Bulletin de la Classe des sciences

Asymptotiques de la surface cubique possédant quatre points doubles

Lucien Godeaux

Résumé
On détermine les asymptotiques de la surface cubique possédant quatre points doubles coniques. Si l'on représente la surface par les cubiques planes circonscrites à un quadrilatère complet, aux asymptotiques correspondent les coniques inscrites dans le quadrilatère.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Asymptotiques de la surface cubique possédant quatre points doubles,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — On détermine les asymptotiques de la surface cubique possédant quatre points doubles coniques. Si l'on représente la surface par les cubiques planes circonscrites à un quadrilatère complet, aux asymptotiques correspondent les coniques inscrites dans le quadrilatère.

On sait que la surface cubique F possédant quatre points doubles (nécessairement coniques) est la réciproque d'une surface de Steiner. D'autre part, Clebsch et Cremona ont déterminé les asymptotiques de la surface de Steiner ; ce sont des quartiques gauches de seconde espèce. On peut donc déterminer les asymptotiques de la surface F. Il nous a paru intéressant de les déterminer par un procédé plus élémentaire. Nous en déduisons le théorème suivant : *La surface cubique possédant quatre points doubles (coniques) peut être représentée sur un plan par les cubiques circonscrites à un quadrilatère complet. Aux asymptotiques de la surface correspondent les coniques inscrites dans le quadrilatère.*

1. Considérons dans un plan σ la transformation quadratique involutive

$$u' : v' : w' = vw : wu : uv. \tag{1}$$

Elle possède quatre points unis $A_0(1, 1, 1)$, $A_1(-1, 1, 1)$, $A_2(1, -1, 1)$, $A_3(1, 1, -1)$.

L'involution I engendrée dans le plan σ par (1) est représentée par une surface cubique F possédant quatre points doubles [1].

(1) *Sur l'inversion et sur une surface cubique à quatre points doubles* (Mathesis, 1922, pp. 19-23).

Pour obtenir son équation, faisons correspondre aux cubiques

$$\lambda_1 u(v^2 + w^2) + \lambda_2 v(w^2 + u^2) + \lambda_3 w(u^2 + v^2) + \lambda_4 uvw = 0 \qquad (2)$$

les plans

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0.$$

Nous obtenons pour équation de F,

$$x_4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_1 x_2 x_3 - 4x_4^3 = 0.$$

Aux points unis de I correspondent les points doubles coniques de F, à savoir

$$A_0'(2, 2, 2, 1), \qquad A_1'(-2, 2, 2, -1),$$
$$A_2'(2, -2, 2, -1), \quad A_3'(2, 2, -2, -1).$$

Aux couples de I formés d'un point infiniment voisin de $O_1(1, 0, 0)$ et d'un point de la droite $u = 0$, correspondent les points de la droite $x_1 = x_4 = 0$. Aux couples de I formés d'un point infiniment voisin de $O_2(0, 1, 0)$ [ou de $O_3(0, 0, 1)$] et d'un point de la droite $v = 0$ (ou $w = 0$) correspondent les points de la droite $x_2 = x_4 = 0$ (ou $x_3 = x_4 = 0$).

2. Nous allons rechercher les équations des asymptotiques de la surface F. Dans ce but, nous passerons aux coordonnées non homogènes en posant $w = 1$. Les équations de la transformation (1) sont alors

$$uu' = 1, \qquad vv' = 1. \qquad (1')$$

L'équation différentielle des asymptotiques s'écrit

$$\left| x \quad \frac{\partial x}{\partial u} \quad \frac{\partial x}{\partial v} \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} dv^2 \right| = 0,$$

ce qui donne, dans le cas actuel,

$$uv(1 - v^2)^2 du^2 - (1 - u^2)(1 - v^2)(u^2 + v^2) du dv + uv(1 - u^2)^2 dv^2 = 0.$$

Cette équation se décompose en deux autres.

$$v(1 - v^2)du - u(1 - u^2)dv = 0, \qquad (3)$$

$$u(1 - v^2)du - v(1 - v^2)\, dv = 0. \qquad (4)$$

Observons que si l'on applique la transformation (1') à l'équation (3), on obtient l'équation (4) et inversement.

Les intégrales des équations (3) et (4) sont respectivement

$$u\sqrt{1-v^2} - \lambda v\sqrt{1-u^2} = 0, \tag{5}$$

$$1 - u^2 - \lambda(1 - v^2) = 0. \tag{6}$$

L'équation (5), que nous écrirons sous la forme

$$\lambda u^2(1-v^2) - v^2(1-u^2) = 0, \tag{5'}$$

en remplaçant λ^2 par $1/\lambda$, représente une quartique passant doublement par les sommets du triangle de référence et simplement par les quatre points unis A_0, A_1, A_2, A_3 de l'involution I. L'équation (6) représente une conique passant par les quatre points unis de I. Les courbes (5') et (6) se correspondent dans la transformation (1) ou (1').

Appelons γ_1 les coniques (6) et γ_2 les quartiques (5').

A un point P de F correspondent dans le plan σ deux points P_1, P_2. Par le point P_1 passent une courbe γ_1 et une courbe γ_2 auxquelles correspondent les asymptotiques de F passant par P. Par P_2 passent les transformées par (1') des courbes γ_1, γ_2 précédentes ; elles correspondent aux mêmes asymptotiques.

3. La courbe

$$[1 - u^2 - \lambda(1 - v^2)] \, . \, [v^2(1-u^2) - \lambda u^2(1-v^2)] = 0,$$

ou

$$\lambda^2 u^2(1-v^2)^2 - \lambda(1-u^2)(1-v^2)(u^2+v^2) + v^2(1-u^2)^2 = 0 \tag{7}$$

est transformée en soi par la transformation (1'). Elle représente une courbe $\gamma_1 + \gamma_2$, formée d'une courbe γ_1 et de sa transformée γ_2 par (1'). A cette courbe correspond une asymptotique γ de F.

Une courbe (2) rencontre une courbe γ_1 en six points et la courbe γ_2 que (1') lui fait correspondre en six points homologues des précédents, donc la courbe γ est du sixième ordre.

Une courbe $\gamma_1 + \gamma_2$ a des points doubles aux sommets du triangle de référence et coupe en deux points les côtés de ce triangle, donc les courbes γ rencontrent en deux points chacune des droites $x_1 = x_4 = 0$, $x_2 = x_4 = 0$, $x_3 = x_4 = 0$.

Les points unis de l'involution I sont des points unis de première espèce, c'est-à-dire que les points infiniment voisins de chacun de ces points sont unis. Cette propriété est bien connue. Dans le cas actuel, on peut l'établir très simplement de la manière suivante. Envisageons par exemple le point uni A_0. A la tangente t à une courbe passant par A_0, faisons correspondre la tangente t' au même point à la courbe que (1') fait correspondre à la première. Les droites t, t' forment les couples d'une involution ayant trois éléments unis : les droites A_0O_1, A_0O_2, A_0O_3. L'involution est donc l'identité et t, t' coïncident toujours. Il en résulte que deux courbes γ_1, γ_2 homologues dans (1') se touchent en chacun des points unis de I. Les courbes γ passent donc simplement par les points doubles de la surface F.

Les équations des courbes γ s'obtiennent aisément. En coordonnées homogènes, l'équation de la courbe (7) s'écrit

$$\lambda^2 u^2(w^2 - v^2)^2 - \lambda(w^2 - u^2)(w^2 - v^2)(u^2 + v^2) + v^2(w^2 - u^2)^2 = 0.$$

On en déduit

$$\lambda^2(x_1^2 - 4x_4^2) - \lambda[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4(x_1 + x_2)x_3 - 16x_3x_4 - 4x_4^2] + x_2^2 - 4x_4^2 = 0.$$

C'est l'équation d'une famille d'indice deux de quadriques découpant sur F la famille des asymptotiques.

4. L'involution I peut être représentée sur un plan α en posant

$$y_1 : y_2 : y_3 = u(v^2 - w^2) : v(w^2 - u^2) : w(u^2 - v^2).$$

Les cubiques

$$\mu_1 u(v^2 - w^2) + \mu_2 v(w^2 - u^2) + \mu_3 w(u^2 - v^2) = 0 \qquad (8)$$

passent par les sommets du triangle de référence et par les points unis A_0, A_1, A_2, A_3 de l'involution I. A ces derniers points correspondent respectivement dans le plan α les droites

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0, \qquad (a_0)$$
$$-y_1 + y_2 + y_3 = 0, \qquad (a_1)$$
$$y_1 - y_2 + y_3 = 0, \qquad (a_2)$$
$$y_1 + y_2 - y_3 = 0, \qquad (a_3)$$

et aux groupes de l'involution I formés d'un point infiniment voisin d'un des sommets du triangle de référence et d'un point du côté opposé, respectivement les points des droites $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$.

Aux courbes $\gamma_1 + \gamma_2$, c'est-à-dire aux asymptotiques γ de F, correspondent dans α des coniques, puisque les courbes γ_1, γ_2 rencontrent les courbes (8) en deux points variables. D'autre part, puisque les courbes γ_1, γ_2 homologues se touchent aux points unis, ces coniques doivent toucher les droites a_0, a_1, a_2, a_3.

Effectivement, on trouve qu'aux courbes (7) ou $\gamma_1 + \gamma_2$, correspondent les coniques

$$\lambda^2 y_1^2 + \lambda(y_2^2 + y_3^2 - y_1^2) + y_2^2 = 0.$$

En écrivant cette équation sous la forme

$$\lambda(\lambda + 1)y_1^2 + (\lambda + 1)y_2^2 - \lambda y_3^2 = 0,$$

on voit que ces coniques sont inscrites dans le quadrilatère complet formé par les droites a_0, a_1, a_2, a_3.

Aux courbes (2), c'est-à-dire aux sections planes de la surface F correspondent dans le plan α les cubiques circonscrites au quadrilatère complet dont il vient d'être question. On en conclut que :

La surface cubique possédant quatre points doubles coniques peut être représentée sur un plan par les cubiques circonscrites à un quadrilatère complet. Les asymptotiques de la surface sont représentées par les coniques inscrites dans le quadrilatère.

Liège, le 28 avril 1958.