reprenons la surface F d'équation

$$a_1x_1^{3\nu-1}x_2 + a_2x_2^{3\nu+1}x_3 + a_3x_3^{3\nu+1}x_4 + a_4x_4^{3\nu+2} + a_5x_1x_2x_3x_4^{3\nu-1} + \dots \\ + a_{\nu+4}(x_1x_2x_3)^{\nu}x_4^2 = 0,$$

transformée en soi par l'homographie

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} x_1 & \epsilon x_2 & \epsilon^{9\nu^2+1}x_3 & \epsilon^{6\nu^2+\nu+1}x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

de période $p = 9\nu^2 + 3\nu - 1$, ϵ étant une racine primitive d'ordre p de l'unité. Nous supposons $\nu \geq 2$. De plus, nous supposons p premier.

Sur F, l'homographie H détermine une involution I, d'ordre p, possédant trois points unis 0_1 $(1, 0, 0, 0)$, 0_2 $(0, 1, 0, 0)$, 0_3 $(0, 0, 1, 0)$.

Nous avons construit un modèle projectif Φ, normal, image de l'involution I. C'est une surface d'un espace S_r d'ordre $(3\nu + 2)p$, à sections hyperplanes Γ de genre $\frac{3}{2}$ $(\nu + 1)$ $(p - 1)$. A une courbe Γ correspond sur F la section de cette surface par une surface d'ordre p, transformée en soi par H et ne passant pas en général par les points unis de I.

Aux points unis 0_1, 0_2, 0_3 de I correspondent sur Φ des points de diramation $0'_1$, $0'_2$, $0'_3$. Chacun de ces points est multiple d'ordre $\nu + 2$ pour Φ. Il est équivalent à un ensemble de courbes rationnelles

$$\sigma_a, \ \tau_a, \ \rho_1, \ \rho_2, \ \dots, \ \rho_{3\nu}, \ \sigma_\beta,$$

---

[1] *Note sur une involution de genres un appartenant à une surface de genre quatre* (BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROY. DE BELGIQUE, 1958, pp. 151-157).

chacune de ces courbes rencontrant la précédente et la suivante en un point mais ne rencontrant pas les autres. La courbes σ_a est de degré virtuel — 3, la courbe τ_a de degré virtuel $-(\nu+1)$ les autres de degré virtuel — 2. Lorsque nous aurons à distinguer celles de ces courbes qui correspondent aux points O_1', O_2', O_3', nous écrirons σ_a', σ_a'', σ_a''', ...

A la section de F par le plan $x_4 = 0$ correspond sur Φ une courbe K_1', d'ordre $3\nu+2$, donnant lieu à la relation fonctionnelle

$$\Gamma \equiv pK_1' + (3\nu^2 + 2\nu + 1)\Sigma\sigma_a + (3\nu + 2)\Sigma\tau_a + X \qquad (1)$$

où l'on pose

$$X = (3\nu + 1)\Sigma\rho_1 + 3\nu\Sigma\rho_2 + \ldots + 2\Sigma\rho_{3\nu} + \Sigma\sigma_\beta.$$

La courbe K_1' est rationnelle et de degré virtuel — 1. Elle rencontre les courbes σ_a en un point, mais ne rencontre pas les autres composantes des points de diramation.

La partie variable du système canonique est formée de $\nu - 1$ courbes d'un faisceau $|K_3'|$, satisfaisant à la relation fonctionnelle

$$3\Gamma \equiv pK_3' + (3\nu + 2)\Sigma\sigma_a + 3(3\nu + 2)\Sigma\tau_a + 3X. \qquad (2)$$

Les courbes K_3' sont d'ordre $3(3\nu + 2)$ et rencontrent en un point les courbes τ_a, mais ne rencontrent pas les autres composantes des points de diramation. Les courbes K_3' sont elliptiques et le faisceau $|K_3'|$ est de degré zéro. Il comprend la courbe $3K_1'$.

Dans le système bicanonique de Φ interviennent les courbes $K_{6\nu-4}'$, d'ordre $(6\nu - 4)(3\nu + 2)$, satisfaisant à la relation fonctionnelle

$$\begin{aligned}(6\nu - 4)\Gamma \equiv pK_{6\nu-4}' &+ (3\nu^2 - \nu - 3)\Sigma\sigma_a \\ &+ 3(3\nu^2 - \nu - 3)\Sigma\tau_a + (6\nu - 4)X. \qquad (3)\end{aligned}$$

Le système $|K_{6\nu-4}'|$ a le degré $9\nu - 10$ et le genre $6\nu - 5$; ses courbes rencontrent chacune des courbes τ_a en $\nu - 2$ points et chacune des courbes ρ_1 en un point. Elles ne rencontrent pas les autres composantes des points de diramation. De plus, les courbes $K_{6\nu-4}'$ rencontrent les courbes K_1' en un point et les courbes K_3' en trois points.

Des relations fonctionnelles (1), (2) et (3), on déduit

$$K'_3 \equiv 3K'_1 + \Sigma\sigma_a, \tag{4}$$

$$K'_{6\nu-4} \equiv (6\nu - 4)K'_1 + (2\nu - 1)\Sigma\sigma_a + \Sigma\tau_a, \tag{5}$$

$$K'_{6\nu-4} \equiv 2K'_1 + 2(\nu - 1)K'_3 + \Sigma\sigma_a + \Sigma\tau_a. \tag{6}$$

2. Aux courbes K'_3 correspondent sur F des courbes K_3 découpées par les surfaces $x_1x_2x_3 + kx_4^3 = 0$. Ces courbes K_3 sont de genre $\frac{1}{2}(3p - 1)$ et la série canonique d'une de ces courbes est donc d'ordre $3p - 3$. A la série canonique d'une courbe K'_3, qui est d'ordre zéro, correspond sur la courbe K_3 homologue une série d'ordre zéro et de dimension zéro qui, augmentée du groupe des points unis, donne une série comprise dans la série canonique. La courbe K_3 considérée passe, comme nous l'avons établi, simplement par le point $(\alpha, \nu, 1, 1)$ appartenant au domaine de chacun des points unis 0_1, 0_2, 0_3. Le groupe canonique de K_3 envisagé est donc formé de ces trois points comptés chacun $p - 1$ fois, puisque l'involution est cyclique. Il en résulte que les adjointes aux courbes K'_3 comprennent la courbe $\Sigma\tau_a$, les courbes τ_a représentent les domaines des points $(\alpha, \nu, 1, 1)$.

Sur Φ, les adjointes aux courbes K'_3 comprennant la courbe exceptionnelle K'_1, qui ne rencontre pas les courbes K'_3. Elles peuvent aussi comprendre un certain nombre de courbes K'_3 et un certain nombre de fois les courbes σ_a, qui ne sont pas rencontrées par les courbes K'_3. Si nous représentons par $(K'_3)'$ une adjointe à K'_3, nous aurons donc

$$(K'_3)' \equiv K'_1 + \Sigma\tau_a + \lambda_1 K'_3 + \lambda_2 \Sigma\sigma_a$$

λ_1, λ_2 étant des entiers positifs.

Le système canonique (impur) de Φ est donc

$$|(K'_3)' - K'_3| = |K'_1 + \Sigma\tau_a + (\lambda_1 - 1)K'_3 + \lambda_2\Sigma\sigma_a|.$$

Observons que les courbes σ_a étant de degré virtuel -3, doivent être rencontrées en un point par les courbes canoniques impures de Φ. Elles sont rencontrées en un point par K'_1 et on a donc $\lambda_2 = 1$. D'autre part, aux courbes canoniques de Φ correspondent sur F des courbes formées de la section K_1 de F par le plan $x_4 = 0$ et de $\nu - 1$ courbes K_3. On a donc $\lambda_1 = \nu$.

Le système canonique (impur) de Φ est donc

$$|\, K_1' + (\nu - 1)K_3' + \Sigma\sigma_a + \Sigma\tau_a \,|$$

et on a

$$(K_3')' = K_1' + \nu K_3' + \Sigma\sigma_a + \Sigma\tau_a.$$

Le système canonique pur de Φ est donc

$$|\, (\nu - 1)K_3' + \Sigma\sigma_a + \Sigma\tau_a \,|.$$

3. Le système bicanonique (impur) de Φ est l'adjoint du système canonique, c'est-à-dire le système

$$\begin{aligned} &|\, (K_3')' + K_1' + (\nu - 2)K_3' + \Sigma\sigma_a + \Sigma\tau_a \,| \\ = &|\, 2K_1' + 2(\nu - 1)K_3' + 2\Sigma\sigma_a + 2\Sigma\tau_a \,|. \end{aligned}$$

En utilisant la relation fonctionnelle (6), on peut écrire ce système sous la forme

$$|\, K_{6\nu-4}' + \Sigma\sigma_a + \Sigma\tau_a \,|.$$

Aux courbes $K_{6\nu-4}'$ correspondent sur F les courbes $K_{6\nu-4}'$ découpées par les surfaces

$$\begin{aligned} &x_1^{3\nu+1}x_2 \sum_{i=0}^{\nu-2} \xi_i (x_1x_2x_3)^{\nu-2-i} x_4^{3i} + x_2^{3\nu-1}x_3 \sum_{i=0}^{\nu-2} \eta_i (x_1x_2x_3)^{\nu-2-i} x_4^{3i} \qquad (7) \\ &+ x_3^{3\nu+1}x_1 \sum_{i=0}^{\nu-2} \zeta_i (x_1x_2x_3)^{\nu-2-i} x_4^{3i} + (x_1x_2x_3)^{\nu-1} \sum_{i=0}^{\nu-1} \omega_i (x_1x_2x_3)^i x_4^{3\nu-1-3i} = 0 \end{aligned}$$

d'ordre $6\nu - 4$, ne comprenant pas F comme partie.

Ces courbes sont irréductibles et il en est de même des courbes $K_{6\nu-4}'$, par conséquent ces dernières courbes ne peuvent comprendre comme partie la courbe exceptionnelle K_1'. Le système bicanonique pur de Φ est donc

$$|\, K_{6\nu-4}' + \Sigma\sigma_a + \Sigma\tau_a \,|.$$

Les courbes σ_a, τ_a sont des composantes fixes du système bicanonique, car la dimension de ce système ne peut être supérieure à celle, $4\nu - 4$, du système de surfaces (7).

La surface Φ est, comme la surface F, régulière ; ses genres arithmétique et géométrique sont donc $p_a = p_g = \nu$. On a d'autre part $P_2 = 4\nu - 3$ et par conséquent $p^{(1)} = 3\nu - 3$.

La dimension r de l'espace contenant Φ est donnée par le théorème de Riemann-Roch. On a $r \geqslant 4\nu - 4$.

4. Aux courbes canoniques de Φ correspondent sur F les courbes découpées par les surfaces $x_4(x_1x_2x_3 + kx_4^3)^{\nu-1} = 0$. L'équation de ces surfaces se reproduit, lorsque l'on applique H, multipliée par la puissance $3\nu^2 + 5\nu$ de ϵ. Par conséquent, aux courbes p-canoniques de Φ correspondent sur F les courbes découpées par les surfaces d'ordre $(3\nu - 2)p$ dont l'équation se reproduit, lorsque l'on applique H, multipliée par la puissance $(3\nu^2 + 5\nu)p = 1$ de ϵ, et qui ne comprennent pas F comme partie. Ces surfaces ne passent pas par les points unis de l'involution I, car elles contiennent les puissances d'ordre $(3\nu - 2)p$ des coordonnées.

Il en résulte que le système p-canonique de Φ est découpé par cette surface par les hypersurfaces d'ordre $3\nu - 2$ de S_r, ne passant pas par les points de diramation. Le système p-canonique ne contient donc plus les courbes σ_a, τ_a comme parties fixes. Elles rencontrent la courbe exceptionnelle K_1' en $9\nu^2 - 4$ points.

5. Pour obtenir un modèle projectif de Φ dépourvu de courbe exceptionnelle, considérons le système

$$|G| = |K'_{6\nu-4} + K'_1|.$$

Aux courbes G correspondent sur la surface F les courbes découpées par les surfaces d'ordre $6\nu - 3$, ne comprenant pas F comme partie, dont l'équation s'obtient en multipliant les termes de l'équation (7) par x_4 et en y ajoutant le terme $(x_1x_2x_3)^{2\nu-1}$. Le système $|G|$ a donc la dimension $4\nu - 3$.

En rapportant projectivement les courbes G aux hyperplans d'un espace linéaire à $4\nu - 3$ dimensions, on obtient une surface Φ_0 d'ordre $9\nu - 9$, à sections hyperplanes de genre $6\nu - 5$. A la courbe K'_1 correspond sur Φ_0 un point simple A. Nous obtenons ainsi un nouveau modèle projectif de l'involution I.

A la courbe $\sigma_\alpha + K'_1$ correspond une courbe γ, rationnelle, de degré virtuel — 2, rencontrée en un point par les courbes G. On a donc sur Φ_0, comme courbes homologues des courbes σ'_α, σ''_α, σ'''_α, trois droite γ', γ'', γ''' passant par A et situées dans le plan tangent à Φ_0 en ce point.

A la courbe τ_α, correspond sur Φ_0 une courbe d'ordre $\nu - 2$ que nous désignerons encore par τ_α, de degré virtuel — $(\nu + 1)$, rencontrant en un point la droite γ.

A la courbe ρ_1 correspond sur Φ_0 une droite qui sera encore désignée par ρ_1 et qui rencontre en un point la courbe τ_α. La droite ρ_1 est de degré virtuel — 2.

Aux courbes $\rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_{3\nu}, \sigma_\beta$ correspondent sur Φ_0 les composantes d'un point double biplanaire appartenant à la droite ρ_1.

Aux courbes K'_3 correspondent sur Φ_0 des cubiques planes formant un faisceau et rencontrant en un point chacune des courbes τ_α.

Les relations fonctionnelles (4), (5), (6) deviennent

$$K'_3 \equiv \Sigma\gamma, \qquad G \equiv (2\nu - 1)\Sigma\gamma + \Sigma\tau_\alpha,$$
$$G \equiv 2(\nu - 1)K'_3 + \Sigma\gamma + \Sigma\tau_\alpha \equiv (2\nu - 1)K'_3 + \Sigma\tau_\alpha.$$

6. Pour déterminer le système canonique de la surface Φ_0, reprenons le raisonnement fait plus haut. Les adjointes $(K'_3)'$ au faisceau $|K'_3|$ sont données par

$$(K'_3)' = \Sigma\tau_\alpha + \lambda K'_3 + \lambda_1\Sigma\gamma,$$

donc le système canonique est

$$|\Sigma\tau_\alpha + (\lambda - 1)K'_3 + \lambda_1\Sigma\gamma|.$$

On a $\lambda = \nu$. Les courbes canoniques ne rencontrent pas les courbes γ, de degré virtuel — 2. Le système canonique de Φ_0 est donc

$$|(\nu - 1)K'_3 + \Sigma\tau_\alpha|$$

et on a

$$(K'_3)' \equiv \nu K'_3 + \Sigma\tau_\alpha.$$

Observons d'ailleurs que si les courbes γ appartenaient au système canonique, comme on a $K'_3 = \Sigma\gamma$, le système canonique serait $|\nu K'_3 + \Sigma\tau_\alpha|$ et le genre géométrique de la surface serait $\nu + 1$ au lieu de ν.

Le système bicanonique ne peut contenir la courbe $\Sigma\gamma$ pour la même raison. En effet, on a

$$|K'_{6\nu-4} + \Sigma\gamma + \Sigma\tau_\alpha| = |K'_{6\nu-4} + K'_3 + \Sigma\tau_\alpha|$$

et ce système a la dimension au moins égale à $4\nu - 3$ alors que le système bicanonique a la dimension $4\nu - 4$. Le système bicanonique de Φ_0 est donc

$$|K'_{6\nu-4} + \Sigma\tau_\alpha|.$$

Liège, le 21 mars 1958.