Bulletin de la Classe des sciences

Remarques sur la formation des systèmes canonique et pluricanoniques de quelques surfaces algébriques (cinquième note)

Lucien Godeaux

Résumé

Construction d’une surface algébrique dont le système canonique est formé de trois courbes rationnelles de degré virtuel — (v + 1) et d’une partie variable composée de v — 1 courbes d’un faisceau de courbes elliptiques. Le système p-canonique est irréductible.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Remarques sur la formation des systèmes canonique et pluricanoniques de quelques surfaces algébriques,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(Cinquième note).

Résumé. — Construction d'une surface algébrique dont le système canonique est formé de trois courbes rationnelles de degré virtuel $-(\nu + 1)$ et d'une partie variable composée de $\nu - 1$ courbes d'un faisceau de courbes elliptiques. Le système p-canonique est irréductible.

Nous considérons dans cette note la surface Φ image d'une involution cyclique d'ordre premier $p = 9\nu^2 - 3\nu + 1$, cyclique, présentant trois points unis, appartenant à une surface algébrique d'ordre $3\nu + 1$: F. Nous avions étudié le cas $\nu = 2$ dans la note précédente [1]. Comme nous l'avons remarqué, ce cas devait être traité à part parce que les biadjointes de la surface F sont d'ordre inférieur à celui de la surface. Cela entraîne que le système bicanonique de Φ a une partie variable qui est, comme celle du système canonique, composée au moyen d'un faisceau de courbes elliptiques. Il n'en est plus de même lorsque $\nu > 2$. Comme on le verra plus loin, le système bicanonique n'est plus composé au moyen d'un faisceau.

D'une manière précise, dans le cas $\nu > 2$ étudié ici, le système canonique comprend trois composantes fixes rationnelles de degré virtuel $-(\nu + 1)$ et une partie variable composée de

[1] Les premières notes ont paru dans le BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, 1956, pp. 1002-1011, 1102-1106 ; 1957, pp. 8-16, 56-62.

$\nu - 1$ courbes d'un faisceau $|K_3'|$ de courbes elliptiques. Le système bicanonique n'est plus composé au moyen de ce faisceau. Le système p-canonique est irréductible.

Nous n'avons pas étudié le système tricanonique, dont les propriétés changent avec la valeur de ν.

1. Considérons la surface F d'équation

$$a_1 x_1^{3\nu} x_2 + a_2 x_2^{3\nu} x_3 + a_3 x_3^{3\nu} x_1 + x_4 \sum_0^{\nu} a_{4+i} (x_1 x_2 x_3)^i x_4^{3\nu-3i} = 0,$$

où ν est un entier positif tel que $p = 9\nu^2 - 3\nu + 1$ soit un nombre premier.

La surface F est transformée en soi par l'homographie H de période p,

$$H = \begin{pmatrix} x_1 & \epsilon x_2 & \epsilon^{9\nu^2-6\nu+2} x_3 & \epsilon^{3\nu^2-2\nu+1} x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

où ϵ est une racine primitive d'ordre p de l'unité.

Sur F, H engendre une involution I, d'ordre p, présentant trois points unis O_1, O_2, O_3. Nous désignerons par Φ une surface normale, image de l'involution I, sur laquelle les points de diramation O_1', O_2', O_3', homologues des points unis, O_1, O_2, O_3, sont isolés. Les points O_1, O_2, O_3 d'une part, les points O_1', O_2', O_3' d'autre part, ont même structure.

Nous désignerons par $|\Gamma|$ le système des sections hyperplanes de Φ, par C les courbes qui leur correspondent sur F. Nous supposerons que les courbes C sont découpées sur F par les surfaces d'ordre p dont l'équation se reproduit multipliée par l'unité lorsque l'on applique H.

En adoptant nos notations habituelles [1], au point uni O_1 sont attachés les nombres $\alpha = 6\nu^2 - \nu + 1$, $\beta = 9\nu^2 - 6\nu + 3$. Les courbes C passant par O_1 ont en ce point la multiplicité $3\nu - 1$. Elles passent $3\nu - 2$ fois par les $\nu - 1$ points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \nu - 1)$, ν fois par le point (α, ν), une fois par les points $(\alpha, \nu + 1)$, $(\alpha, \nu + 2)$, ..., $(\alpha, 6\nu^2 - \nu)$, $\nu - 1$ fois par les

[1] Voir notre *Mémoire sur les surfaces multiples* (MÉMOIRES IN-8° DE L'ACAD ROYALE DE BELGIQUE, 1952).

points $(\alpha, \nu, 1)$, $(\alpha, \nu, 2)$, une fois par les points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, 9\nu^2 - 6\nu + 2)$. Il en résulte que le point O_1' est multiple d'ordre $\nu + 1$ pour Φ.

Sur la surface Φ_1, projection de Φ à partir de O_1' sur un hyperplan de l'espace ambiant, il correspond aux domaines des points $(\alpha, 6\nu^2 - \nu)$, $(\alpha, \nu, 2)$, $(\beta, 9\nu^2 - 6\nu + 2)$ respectivement une droite σ_α, une courbe rationnelle τ_α d'ordre $\nu - 1$ et une droite σ_β.

L'analyse de la structure du point O_1 et de celle du point O_1' se fait sans difficulté, nous nous bornerons à indiquer le résultat.

Le point O_1' est équivalent à un ensemble de $3\nu + 3$ courbes rationnelles

$$\sigma_\alpha, \ \rho_0, \ \tau_\alpha, \ \rho_1, \ \rho_2, \ \ldots, \ \rho_{3\nu-1}, \ \sigma_\beta$$

dont chacune rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres.

La courbe τ_α est de degré virtuel $-(\nu + 1)$, les autres de degré virtuel -2.

La courbe ρ_0 représente le domaine du point $\left(\alpha, \frac{1}{2}\nu(3\nu + 1), 1\right)$. La courbe ρ_1 représente le domaine du point $(\beta, 1, 3\nu - 1)$, la courbe ρ_2 le domaine du point

$$(\beta, 2, 3\nu - 2), \ \ldots, \ \left(\beta_1 \frac{9}{2}\nu(\nu + 1) + 2, \ 1\right).$$

Les autres points unis de première espèce situés dans le domaine du point O_1 donnent naissance sur Φ à des courbes exceptionnelles.

Les points O_2', O_3' sont équivalents à des systèmes de courbes analogues. Dans ce qui va suivre, les points O_1', O_2', O_3' interviennent d'une manière symétrique et nous écrirons par exemple $\Sigma\sigma_\alpha$ la somme des trois courbes analogues à σ_α relatives aux trois points.

2. Désignons par K_1 la section de F par le plan $x_4 = 0$ et par K_1' la courbe qui lui correspond sur Φ. La courbe K_1 passe par le point $(\alpha, 6\nu^2 - \nu)$ relatif à chacun des points O_1, O_2, O_3, donc la courbe K_1' rencontre en un point les courbes σ_α relatives à chacun des points O'_1, O'_2, O'_3. Nous avons donc sur Φ la relation fonctionnelle

$$\Gamma = pK'_1 + (6\nu^2 - \nu + 1)\,\Sigma\,\sigma_\alpha + (3\nu^2 + \nu + 1)\Sigma\rho_0 + (3\nu + 1)\Sigma\tau_\alpha + X, \tag{1}$$

où nous posons

$$X = \Sigma[3\nu\rho_1 + (3\nu - 1)\rho_2 + \ldots + 2\rho_{3\nu-1} + \sigma_\beta].$$

En utilisant la formule de Zeuthen, on voit facilement que la courbe K'_1 est rationnelle. D'après la relation (1), elle est de degré virtuel — 2. En effet, on a pris, pour système $|C|$ sur F, le système découpé par les surfaces d'ordre p dont l'équation se reproduit lorsque l'on applique l'homographie H. Les courbes Γ et K'_1 se rencontrent alors en $3\nu + 1$ points.

Désignons maintenant par K_3 les courbes découpées sur F par les surfaces

$$x_1x_2x_3 + \lambda x_4^3 = 0. \tag{2}$$

Effectuons sur l'équation de F et sur celle des surfaces (2), ν fois la transformation

$$(x_1^2,\ x_2x_3,\ x_1x_3,\ x_3x_4),$$

puis deux fois la transformation

$$(x_1^2,\ x_2x_4,\ x_3x_4,\ x_1x_4).$$

Nous obtenons

$$a_1x_1^{9\nu(\nu+1)}x_2 + a_2x_1^{3\nu}x_2^{3\nu}x_3^{3\nu^2-\nu+1}x_4^{6\nu^2+4\nu-4} + a_3x_1^{9\nu^2+3\nu+3}x_3^{2\nu}x_4^{4\nu-2} + \ldots = 0,$$
$$x_1^{6\nu-3}x_2 + \lambda x_3^{2\nu-1}x_4^{4\nu-1} = 0.$$

Le point O_1 du nouvel espace correspond au point $(\alpha, \nu, 2)$ et à H correspond l'homographie

$$(x_1\quad \epsilon^{2\nu}x_2\quad \epsilon^{6\nu^2-3\nu+1}x_3\quad \epsilon^{6\nu^2-3\nu+1}x_4),$$

qui donne dans le plan tangent à la surface transformée de F une homologie de centre O_1. Les deux surfaces précédentes se coupent suivant une courbe, transformée de K_3, passant simplement par O_1 et y ayant comme tangente

$$x_2 = 0, \quad \lambda a_1 x_4 - a_3 x_3 = 0.$$

La courbe K_3 passe donc simplement par le point $(\alpha, \nu, 2)$ et a de ce fait un point triple en O_1. Comme d'après son équation, elle a également un point triple en O_1, elle ne peut passer par aucun des autres points unis de première espèce du domaine de O_1. On en conclut que la courbe K_3' rencontre en un point la courbe τ_α et ne rencontre pas les autres composantes du point O_1'. Elle a un comportement analogue en O_2', O_3'. On en conclut qu'elle satisfait à la relation fonctionnelle

$$3\Gamma \equiv pK_3' + (3\nu + 1)\,\Sigma\,\sigma_\alpha + 2(3\nu + 1)\,\Sigma\,\rho_0 + \\ + 3(3\nu + 1)\,\Sigma\tau_\alpha + 3X. \tag{3}$$

La comparaison des relations (1) et (3) donne

$$K_3' \equiv 3K_1' + 2\,\Sigma\sigma_\alpha + \Sigma\rho_0.$$

Les courbes K_3 sont de genre $\frac{1}{2}(3p - 1)$ donc, en appliquant la formule de Zeuthen, on trouve que les courbes K_3' sont elliptiques. D'autre part, sur la surface Φ, elles ont l'ordre $3(3\nu + 1)$ et par la formule (3), elles ont donc le degré zéro. Elles forment un faisceau $|K_3'|$ de courbes elliptiques.

3. Les courbes canoniques de la surface Φ doivent rencontrer en $\nu - 1$ points chacune des courbes τ_α relatives aux trois points de diramation, puisque ces courbes sont de degré virtuel $-(\nu + 1)$. Elles ne rencontrent pas les autres composantes des points de diramation, qui sont de degré virtuel -2. A ces courbes canoniques correspondent sur F des courbes canoniques de cette surface, donc des courbes découpées par des surfaces d'ordre $3\nu - 3$. On en conclut que parmi les courbes canoniques de Φ se trouvent des courbes dont la partie variable se compose de $\nu - 1$ courbes du faisceau $|K_3'|$.

Les courbes canoniques de F transformées des courbes canoniques de Φ sont découpées par les surfaces d'ordre $3\nu - 3$

formant un système linéaire dont toutes les surfaces sont transformées en soi par H. D'après ce qui précède, ce système doit comprendre les surfaces (2) comptées $v - 1$ fois. L'équation d'une surface du système linéaire, lorsque l'on applique H, se reproduit donc multipliée par $\epsilon^{6\nu^2+2\nu-1}$. On voit aisément que ces surfaces ont pour équation

$$\sum_{i=0}^{\nu-1} \lambda_i (x_1 x_2 x_3)^i x_4^{3\nu-3i-3} = 0.$$

Il en résulte que sur la surface Φ, la partie variable du système canonique est formée de $\nu - 1$ courbes du faisceau $|K_3'|$.

4. Avant de nous occuper du système bicanonique, considérons le système linéaire de courbes découpées sur F par le système linéaire, invariant pour H, contenant F, c'est-à-dire par le système linéaire

$$\lambda_1 x_1 x_3^{3\nu} + \lambda_2 x_2^{3\nu} x_3 + x_4 \sum_{i=0}^{\nu} \lambda_{3+i} (x_1 x_2 x_3)^i x_4^{3\nu-i} = 0. \tag{4}$$

Appliquons successivement à la surface F et à la surface (4) la transformation

$$(x_1^2 \qquad x_2 x_4 \qquad x_3 x_4 \qquad x_1 x_4)$$

puis la transformation

$$(x_1^{3\nu} \qquad x_2 x_3^{3\nu-1} \qquad x_1^{3\nu-1} x_3 \qquad x_3^{3\nu-1} x_4).$$

Nous obtenons respectivement

$$a_1 x_1^{18\nu^2-3\nu+1} x_2 + a_2 x_2^{3\nu} x_3^{18\nu^2-9\nu+2} x_4^{3\nu} + a_3 x_1^{9\nu^2+1} x_3^{9\nu^2-6\nu+2} x_4^{3\nu-1}$$
$$+ x_1^{9\nu^2-\nu+1} x_3^{9\nu^2-6\nu+2} x_4^{2\nu-1} \Sigma a_{4+i} (x_2 x_3)^i (x_1 x_1)^{\nu-i} = 0,$$

et

$$\lambda_1 x^{9\nu^2+1} x_3 x_4^{\nu-1} + \lambda_2 x_2^{3\nu} x_3^{9\nu^2-3\nu+4} + x_1^{9\nu^2-\nu+1} \Sigma \lambda_{3+i} (x_2 x_3)^i (x_1 x_4)^{\nu-i} = 0.$$

Le point O_1 du nouvel espace correspond au point $(\beta, 1, 3\nu - 1)$. La transformée de la surface (4) coupe celle de F en une courbe ayant en ce point la tangente

$$x_2 = 0, \quad \lambda_2 x_3 + \lambda_3 x_4 = 0.$$

Les courbes découpées sur F par les surfaces (4) passent donc simplement par le point $(\beta, 1, 3\nu - 1)$ et, par suite simplement par les points $(\beta, 1, 3\nu - 2)$, ... $(\beta, 1, 1)$. Elles passent au moins une fois par $(\beta, 1)$ et ont au moins 3ν tangentes en O_1 confondues avec O_1O_4. D'autre part, si l'on projette la courbe intersection des surfaces F et (4) sur le plan $x_1 = 0$, on trouve une courbe d'ordre $9\nu^2 + 3\nu + 1$; on en conclut que la courbe en question a exactement la multiplicité 3ν en O_1. On voit donc que les courbes $K_{3\nu+1}$ découpées sur F en dehors de composantes fixes, par les surfaces (4), passent 3ν fois par O_1 et une fois par les points $(\beta, 1)$, $(\beta, 1, 1)$, ..., $(\beta, 1, 3\nu - 1)$.

Les courbes $K'_{3\nu+1}$ qui correspondent aux courbes $K_{3\nu+1}$ sur Φ rencontrent donc en un point variable la courbe ρ_1, mais ne rencontrent pas les autres composantes de O'_1. Elles ont un comportement analogue en O'_2, O'_3 et satisfont par suite à la relation fonctionnelle

$$(3\nu + 1)\Gamma \equiv pK'_{3\nu+1} + 3\nu \Sigma \sigma_a + 6\nu \Sigma \rho_0 + 9\nu \Sigma \tau_a + (3\nu + 1)X.$$

On en déduit

$$K'_{3\nu+1} = (3\nu + 1)K'_1 + (2\nu + 1)\Sigma\sigma_a + (\nu + 1)\Sigma\rho_0 + \Sigma\tau_a .$$

5. Aux courbes bicanoniques de la surface Φ correspondent sur F des courbes (bicanoniques) découpées par des surfaces transformées chacune en soi par l'homographie H et formant un système linéaire contenant la surface $x_4^{6\nu-6} = 0$. Ce système linéaire a donc pour équation

$$x_1x_3^{3\nu}x_4^2 \sum_{i=0}^{\nu-3} \lambda_i(x_1x_2x_3)^i x_4^{3\nu-9-3i} + x_2^{3\nu}x_3x_4^2 \sum_{i=0}^{\nu-3} \lambda'_i(x_1x_2x_3)^i x_4^{3\nu-9-3i}$$
$$+ \sum_{i=0}^{2\nu-2} \mu_i(x_1x_2x_3)^i x_4^{6\nu-6-3i} = 0.$$

Ces surfaces passent une fois par le point $(\beta, 1, 3\nu - 1)$, $\nu - 3$ fois par le point $(\alpha, \nu, 2)$ et deux fois par le point $(\alpha, 6\nu^2 - \nu)$. Désignons par $K_{6\nu-6}$ les courbes découpées sur F par ces surfaces et par $K'_{6\nu-6}$ les courbes qui leur correspondent sur Φ. Celles-ci satisfont à l'équation fonctionnelle

$$(6\nu - 6)\Gamma \equiv pK'_{6\nu-6} + (15\nu^2 - 7\nu - 1)\Sigma\sigma_a + (12\nu^2 - 8\nu - 4)\Sigma\rho_0$$
$$+ (9\nu^2 - 9\nu - 7)\Sigma\tau_a + (6\nu - 6)X. \qquad (4)$$

En comparant à la relation (3), on obtient

$$K'_{6\nu-6} + \Sigma\sigma_a = 2(\nu - 1)K'_3 + \Sigma\tau_a. \qquad (5)$$

On voit donc que le système canonique de Φ est

$$|L_1| = |(\nu - 1)K'_3 + \Sigma\tau_a|$$

et le système bicanonique

$$|L_2| = |2L_1| = |K'_{6\nu-6} + \Sigma\sigma_a + \Sigma\tau_a|.$$

6. Aux courbes du système p-canonique de Φ correspondent sur F les courbes découpées par les surfaces d'ordre $3p(\nu - 1)$, p-adjointes, transformées chacune en soi par l'homographie H, formant un système linéaire contenant la surface $x_4^{3p(\nu-1)} = 0$. Il en résulte que ce système linéaire contient aussi les surfaces $x_1^{3p(\nu-1)} = 0$, $x_2^{3p(\nu-1)} = 0$, $x_3^{3p(\nu-1)} = 0$, c'est-à-dire, que les courbes de F transformées des courbes p-canoniques de Φ ne passent pas par O_1, O_2, O_3.

On en conclut que le système p-canonique de Φ est découpé sur cette surface par les hypersurfaces d'ordre $3p(\nu - 1)$ de l'espace ambiant. On a

$$|L_p| = |3(\nu - 1)p\Gamma|.$$

On a égalementl

$$|L_p| = |p(\nu - 1)K'_3 + p\Sigma\tau_a|.$$

On a ainsi un nouvel exemple d'une surface dont le système canonique est formé de trois courbes rationnelles fixes et d'une partie variable composée au moyen d'un faisceau de courbes elliptiques, tandis que le système p-canonique est irréductible.

Liège, le 26 février 1957.