Bulletin de la Classe des sciences

# Remarques sur la formation des systèmes canonique et pluricanoniques de quelques surfaces algébriques (sixième note)

Lucien Godeaux

**Résumé**
Construction d’une surface algébrique contenant une courbe rationnelle de degré virtuel — 1, non exceptionnelle.

## COMMUNICATIONS DES MEMBRES

### GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

# Remarques sur la formation des systèmes canonique et pluricanoniques de quelques surfaces algébriques,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(Sixième note).

*Résumé.* — Construction d'une surface algébrique contenant une courbe rationnelle de degré virtuel — 1, non exceptionnelle.

Dans cette dernière note (1), nous construisons une surface algébrique contenant une courbe rationnelle de degré virtuel — 1. Nous partons d'une surface d'ordre $3\nu + 2$, contenant une involution d'ordre $p = 9\nu^2 + 3\nu + 1$, $\nu$ étant un entier tel que $p$ soit premier, cette involution possédant trois points unis. La surface $\Phi$, image de cette involution, contient un faisceau linéaire $|K_3'|$ de courbes elliptiques, une de ces courbes étant formée d'une courbe rationnelle $K_1'$ de degré virtuel $-1$, comptée trois fois. Le système canonique contient la courbe $K_1'$, $\nu - 1$, courbes $K_3'$ et six courbes rationnelles trois de degré virtuel $-3$, les trois autres, de degré virtuel $-(\nu + 1)$. Le système bicanonique est irréductible. Quant au système $p$-canonique, il ne contient plus la courbe $K_1'$ comme composante fixe.

Nous avons dû déterminer la structure des points de diramation de la surface $\Phi$ ; elle a été indiquée brièvement d'après les méthodes que nous avons exposées ailleurs (2).

Pour $\nu = 1$, la surface $\Phi$ est la surface du cinquième ordre possédant une droite double tacnodale que nous avons déjà

(1) Les notes précédentes ont paru dans le Bulletin de l'Académie en 1956, pp. 1002-1011, 1102-1106 ; 1957, pp. 8-16, pp. 56-61, pp. 90-97.

(2) *Mémoire sur les surfaces multiples* (MÉMOIRES IN-8° DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1953).

étudiée [1]. Ce cas $\nu = 1$ devait être étudié à part, car la surface F est alors d'ordre cinq et ses biadjointes sont des quadriques. Il en est de même du cas $\nu = 2$ ; la surface F est alors d'ordre huit et ses biadjointes sont d'ordre huit également ; nous avons étudié ce cas ailleurs dans un travail en cours de publication. Pour $\nu > 2$, les biadjointes à F sont d'ordre supérieur à celui de F.

**1.** Considérons la surface F d'équation

$$a_1 x_1^{3\nu+1} x_2 + a_2 x_2^{3\nu+1} x_3 + a_3 x_3^{3\nu+1} x_1 + \sum_0^{\nu} a_{4+i} (x_1 x_2 x_3)^j x_4^{3+2-3i} = 0,$$

où $\nu$ est un entier tel que $p = 9\nu^2 + 3\nu + 1$ soit un nombre premier. On suppose $\nu \geqslant 3$.

La surface F est transformée en soi par l'homographie

$$H = \begin{pmatrix} x_1 & \epsilon x_2 & \epsilon^{9\nu^2+1} x_3 & \epsilon^{6\nu^2+\nu-1} x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

de période $p$, $\epsilon$ étant une racine primitive d'ordre $p$ de l'unité.

Sur la surface F, l'homographie H engendre une involution d'ordre $p$, possédant trois points unis $O_1(1, 0, 0, 0)$, $O_2(0, 1, 0, 0)$, $O_3(0, 0, 1, 0)$.

Pour obtenir un modèle projectif de la surface $\Phi$ image de l'involution I, considérons le système $|C|$ découpé sur F par les surfaces d'ordre $p$. Ce système comprend $p$ systèmes linéaires partiels, composés au moyen de I, dont l'un, $|C_0|$, est privé de points-base et est de dimension $r > 3$. Rapportons projectivement les courbes $C_0$ aux hyperplans d'un espace $S_r$. Nous obtenons une surface $\Phi$, d'ordre $(3\nu + 2)p$. Nous désignerons par $O_1'$, $O_2'$, $O_3'$ les points de diramation de cette surface, homologues respectifs de $O_1$, $O_2$, $O_3$.

Considérons le point $O_1$. Dans le plan tangent $x_2 = 0$ à F en ce point, H détermine l'homographie

$$(x_1 \quad \epsilon^{9\nu^2+1} x_3 \quad \epsilon^{6\nu^2+\nu+1} x_4).$$

En posant $\eta = \epsilon^{9\nu^2+1}$, on a $\eta^{3\nu^2+2\nu+1} = \epsilon^{3\nu^2+\nu+1}$ et en posant

(1) *Sur une surface du cinquième ordre possédant une droite double tacnodale* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1956, pp. 887-905).

$\zeta = \epsilon^{6\nu^2+\nu+1}$, on a $\zeta^{9\nu^2+2} = \epsilon^{9\eta^2+1}$. Les nombres attachés au point uni $O_1$ sont donc $\alpha = 3\nu^2 + 2\nu + 1$, $\beta = 9\nu^2 + 2$.

On obtient des résultats analogues pour $O_2$, $O_3$.

**2.** Pour déterminer les structures des points $O_1$, $O'_1$, observons que la solution des congruences

$$\lambda + (3\nu^2 + 2\nu + 1)\mu \equiv 0, \quad \mu + (9\nu^2 + 2)\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p) \qquad (1)$$

donnant la plus petite valeur pour $\lambda + \mu$ est

$$\lambda = 1, \quad \mu = 3\nu - 1.$$

On en conclut que les courbes $C_0$ passant par $O_1$, courbes que nous désignerons par $C'_0$, passent $3\nu$ fois par $O_1$, $3\nu - 1$ fois par $\nu - 1$ points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \nu - 1)$ points infiniment voisins successifs de $O_1$, $2\nu$ fois par le point $(\alpha, \nu)$ infiniment voisin de $(\alpha, \nu - 1)$, deux fois par les points $(\alpha, \nu + 1)$, ..., $(\alpha, 3\nu^2 + 2\nu)$ infiniment voisins successifs de $(\alpha, \nu)$, $\nu - 1$ fois par le point $(\alpha, \nu, )$, infiniment voisin de $(\alpha, \nu)$, $\nu - 1$ fois par $(\alpha, \nu, 1, 1)$ infiniment voisin de $(\alpha, \nu, 1)$, une fois par une suite de points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, 9\nu^2 + 1)$ infiniment voisins successifs de $O_1$. Le point $(\alpha, 1)$ se trouve sur $O_1O_3$ et le point $(\beta, 1)$ sur $O_1O_4$.

Sur la surface $\Phi_1$, projection de $\Phi$ à partir de $O'_1$ sur un hyperplan, il correspond aux domaines des points $(\alpha, 3\nu^2 + 2\nu)$, $(\alpha, \nu, 1, 1)$, $(\beta, 9\nu^2 + 1)$ respectivement une conique $\sigma_\alpha$, une courbe rationnelle $\tau_\alpha$ d'ordre $\nu - 1$ et une droite $\sigma_\beta$. Le point $O'_1$ est multiple d'ordre $\nu + 2$ pour $\Phi$.

Appelons $C''_0$ les courbes $C'_0$ assujetties à toucher en $O_1$ une droite distincte de $O_1O_3$, $O_1O_4$. Ces courbes correspondent aux valeurs $\lambda = 3\nu + 3$, $\mu = 3\nu - 4$. Elles passent $3\nu - 4$ fois par $(\alpha, 1)$, ..., $(\alpha, \nu - 1)$, $2\nu - 2$ fois par $(\alpha, \nu)$, deux fois par $(\alpha, \nu + 1)$, ..., $(\alpha, 3\nu^2 + 2\nu)$, $\nu - 2$ fois par $(\alpha, \nu, 1)$, $(\alpha, \nu, 1, 1)$, 3 fois par $(\beta, 1)$, 2 fois par $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, k)$, une fois par $(\beta, k + 1)$, $(\beta, k + 1, 1)$, où $k = \frac{3\nu}{2}(3\nu - 1) - 1$, une fois par des points $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 2)$, ..., $(\beta, 1, 3\nu)$ infiniment voisins successifs de $(\beta, 1)$. On en conclut que sur $\Phi_1$, le point commun aux courbes $\tau_\alpha$, $\sigma_\beta$ est double biplanaire.

Nous supposerons que le point commun à $\tau_\alpha$, $\sigma_\beta$ est équivalent à $t$ courbes rationnelles de degré virtuel $-2$, $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_t$ et que le point commun aux courbes $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$ est équivalent à $s$ courbes rationnelles $\rho'_1, \rho'_2, \ldots, \rho'_s$ de degré virtuel $-2$.

Sur la surface F, il existe un système linéaire appartenant à $|C|$ et dont les courbes passent simplement par $O_1$ en y touchant $O_1O_3$.

Si nous désignons par $\Gamma_1$ les courbes qui leur correspondent sur $\Phi$ et par $\Gamma$ celles qui correspondent aux courbes C, nous devons avoir une relation de la forme

$$p\Gamma = p\Gamma_1 + l\sigma_\alpha + l'_1\rho'_1 + \ldots + l'_s\rho'_s + l_0\tau_\alpha + l_1\rho_1 + \ldots + \\ + l_t\rho_t + m\sigma_\beta + X,$$

X étant un terme provenant de $O'_2$, $O'_3$. Les courbes $\Gamma_1$ rencontrent la courbe $\sigma_\alpha$ en un point, mais ne rencontre pas les autres composantes de $O'_1$. Si nous prenons les intersections de la courbe précédente successivement avec $\sigma_\beta, \rho_t, \ldots, \sigma_\alpha$, nous obtenons

$$[(t+1)\{\nu(2s+3)-(2s+1)\}+\nu(2\nu+3)]m = p,$$

d'où $m = 1$ et

$$(t+1)[\nu(2\nu+3)-(2s+1)]+\nu(2\nu+3) = p. \qquad (2)$$

Nous allons montrer que l'on a $t = 3\nu$, $s = 0$.

**3.** Observons que parmi les solutions des congruences (1), on a

$$\lambda_i = k + 3\nu + 1, \quad \mu_i = 3\nu(k-1)-(k+2),$$
$$\lambda_{i+1} = k, \qquad \mu_{i+1} = k(3\nu - 1),$$

où $k$ peut prendre les valeurs $1, 2, \ldots, 3\nu$. Appelons $C_0^{(i)}$ les courbes $C_0$ qui correspondent à la solution $\lambda_i$, $\mu_i$ et $C_0^{(i+1)}$ celles qui correspondent à $\lambda_{i+1}$, $\mu_{i+1}$.

Les courbes $C_0^{(i+1)}$ passent $3k\nu$ fois par $O_1$ ; $k$ fois par les points $(\beta, 1), (\beta, 2), \ldots, (\beta, x)$, $k_1 < k$ fois par $(\beta, x+1)$, $x$ et $k_1$ satisfaisant à la relation

$$kx + k_1 = 9\nu^2 - 3(k-1)\nu + 1.$$

Les courbes $C_0^{(i+1)}$ passent en outre par une suite de points fixes infiniment voisins successifs de $(\beta, x+1)$ dont le dernier est simple (car $k$ et $k_1$ sont premiers entre eux) et sera désigné par P.

Les courbes $C_0^{(i)}$ passent $3k\nu - 1$ fois par $O_1$, $k+1$ fois par $(\beta, 1)$, $k$ fois par $(\beta, 2), \dots, (\beta, x)$, $k_1$ fois par $(\beta, x+1), \dots$, une fois par P, une fois par $(\beta, 1, 1), \dots, (\beta, 1, 3\nu)$.

Si nous désignons par $\Phi_i$ la projection de $\Phi$ dont les sections hyperplanes correspondent aux courbes $C_0^{(i)}$, il correspond sur cette surface aux domaines des points $(\beta, 1, 3\nu)$ et P les droites $\rho_1$, $\rho_{3\nu-k+2}$ de degré virtuel $-2$.

Pour $k = 1, 2, \dots, 3\nu$, on obtient ainsi les droites $\rho_1, \rho_{3\nu-1}, \rho_{3\nu-2}, \dots, \rho_2$. La droite $\rho_1$ apparaît déjà sur la surface $\Phi_1$ considérée plus haut. On en conclut que l'on a $t \geqslant 3\nu$.

Cela étant, la formule (2) peut s'écrire sous la forme

$$2s[t(\nu-1)+\nu] = (3\nu-1)(3\nu-t).$$

Le second membre est négatif ou nul. Dans les deux cas, on doit avoir $s = 0$ d'où $t = 3\nu$.

On voit donc que le point $O_1'$ est équivalent à un ensemble de $3\nu+3$ courbes rationnelles

$$\sigma_\alpha,\ \tau_\alpha,\ \rho_1,\ \rho_2,\ \dots,\ \rho_{3\nu},\ \sigma_\beta,$$

chacune d'elles rencontrant la précédente et la suivante, mais ne rencontrant pas les autres. La courbe $\sigma_\alpha$ est de degré virtuel $-3$, la courbe $\tau_\alpha$ de degré virtuel $-(\nu+1)$, les autres de degré virtuel $-2$.

Les points $O_2'$, $O_3'$ sont équivalents à des ensembles de courbes analogues.

Lorsque nous aurons à distinguer les composantes de $O_1'$, $O_2'$, $O_3'$, nous les écrirons respectivement $\sigma_\alpha'$, $\sigma_\alpha''$, $\sigma_\alpha'''$, ... et nous poserons

$$\Sigma\sigma_\alpha = \sigma_\alpha' + \sigma_\alpha'' + \sigma_\alpha''', \dots.$$

**4.** Désignons par $K_1$ la section de F par le plan $x_4 = 0$ et par $K_1'$ la courbe qui lui correspond sur $\Phi$. La courbe $K_1$ passe par les points $O_1$, $(\alpha, 1), \dots, (\alpha, 3\nu^2+2\nu)$ et a un comportement analogue en $O_2$, $O_3$. Par conséquent, la courbe $K_1'$ rencontre en un point chacune des courbes $\sigma_\alpha'$, $\sigma_\alpha''$, $\sigma_\alpha'''$. On en déduit la relation fonctionnelle

$$\Gamma \equiv pK_1' + (3\nu^2 + 2\nu + 1)\Sigma\sigma_\alpha + (3\nu + 2)\Sigma\tau_\alpha + X, \qquad (1)$$

où nous posons

$$X = (3\nu + 1)\Sigma\rho_1 + 3\nu\Sigma\rho_2 + \ldots + 2\Sigma\rho_{3\nu} + \Sigma\sigma_\beta.$$

L'application de la formule de Zeuthen à la correspondance entre $K_1'$ et $K_1$ montre que la courbe $K_1'$ est rationnelle. Elle est d'autre part d'ordre $3\nu + 2$. On en déduit qu'elle est de degré virtuel — 1. La relation (I) donne en effet, en représentant par [A, B] le nombre des points d'intersection de deux courbes A, B,

$$[\Gamma,\ K_1'] = p[K_1',\ K_1'] + 3(3\nu^2 + 2\nu + 1)[\sigma_\alpha,\ K_1'],$$

d'où

$$3\nu + 2 = p[K_1',\ K_1'] + 9\nu^2 + 6\nu + 3,\ [K_1',\ K_1'] = -1.$$

Nous verrons que la courbe $K_1'$ n'est pas exceptionnelle.

**5.** Considérons maintenant les courbes $K_3$ découpées sur F par les surfaces

$$x_1x_2x_3 + \lambda x_4^3 = 0 \qquad (1)$$

et soient $K_3'$ les courbes qui leur correspondent sur $\Phi$.

En appliquant à la surface (1), $\nu$ fois la transformation

$$T_1 = (x_1^2 \quad x_2x_3 \quad x_1x_3 \quad x_3x_4),$$

puis une fois la transformation

$$T_2 = (x_1^2 \quad x_2x_4 \quad x_3x_4 \quad x_1x_4),$$

puis encore une fois $T_1$, de manière à faire apparaître le point $(\alpha,\ \nu,\ 1,\ 1)$, on voit que les courbes $K_3$ passent une fois par ce point. D'autre part, en projetant la courbe $K_3$ de $O_1$ sur $x_1 = 0$, on obtient une courbe d'ordre $9\nu + 3$. On en conclut que les courbes $K_3$ ont un point triple en $O_1$. Par suite, les courbes $K_3'$

rencontrent en un point chacune des courbes $\tau'_a$, $\tau''_a$, $\tau'''_a$, mais ne rencontrent pas les autres composantes des points $O'_1$, $O'_2$, $O'_3$.

On en conclut la relation fonctionnelle

$$3\Gamma \equiv p\mathrm{K}'_3 + (3\nu + 2)\Sigma\sigma_a + 3(3\nu + 2)\Sigma\tau_a + 3\mathrm{X}. \qquad \text{(II)}$$

L'application de la formule de Zeuthen à la correspondance entre les courbes $\mathrm{K}'_3$, $\mathrm{K}_3$ montre que les courbes $\mathrm{K}'_3$ sont elliptiques. Les courbes $\mathrm{K}'_3$ étant d'ordre $3(3\nu + 2)$, la formule (II) montre que les courbes $\mathrm{K}'_3$ sont de degré zéro.

On a ainsi, sur $\Phi$, un faisceau $|\mathrm{K}'_3|$ de courbes elliptiques, sans points-base.

On a, par comparaison des relations (I), (II),

$$\mathrm{K}'_3 \equiv 3\mathrm{K}'_1 + \Sigma\sigma_a.$$

**6.** Considérons le système linéaire $|\mathrm{K}_{3\nu+2}|$ découpé sur F par les surfaces du système

$$\lambda_2 x_2^{3\nu+1} x_3 + \lambda_3 x_3^{3\nu+1} x_1 + \Sigma\lambda_{4+i}(x_1x_2x_3)^i x_4^{3\nu+2-3i} = 0.$$

En effectuant la transformation $\mathrm{T}_2$ puis $3\nu$ fois la transformation $\mathrm{T}_1$, on voit que les courbes $\mathrm{K}_{3\nu+2}$ passent une fois par le point $(\beta, 1, 3\nu)$. D'une manière précise, les transformations précédentes font apparaître le point $(\beta, 1, 3\nu)$ et en ce point, les transformées des courbes $\mathrm{K}_{3\nu+2}$ ont une tangente variable. Il n'en est pas de même aux autres points $(\alpha, 3\nu^2 + 3\nu)$, $(\alpha, \nu, 1, 1)$, ..., $(\beta, 9\nu^2 + 1)$. On en conclut que les courbes $\mathrm{K}'_{3\nu+2}$, qui correspondent sur $\Phi$ aux courbes $\mathrm{K}_{3\nu+2}$, satisfont à la relation fonctionnelle

$$(3\nu + 2)\Gamma \equiv p\mathrm{K}'_{3\nu+2} + (3\nu + 1)\Sigma\sigma_a + 3(3\nu + 1)\Sigma\tau_a + (3\nu + 2)\mathrm{X}. \qquad \text{(III)}$$

En comparant aux relations (II) et (II), on a

$$\mathrm{K}'_{3\nu+2} \equiv (3\nu + 2)\mathrm{K}'_1 + (\nu + 1)\Sigma\sigma_a + \Sigma\tau_a,$$

$$\mathrm{K}'_{3\nu+2} \equiv 2\mathrm{K}'_1 + \nu\mathrm{K}'_3 + \Sigma\sigma_a + \Sigma\tau_a.$$

**7.** Les courbes canoniques de $\Phi$ doivent rencontrer en un point chacune des courbes $\sigma_a'$, $\sigma_a''$, $\sigma_a'''$ de degré virtuel $-3$ et en $\nu-1$ points chacune des courbes $\tau_a'$, $\tau_a''$, $\tau_a'''$, de degré virtuel $-(\nu+1)$. A ces courbes correspondent sur F des courbes canoniques formant un système composé au moyen de l'involution I. Ces courbes sont découpées par des surfaces d'ordre $3\nu-2$.

Parmi les courbes canoniques de $\Phi$ se trouvent les courbes $K_1'+(\nu-1)K_3'$. Par conséquent le système linéaire de surfaces découpant les transformées des courbes canoniques de $\Phi$ sur F contient la surface $x_1^{3\nu-2}=0$. Donc, l'équation de ces surfaces se reproduit, lorsque l'on applique H, multipliée par $\epsilon^{3\nu^2+5\nu}$. Ce système est donc

$$x_4 \sum_0^{\nu-1} \lambda_i (x_1x_2x_3)^i x_4^{3\nu-3-3i} = 0.$$

Il en résulte que les courbes canoniques de $\Phi$ ont une partie variable, formée de $\nu-1$ courbes du faisceau $|K_3'|$ et contiennent comme partie fixe $K_1'$.

**8.** Les transformées sur F des courbes bicanoniques de $\Phi$ sont découpées par les surfaces d'ordre $6\nu-4$, transformées en soi par H, parmi lesquelles se trouve la surface $x_4^{6\nu-4}=0$. L'équation du système linéaire formé par ces surfaces se reproduit donc, lorsque l'on applique H, multipliée par $2^{6\nu2+10\nu}$. On a donc pour cette équation,

$$x_3^{3\nu+1}x_3\Sigma\lambda_i(x_1x_2x_3)^i x_4^{3\nu-6-3i} + x_3^{3\nu+1}x_1\Sigma\lambda_i'(x_1x_2x_3)^i x_4^{3\nu-6-3i} +$$
$$+ x_4^2\Sigma\mu_i(x_1x_2x_3)^i x_4^{6\nu-6-3i} = 0.$$

Ces surfaces passent une fois par le point $(\beta, 1, 3\nu)$ et $\nu-2$ fois par le point $(\alpha, \nu, 1, 1)$. Si l'on désigne par $K_{6\nu-4}'$ les courbes qui correspondent sur $\Phi$ aux courbes découpées sur F par les surfaces précédentes, on a

$$(6\nu-4)\Gamma = pK_{6\nu-4}' + (3\nu^2-\nu-3)\Sigma\sigma_a + 3(3\nu^2-\nu-3)\Sigma\tau_a +$$
$$+ (6\nu-4)X.$$

Cela étant, le système canonique de $\Phi$ est

$$|L_1| = |K_1' + (\nu - 1)K_3' + \Sigma\sigma_a + \Sigma\tau_a|$$

et le système bicanonique,

$$|L_2| = |K_{6\nu-4}' + \Sigma\sigma_a + \Sigma\tau_a|,$$

car on a

$$K_{6\nu-4}' = 2[K_1' + (\nu - 1)K_3'] + \Sigma\sigma_a + \Sigma\tau_a.$$

On a d'ailleurs

$$|L_2| = |(6\nu - 4)K_1' + 2\nu\Sigma\sigma_a + \Sigma\tau_a|,$$

ce qui montre bien que $K_1'$ n'est pas une courbe exceptionnelle.

**9.** Aux courbes $p$-canoniques de $\Phi$ correspondent sur F des courbes $p$-canoniques découpées par un système linéaire de surfaces transformées en soi par H et comprenant la surface $x_4^{(3\nu-2)p}$. Les équations de ces surfaces se reproduisent donc, lorsque l'on applique H, multipliées par $\epsilon^0 = 1$. Ces surfaces ne passent donc plus par les points unis $O_1$, $O_2$, $O_3$ de I.

On conclut de tout ceci que le système $p$-canonique de $\Phi$ est découpé sur cette surface par les hypersurfaces d'ordre $p(3\nu - 2)$.

Liège, le 7 mars 1957.