Observation sur la construction de surfaces algébriques non rationnelles de genres zéro

Lucien Godeaux

Résumé
Exposé d'un procédé de construction d'une surface de genres arithmétique et géométrique nuis, de bigenre supérieur à l'unité, en partant d'une surface contenant une courbe canonique isolée effective.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Observation sur la construction de surfaces algébriques non rationnelles de genres zéro,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Exposé d'un procédé de construction d'une surface de genres arithmétique et géométrique nuls, de bigenre supérieur à l'unité, en partant d'une surface contenant une courbe canonique isolée effective.

Nous avons montré antérieurement que l'image d'une involution cyclique d'ordre $p_a + 1$, dépourvue de points unis, appartenant à une surface algébrique régulière de genre arithmétique p_a, est une surface de genres géométrique et arithmétique nuls, mais de bigenre supérieur à l'unité (1). L'application de ce théorème nous a permis de construire des exemples effectifs de surfaces de genres $p_a = p_g = 0, P_2 > 1$ (2), Dans cette courte note,

(1) *Sur les involutions cycliques dépourvues de points unis, appartenant à une surface régulière* (BULLETIN DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1932, pp. 672-679), *Sur certaines involutions cycliques, dépourvues de points unis, appartenant à une surface algébrique* (IDEM, 1933, pp. 986-991), *Sur la construction de surfaces algébriques non rationnelles, de genres arithmétique et géométrique nuls* (IDEM, 1934, pp. 8-11), *Remarques sur la construction de surfaces algébriques non rationnelles de genres zéro* (IDEM, 1949, pp. 971-975). Voir aussi notre exposé sur *Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls*. ACTUALITÉS SCIENT., N° 123 (Paris, Hermann, 1934).

(2) *Sur une surface algébrique de genres zéro et de bigenre deux* (RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA NAZ. DEI LINCEI, 2e sem., 1931, pp. 26-37), *Sur les surfaces algébriques de genres arithmétique et géométrique zéro dont le genre linéaire est égal à deux* (BULLETIN DE L'ACAD. ROY. DE BELG., 1933, pp. 26-37), *Sur la construction de surfaces non rationnelles de genres zéro* (IDEM, 1949, pp. 688-693). La surface construite dans cette dernière note a les genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 3$, $P_3 = 7$.

nous nous proposons de donner une nouvelle démonstration du théorème que nous venons de rappeler, dans le cas $p_a = 1$, plus simple que celle que nous avons donnée antérieurement.

1. Soit F une surface algébrique régulière de genres $p_a = p_g = 1$ et de genre linéaire $p^{(1)} > 1$, contenant une involution du second ordre I privée de points unis, engendrée par une transformation T de la surface F en soi.

Désignons par L la courbe canonique de F et par Φ une surface image de l'involution I. La courbe L est transformée en soi par T et il lui correspond sur Φ une courbe K dont le genre π est donné par la formule de Zeuthen,

$$4(\pi - 1) = 2(p^{(1)} - 1),$$

d'où $p^{(1)} = 2\pi - 1$ et $\pi > 1$, Le genre linéaire de Φ est égal à π.

Entre le genre arithmétique $p_a = 1$ de F et celui p'_a de Φ, nous avons la relation

$$p_a + 1 = 2(p'_a + 1),$$

d'où $p'_a = 0$.

La surface F étant régulière, il en est de même de Φ et cette dernière est dépourvue de courbe canonique ($p'_g = p'_a = 0$).

Le système bicanonique $|2L|$ de F est transformé en soi par T. Il ne peut être composé au moyen de l'involution I. Dans cette hypothèse en effet, il lui correspondrait sur Φ le système bicanonique de cette dernière surface et les surfaces F et Φ auraient même bigenre On aurait donc $\pi = 2\pi$, ce qui est absurde.

2. Le système bicanonique $|2L|$ de F a la dimension

$$P_2 - 1 = p_a + p^{(1)} - 1 = 2\pi - 1,$$

le degré $8(\pi - 1)$ et le genre $6\pi - 5$. Il est transformé en soi par T et contient deux systèmes linéaires $|(2L)_1|$, $|(2L)_2|$ composés au moyen de I. Soient $|K_1|$, $|K_2|$ les systèmes qui leur correspondent sur Φ et r_1, r_2 leurs dimensions respectives. D'après la théorie des homographies harmoniques, on a

$$r_1 + r_2 + 2 = 2\pi.$$

Sur la courbe L, les courbes bicanoniques 2L découpent la série canonique, donc sur K, les courbes K_1, K_2 découpent les unes, par exemple les courbes K_1, la série canonique, de dimension $\pi - 1$, les autres, K_2, une série paracanonique, de dimension $\pi - 2$.

On a $r_1 \leqslant \pi - 1$, puisque l'adjoint $|K_1|$ à K ne peut contenir cette courbe comme partie. La courbe 2K ne peut donc appartenir au système $|K_1|$, donc elle appartient au système $|K_2|$. La dimension de ce dernier est par suite au plus égale à $\pi - 1$ également. Il en résulte que l'on a

$$r_1 = r_2 = \pi - 1.$$

3. Pour déterminer le système bicanonique de Φ, observons que l'on a par hypothèse

$$|K'| = |K_1|,$$

d'où, puisque $|K_2|$ contient la courbe 2K comme courbe totale,

$$|K_2'| = |K + K_1|$$

et

$$|K_2''| = |2K_1|.$$

Or, puisque l'involution I est dépourvue de points unis, on a

$$|2K_1| = |2K_2|$$

et par conséquent,

$$|K_2''| = |2K_2|, \quad |K_2'' - K_2| = |K_2|$$

Ainsi donc, le système bicanonique de Φ est le système $|K_2|$ de dimension $P_2' - 1 = \pi - 1$, de degré $4(\pi - 1)$ et de genre $3\pi - 2$. Le bigenre de Φ est donc $P_2' = \pi$.

Il est digne de remarque que le système bicanonique $|K_2|$ contient la courbe K comptée deux fois, sans que K soit une courbe canonique de la surface

Liége, le 21 août 1957.