Bulletin de la Classe des sciences

Note sur une involution de genre un appartenant à une surface de genre quatre

Lucien Godeaux

Résumé
Construction d'une surface algébrique de genres un (Pa = P4 = 1) image d'une involution cyclique d'ordre treize n'ayant que trois points unis appartenant à une surface de genres Pa = Pg = 4

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Note sur une involution de genres un appartenant à une surface de genre quatre,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Construction d'une surface algébrique de genres un ($p_a = P_4 = 1$) image d'une involution cyclique d'ordre treize n'ayant que trois points unis appartenant à une surface de genres $p_a = p_g = 4$.

Dans une note antérieure (¹), nous avions considéré une involution cyclique d'ordre treize, ayant trois points unis, appartenant à une surface du cinquième ordre sans points singuliers et par conséquent de genres $p_a = p_g = 4$. Nous avions montré que l'on peut prendre pour image de cette involution une surface du cinquième ordre possédant une droite double tacnodale à laquelle est infiniment voisine une droite simple, exceptionnelle. Nous en avions conclu que cette surface était de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

L'étude d'involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et dont les images possèdent des composantes fixes du système canonique (²) nous a conduit à réexaminer cette question. Soient F la surface support de l'involution et Φ la surface image de celle-ci. Dans la correspondance (1, 13) entre les surfaces Φ et F, il y a trois points de diramation et chacun de ces points est équivalent à un ensemble de courbes rationnelles dont

(¹) *Sur les involutions de genres un appartenant à une surface algébrique* BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1938, pp. 308-313).

(²) *Sur une surface du cinquième ordre possédant une droite double tacnodale* (IDEM., 1956, pp. 884-896, 897-905) ; *Remarques sur la formation des systèmes canonique et pluricanoniques de quelques surfaces algébriques* (IDEM, 1956, pp. 1002-1011, 1102-1106 ; 1957, pp. 8-16, 56-62, 90-97, 226-234).

l'une a le degré virtuel — 3 et les autres le degré virtuel — 2. Or, sur une surface de genres $p_a = P_4 = 1$, une courbe rationnelle a le degré virtuel — 2. Il y avait une anomalie qui nous faisait croire que la surface Φ n'était pas de genres $p_a = P_4 = 1$. Il n'en est cependant rien ; nous en donnons une nouvelle démonstration et expliquons les anomalies rencontrées.

1. La surface F ayant pour équation

$$a_1x_1^4x_2 + a_2x_2^4x_3 + a_3x_3^4x_1 + a_4x_4^5 + a_5x_1x_2x_3x_4^2 = 0$$

est transformée en soi par l'homographie cyclique H,

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} x_1 & \epsilon x_2 & \epsilon^{10}x_3 & \epsilon^8 x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

de période 13, ϵ étant une racine primitive d'ordre 13 de l'unité.

L'homographie H engendre sur F une involution I d'ordre treize ayant trois points unis : les sommets $O_1(1, 0, 0, 0)$, O_2 $(0, 1, 0, 0)$, $O_3(0, 0, 1, 0)$ du tétraèdre de référence.

Soit Φ une surface normale, image de l'involution I, sur laquelle les trois points de diramation O_1', O_2', O_3' homologues de O_1, O_2, O_3, sont isolés. Nous avons montré qu'en un de ces points (ils ont tous trois la même structure) la surface Φ possède un point triple, le cône tangent se décomposant en un cône du second ordre et en un plan coupant le cône précédent suivant une seule génératrice. Au point de diramation sont infiniment voisins successifs deux points doubles biplanaires dont le premier se trouve sur la génératrice précédente.

En d'autres termes, chacun des points de diramation est équivalent à un ensemble de six courbes rationnelles

$$\sigma_\alpha,\ \rho_{11},\ \rho_{21},\ \rho_{22},\ \rho_{12},\ \sigma_\beta$$

chacune de ces courbes rencontrant la précédente et la suivante en un point mais ne rencontrant pas les autres. La première de ces courbes a le degré virtuel — 3, les autres le degré virtuel — 2.

A la section K_1 de F par le plan $x_4 = 0$ correspond sur Φ une courbe rationnelle K_1' rencontrant en un point chacune des courbes σ_α relatives aux trois points de diramation.

2. Nous allons montrer que l'on peut prendre comme modèle projectif de Φ une surface du sixième ordre de l'espace à quatre dimensions.

A cet effet, considérons le système linéaire complet des surfaces du sixième ordre dont l'équation, lorsque l'on applique l'homographie H, se reproduit multipliée par ϵ^9. Ce système a pour équation

$$\lambda_0 x_1^2 x_2^2 x_3^2 + \lambda_1 x_1^4 x_2 x_4 + \lambda_2 x_2^4 x_3 x_4 + \lambda_3 x_3^4 x_1 x_4 + \lambda_4 x_4^6 + \lambda_5 x_1 x_2 x_3 x_4^3 = 0.$$

Rapportons-le projectivement aux hyperplans d'un espace linéaire à cinq dimensions S_5 en faisant correspondre à la surface précédente l'hyperplan

$$\lambda_0 X_0 + \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 + \lambda_5 X_5 = 0.$$

On obtient les équations

$$X_0 X_4 = X_5^2, \qquad X_1 X_2 X_3 = X_0^2 X_5,$$
$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 + a_5 X_5 = 0. \qquad (1)$$

Le modèle projectif de la surface Φ, que nous obtenons et que nous désignerons par Φ_6 est, dans l'hyperplan (1), une surface du sixième ordre. Une surface de S_4, intersection d'une hyperquadrique et d'une hypersurface cubique est en général de genres $p_a = P_4 = 1$. Nous verrons dans un instant qu'il en est bien ainsi pour Φ_6.

Posons

$$\varphi = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4$$

et observons que nous pouvons supposer sans restriction $a_5 = 1$. Les équations de Φ_6 dans S_4 sont alors

$$X_0 X_4 = \varphi^2, \ X_1 X_2 X_3 + X_0^2 \varphi = 0.$$

A la courbe K_1, section de F par le plan $x_4 = 0$, correspond sur Φ_6 le point $A_0(1, 0, 0, 0, 0)$, simple pour cette surface.

Projetons la surface Φ_6 de A_0 sur l'espace $X_0 = 0$; nous obtenons la surface

$$X_1 X_2 X_3 X_4^2 + \varphi^5 = 0,$$

autre modèle projectif de la surface Φ, du cinquième ordre, que nous désignerons par Φ_5.

La surface Φ_5 possède une droite double tacnodale $X_4 = 0$, $\varphi = 0$ à laquelle est infiniment voisine, dans le plan $X_4 = 0$, une droite simple qui correspond à A_0. Aux sections planes de la surface Φ_5 correspondent les sections de F par les surfaces du cinquième ordre invariantes pour H, contenant F.

La surface Φ_5 admet comme adjointe le plan $X_4 = 0$ et par conséquent est de genre $p_g = 1$. Il en est de même de Φ_6 et Φ est bien une surface de genres $p_a = P_4 = 1$.

3. Désignons par A_1, A_2, A_3 les points d'intersection de la droite $X_4 = 0$, $\varphi = 0$ respectivement avec les plans $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$. On sait que ces points sont triples pour Φ_5.

La surface Φ_5 contient une droite double tacnodale $g(X_4 = \varphi = 0)$, qui contient les points A_1, A_2, A_3 et qui est le sommet du cône $X_0X_4 = \varphi^2$. Le plan tangent à la surface Φ_6 en A_0 a pour équations $X_4 = 0$, $\varphi = 0$ et le cône $X_0X_4 = \varphi^2$ touche l'hyperplan $X_4 = 0$ le long de ce plan, ce qui donne une droite g' du plan $X_4 = 0$ de $X_0 = 0$, double pour Φ_5, infiniment voisine de g. Le plan $X_4 = 0$ coupe encore Φ_5 suivant une droite simple g'', infiniment voisine de g', qui correspond au domaine du point A_0 sur Φ_6. Cette droite g'' est donc exceptionnelle, elle correspond à la courbe K'_1.

Comme nous l'avons établi [1], au point de diramation $0'_1$ correspond le point A_2 et précisément à la courbe σ_a relative à $0'_1$ correspond le domaine de A_2 dans le plan $X_4 = 0$. Il est facile de voir qu'au point A_2 est infiniment voisin sur la droite $X_2 = X_4 = 0$ un point double biplanaire appartenant à la droite g', suivi d'un point double conique qui correspond à σ_a et est situé sur la droite g''.

Le plan tangent $X_4 = 0$, $\varphi = 0$ à Φ_6 en A_0 coupe la surface F suivant les trois droites A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3, qui correspondent aux trois points de diramation respectivement $0'_3$, $0'_1$, $0'_2$.

Les courbes du système canonique impur de Φ_5 doivent rencontrer les trois courbes σ_a chacune en un point. D'une manière

(1) *Sur une surface du cinquième ordre*... (*loc. cit.*, première note, n° 9).

générale, les courbes du système i-canonique impur de Φ_5 doivent rencontrer les courbes σ_a chacune en i points ; elles sont donc découpées par les surfaces $X_4^i = 0$. Donc, tous les plurigenres de Φ sont égaux à l'unité. De plus, F étant régulière, il en est de même de Φ et le genre p_a de cette surface est égal à l'unité.

Si l'on désigne par D les sections hyperplanes de Φ_6 et par D_1 les sections planes de Φ_5, on a

$$D = D_1 + g'' = D_1 + K_1'.$$

4. Les choses apparaissent plus clairement si l'on se réfère au modèle projectif de Φ que nous avons construit dans notre seconde note [1], en partant des courbes découpées sur F par les surfaces d'ordre treize et formant un système appartenant à l'involution I, dépourvu de points-base. Ce modèle projectif de Φ appartient à un espace linéaire S_{31} à 31 dimensions, est d'ordre 65 et ses sections hyperplanes ont le genre 36.

Le point de diramation $0_1'$ est triple pour la surface Φ, le cône tangent se décomposant en un cône quadratique et en un plan coupant le cône suivant une seule génératrice. Sur cette génératrice, la surface possède un point double biplanaire infiniment voisin de $0_1'$ et auquel est infiniment voisin un point double biplanaire ordinaire. La courbe infiniment petite du domaine de $0_1'$ située sur le cône quadratique est la courbe σ_a.

Les points $0_2'$, $0_3'$ ont la même structure que le point $0_1'$.

A la section K_1 de F par le plan $x_4 = 0$ correspond sur Φ une courbe rationnelle K_1', d'ordre cinq, rencontrant en un point chacune des courbes σ_a appartenant aux domaines des points $0_1'$, $0_2'$, $0_3'$. Il existe un hyperplan ayant un contact d'ordre douze avec la surface Φ le long de la courbe K_1'. (Cette courbe correspond à la droite g'' de Φ_5 et au domaine du point A_0 de Φ_6).

Désignons par Γ les sections hyperplanes de Φ et considérons le système

$$|\Gamma_1| = |\Gamma + 5K_1'|.$$

Ce système $|\Gamma_1|$ a le degré 90, le genre 46 et ses courbes ne rencontrent plus K_1'. Comme Φ est de genre $p_a = 1$, la dimension

[1] *Sur une surface de cinquième ordre...* (loc. cit.).

de $|\Gamma_1|$ est $r \geqslant 46$ et précisément $r = 46$, puisque la surface est de genre $p_a = P_4 = 1$.

5. Rapportons projectivement les courbes Γ_1 aux hyperplans d'un espace linéaire S_{46} à 46 dimensions. A la surface Φ correspond une surface que nous désignerons par Φ_0, d'ordre 90, à sections hyperplanes de genre 46.

A la courbe K_1' correspond sur Φ_0 le domaine d'un point simple A de cette surface.

Aux courbes σ_a relatives aux points de diramation $0_1'$, $0_2'$, $0_3'$ correspondent des courbes rationnelles du cinquième ordre que nous désignerons respectivement pac γ', γ'', γ'''.

Puisque Φ_0 est de genre $p_a = P_4 = 1$, les courbes rationnelles γ', γ'', γ''' doivent avoir le degré virtuel -2. Observons que la courbe γ' est la transformée non pas seulement de la courbe σ_a mais de la courbe $\sigma_a + K_1'$, c'est-à-dire d'une courbe de degré virtuel $-3 + (-1) + 2 = -2$.

Appelons σ_a', ρ_{11}', ρ_{21}', ρ_{22}', ρ_{12}', σ_β' l'ensemble des courbes rationnelles équivalent au point $0_1'$, σ_a'', ..., σ_β'' celui des courbes rationnelles équivalent au point $0_2'$, enfin σ_a''', ..., σ_β''' celui des courbes rationnelles équivalent au point $0_3'$.

Sur la surface Φ, nous avons

$$\Gamma = 13K_1' + 6\sigma_a' + 5\rho_{11}' + 4\rho_{21}' + 3\rho_{22}' + 2\rho_{12}' + \sigma_\beta' \\ + 6\sigma_a'' + \dots\dots + \sigma_\beta'' + 6\gamma''' + \dots + \sigma_\beta'''.$$

Par conséquent, sur la surface Φ_0, nous avons

$$\Gamma_1 = \Gamma + 5K_1' = 6\gamma' + 5\rho_{11}' + 4\rho_{21}' + 3\rho_{22}' + 2\rho_{12}' + \sigma_2' \\ + 6\gamma'' + \dots + \sigma_\beta'' + 6\sigma_a''' + \dots + \sigma_\beta'''.$$

L'ensemble des courbes ρ_{11}', ρ_{21}', ρ_{22}', ρ_{12}', σ_β' est équivalent à un point singulier $0''$ situé sur la courbe γ', car les courbes Γ_1 ne rencontrent pas les courbes précédentes, mais γ' rencontre ρ_{11}' en un point.

Appelons Γ_1' les courbes Γ_1 passant par $0''$. Nous avons

$$\Gamma_1 = \Gamma_1' + \rho_{11}' + \rho_{21}' + \rho_{22}' + \rho_{12}' + \sigma_\beta'$$

d'où

$$\Gamma'_1 = 6\gamma' + 4\rho'_{11} + 3\rho'_{21} + 2\rho'_{22} + \rho'_{12} + 6\gamma'' + \ldots + \sigma''_\beta + 6\gamma''' + \ldots + \sigma'''_\beta .$$

On en conclut que les courbes Γ'_1 rencontrent γ' en quatre points, les courbes ρ'_{11} et σ'_β chacune en un point, mais ne rencontrent pas les courbes ρ'_{21}, ρ'_{22}, ρ'_{12}. Par conséquent $0''$ est un point double biplanaire pour Φ_0.

Appelons Γ''_1 les courbes Γ'_1 découpées par les hyperplans passant par la droite commune aux plans tangents à Φ_0 en $0''$. On a

$$\Gamma'_1 = \Gamma''_1 + \rho'_{21} + \rho'_{22} + \rho'_{12}$$

d'où

$$\Gamma''_1 = 6\gamma' + 4\rho'_{11} + 2\rho'_{21} + \rho'_{22} + 6\gamma'' + \ldots + \sigma''_\beta + 6\gamma''' + \ldots + \sigma'''_\beta .$$

Les courbes Γ''_1 rencontrent les courbes ρ'_{21}, ρ'_{12} chacune en un point, mais ne rencontrent plus les courbes ρ'_{11}, σ'_β, ni la courbe ρ'_{22}.

Appelons enfin Γ'''_1 les courbes Γ''_1 qui passent par le point commun aux courbes ρ'_{21}, ρ'_{12}, c'est-à-dire les courbes

$$\Gamma''_1 = \Gamma'''_1 + \rho'_{22}.$$

Nous avons donc

$$\Gamma'''_1 = 6\gamma' + 4\rho'_{11} + 2\rho'_{21} + 6\,\gamma'' + \ldots + \sigma''_\beta + 6\,\gamma''' + \ldots + \sigma'''_\beta .$$

Les courbes Γ'''_1 coupent la courbe ρ'_{22} en deux points, mais ne rencontrent plus les courbes ρ'_{21}, ρ'_{12}. On en conclut qu'en $0''$ la surface Φ_0 possède un point double biplanaire auquel est infiniment voisin un point double biplanaire suivi d'un point double conique.

Sur chacune des courbes γ'', γ''' se trouve un point double de même structure de Φ_0.

Ainsi donc la surface Φ_0 contient trois quintiques rationnelles γ', γ'', γ''' se rencontrant en un point A et sur chacune de ces courbes un point double biplanaire auquel sont infiniment voisins successifs un point double biplanaire suivi d'un point double conique.

Liége, le 5 février 1958.