Bulletin de la Classe des sciences

Remarques sur la formation des systèmes canonique et pluricanoniques de quelques surfaces algébriques (quatrième note)

Lucien Godeaux

Résumé
Construction d'une surface dont les systèmes canonique et bicanonique ont trois composantes fixes rationnelles de degré virtuel — 3 et dont la partie variable est composée au moyen d'un faisceau de courbes elliptiques. La partie variable du système tricanonique n'est pas composée au moyen de ce faisceau.

Citer ce document / Cite this document :

Godeaux Lucien. Remarques sur la formation des systèmes canonique et pluricanoniques de quelques surfaces algébriques (quatrième note). In: Bulletin de la Classe des sciences, tome 43, 1957. pp. 56-62;

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1957.68552;

https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1957_num_43_1_68552;

Fichier pdf généré le 22/06/2023

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Remarques sur la formation des systèmes canonique et pluricanoniques de quelques surfaces algébriques,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(Quatrième note).

Résumé. — Construction d'une surface dont les systèmes canonique et bicanonique ont trois composantes fixes rationnelles de degré virtuel — 3 et dont la partie variable est composée au moyen d'un faisceau de courbes elliptiques. La partie variable du système tricanonique n'est pas composée au moyen de ce faisceau.

La surface

$$a_1x_1^{3\nu}x_2 + a_2x_2^{3\nu}x_3 + a_3x_3^{3\nu}x_1 + \sum_{k=0}^{\nu} a_{k-k}(x_1x_2x_3)^k x_4^{3(\nu-k)+1} = 0,$$

où ν est un entier choisi de telle sorte que $p = 9\nu^2 - 3\nu + 1$ soit premier, est transformée en soi par l'homographie de période p

$$H = \begin{pmatrix} x_1 & \epsilon x_2 & \epsilon^{9\nu^2-6\nu+2}x_3 & \epsilon^{3\nu^2-3\nu+1}x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

ϵ étant une racine primitive d'ordre p. L'involution d'ordre p engendrée sur F par cette homographie possède trois points unis. Nous nous proposons d'étudier les systèmes canonique et pluricanoniques de la surface Φ image de cette involution.

Dans cette note, nous étudierons le cas $\nu = 2$. La raison en est, que pour $\nu = 2$, la surface F est du septième ordre et ses biadjointes sont d'ordre six. Cela a pour conséquence que les parties variables des systèmes canonique et bicanonique de Φ

sont formées au moyen des courbes d'un faisceau. Il n'en est plus de même, pour le système bicanonique, lorsque $\nu > 2$, parce que les biadjointes de F sont alors d'ordre supérieur à celui, $3\nu + 1$, de la surface. Le cas $\nu > 2$ sera étudié dans la prochaine note (1).

Nous nous sommes borné à donner dans cette note la structure des points unis de l'involution et celle des points de diramation de la surface Φ. La détermination de ces structures se fait sans difficulté en utilisant les méthodes que nous avons développées ailleurs (2).

1. Nous considérons la surface F d'équation

$$a_1x_1^6x_2 + a_2x_2^6x_3 + a_3x_3^6x_1 + a_4x_1^7 + a_5x_1x_2x_3x_4^4 + a_6(x_1x_2x_3)^2x_4 = 0.$$

Elle est transformée en soi par l'homographie

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} x_1 & \epsilon x_2 & \epsilon^{26}x_3 & \epsilon^9x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

de période $p = 31$, ϵ étant une racine primitive d'ordre 31 de l'unité.

L'involution I, d'ordre 31, engendrée sur F par H possède trois points unis $O_1(1, 0, 0, 0)$, $O_2(0, 1, 0, 0)$, $O_3(0, 0, 1, 0)$.

Chacun de ces points unis est caractérisé par les entiers $\alpha = 23$, $\beta = 27$.

Indiquons la structure du point O_1. A ce point sont infiniment voisins successifs d'une part une suite de 22 points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, 22)$ dont le premier se trouve sur O_1O_3 et d'autre part une suite de 26 points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, 26)$ dont le premier $(\beta, 1)$ se trouve sur O_1O_4.

(1) Les trois premières notes ont paru dans le *Bulletin de l'Académie*, 1956, pp. 1002-1011, 1102-1106 ; 1957, pp. 8-16.

(2) Voir nos travaux : *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique*. Actualités scient., No 270 (Paris, Hermann, 1935) : *Mémoire sur les surfaces multiples* (Mémoire in-8° de l'Acad. roy. de Belgique, 1953) ; *Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples*. Deuxième Colloque de géométrie algébrique de Liège (Liège, Thone et Paris, Masson, 1952, pp. 225-241) ; *Sulle involuzioni cicliche appartenenti ad una superficie algebrica* (Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano, 1953-1954).

Les points unis de première espèce du voisinage de O_1 sont les points $(\alpha, 22)$, $(\beta, 26)$, le point $(\alpha, 2, 2)$, le point $(\alpha, 7, 1)$, les points $(\alpha, 1, 3, 2)$, $(\alpha, 1, 8, 1)$, $(\alpha, 1, 23)$, les points $(\beta, 1, 5)$, $(\beta, 2, 4)$, $(\beta, 3, 1, 2)$, $(\beta, 6, 2)$, $(\beta, 11, 1)$.

Soit Φ un modèle projectif de la surface image de l'involution sur lequel les points de diramation O'_1, O'_2, O'_3 sont isolés. Ces points sont triples pour la surface Φ, le cône tangent en chacun d'eux se décomposant en trois plans.

Le point O'_1 (et de même les points O'_2, O'_3) est équivalent à un ensemble de neuf courbes rationnelles.

$$\sigma_\alpha, \rho_0, \tau_\alpha, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \sigma_\beta$$

dont chacune rencontre la précédente et la suivante en un point mais ne rencontre pas les autres. La courbe τ_α est de degré virtuel -3, les autres de degré virtuel -2.

Les courbes rationnelles σ_α, σ_β, τ_α, ρ_0, ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5 correspondent respectivement aux domaines des points $(\alpha, 22)$, $(\beta. 26)$, $(\alpha, 2, 2)$, $(\alpha, 7, 1)$, $(\beta, 1, 5)$, $(\beta, 2, 4)$, $\beta(3, 1, 2)$, $(\beta, 6, 2)$, $(\beta, 11, 1)$ de F. Aux domaines des points $(\alpha, 1, 3, 2)$, $(\alpha, 1, 8, 1)$, $(\alpha, 1, 2, 3)$ correspondent des courbes exceptionnelles de Φ.

2. La courbe K_1, découpée sur F par le plan $x_4 = 0$, passe par le point $(\alpha, 22)$ et a un comportement analogue en O_2, O_3. Il lui correspond sur Φ une courbe K'_1 satisfaisant à la relation fonctionnelle

$$\Gamma \equiv 31K'_1 + 23\Sigma\sigma_\alpha + 15\Sigma\rho_0 + 7\Sigma\tau_\alpha + X,$$

où nous posons

$$X = 6\Sigma\rho_1 + 5\Sigma\rho_2 + 4\Sigma\rho_3 + 3\Sigma\rho_4 + 2\Sigma\rho_5 + \Sigma\,\sigma_\beta,$$

les sommations étant étendues aux trois points de diramation.

La courbe K_1 est de genre 15. La courbe K'_1, qui représente une involution d'ordre 31 avec trois points unis appartenant à K_1, est donc rationnelle.

D'autre part, d'après la formule précédente, K'_1 est de degré virtuel -2.

3. Les courbes canoniques de Φ doivent rencontrer en un point chacune des courbes τ_a relatives aux trois points de diramation. Il leur correspond sur F les courbes (canoniques) découpées par des surfaces cubiques passant simplement par le point $(a, 2, 2)$. Ces surfaces sont

$$\lambda_1 x_1 x_2 x_3 + \lambda_2 x_4^3 = 0. \tag{1}$$

Effectuons en effet sur F et sur la surface précédente deux fois la transformation

$$(x_1^2 \quad x_2 x_3 \quad x_1 x_3 \quad x_3 x_4)$$

puis deux fois la transformation

$$(x_1^2 \quad x_2 x_4 \quad x_3 x_4 \quad x_1 x_4).$$

Nous obtenons

$$a_1 x_1^{48} x_2 + a_2 x_2^6 x_3^{11} x_4^{32} + a_3 x_1^{39} x_3^4 x_4^6 + \ldots = 0,$$

$$\lambda_1 x_1^9 x_2 + \lambda_2 x_3^3 x_4^7 = 0.$$

Au point $(a, 2, 2)$ correspond le point $O_1''(1, 0, 0, 0)$ du nouvel espace. En ce point les deux surfaces précédentes ont en commun une courbe ayant pour tangente en O_1'' la droite

$$x_2 = 0, \quad a_1 \lambda_2 x_4 - a_3 \lambda_1 x_3 = 0.$$

Aux courbes K_3 découpées par les surfaces (1) sur F correspondant sur Φ des courbes K_3' vérifiant la relation fonctionnelle

$$3\Gamma \equiv 31 K_3' + 7 \Sigma \sigma_a + 14 \Sigma \rho_0 + 21 \Sigma \tau_a + 3X.$$

On en déduit

$$K_3' \equiv 3K_1' + 2\Sigma\sigma_a + \Sigma\rho_0.$$

La partie variable du système canonique de Φ est constituée par le faisceau $|K_2'|$, qui comprend la courbe $3K_1'$.

Les courbes K_3 sont de genre 46. Une courbe K_3' représente une involution d'ordre 31, présentant trois points unis, appartenant à une courbe K_3, donc les courbes K_3' sont elliptiques.

Les courbes bicanoniques de Φ ont pour homologues, sur F, les courbes découpées par les surfaces

$$\lambda_1(x_1x_2x_3)^2 + \lambda_2x_1x_2x_3x_4 + \lambda_3x_4^6 = 0.$$

La partie variable des courbes bicanoniques de Φ est donc formée des couples de courbes du faisceau $|K_3^1|$.

4. Aux courbes tricanoniques de Φ correspondent sur F les courbes découpées par les surfaces du système linéaire.

$$x_4^2[\lambda_1x_2^6x_3 + \lambda_2x_3^6x_1 + \lambda_3x_4^7 + \lambda_4x_4x_2x_3x_4^4 + \lambda_5(x_1x_2x_3)^2x_4] + \\ + \lambda_6(x_1x_2x_3)^3 = 0, \qquad (2)$$

ne contenant pas F comme partie.

Appliquons à la surface F et à la surface (2) une fois la transformation

$$(x_1^2 \quad x_2x_4 \quad x_3x_4 \quad x_1x_4)$$

puis cinq fois la transformation

$$(x_1^2 \quad x_2x_3 \quad x_1x_3 \quad x_3x_4)$$

Il vient respectivement

$$a_1x_1^{67}x_2 + a_2x_2^6x_3^{56}x_4^6 + \ldots = 0,$$
$$x_1^{37}x_4^2(\lambda_2x_3 + \lambda_2x_4) + \ldots = 0.$$

Le point $O_1(1, 0, 0, 0)$ du nouvel espace correspond au point $(\beta, 1, 5)$. La courbe intersection des deux surfaces passe par ce point et y a comme tangente

$$x_2 = 0, \quad \lambda_2x_3 + \lambda_3x_4 = 0.$$

On en conclut que les courbes tricanoniques de Φ rencontrent en un point la courbe ρ_1.

Supposons que les courbes tricanoniques de Φ rencontrent en x points la courbe σ_a, en y points la courbe ρ_0 et en z points, la courbe τ_a. Si l'on appelle K_9' la partie variable de ces courbes, on a

$$\begin{aligned}9\Gamma \equiv 31\ K_9' &+ (23x + 15y + 7z + 6)\ \Sigma\sigma_a + \\ &+ (15x + 30y + 14z + 12)\ \Sigma\rho_0 \\ &+ (7x + 14y + 3z + 18)\ \Sigma\tau_a + \\ &+ (x + 2y + 3z + 7)X. \end{aligned} \qquad (3)$$

Les courbes K_9 découpées sur F par les surfaces (2) doivent passer x fois par le point $(\alpha, 22)$, y fois par le point $(\alpha, 7, 1)$, z fois par le point $(\alpha, 2, 2)$. On vient de voir qu'elles passent une fois par le point $(\beta, 1, 5)$; donc elles passent $2x + 3y + z + 6$ fois par le point O_1. Mais parmi les courbes K_9 se trouvent les courbes $3K_3$. Une courbe K_3 passe trois fois par O_1, donc les courbes K_9 passent au plus 9 fois par O_1 et on a

$$2x + 2y + z \leqslant 3.$$

On a, d'autre part

$$9\Gamma \equiv 3 \cdot 31K_3' + 21\ \Sigma\sigma_a + 42\ \Sigma\rho_0 + 63\ \Sigma\tau_a + 9X$$

et la comparaison de cette formule avec (3) doit donner une relation entre K_9' et $3K_3'$. On en conclut que les expressions

$$23x + 15y + 7z - 15,\ 15x + 30y + 14z - 30,\ 7x + 14y + 3z - 45$$

doivent être multiples de 31. On en déduit facilement $z = 0$, $y = 1$, $x = 0$ et la relation (3) s'écrit

$$9\Gamma \equiv 31\ K_9' + 21\ \Sigma\sigma_a + 42\ \Sigma\rho_0 + 32\ \Sigma\tau_a + 9X.$$

On en déduit

$$K_9' \equiv 3K_3' + \Sigma\tau_a.$$

On vérifie aisément, par des transformations quadratiques, que les courbes K_9 passent bien simplement par le point $(\alpha, 7, 1)$ [1].

[1] Les calculs sont assez longs parce que après avoir effectué cinq fois la transformation $(x_1^2, x_2x_3, x_1x_3, x_3x_1)$ sur l'équation de F de façon à faire apparaître comme point $O_1(1,0,0,0)$ dans le nouvel espace le point $(\alpha, 5)$, on obtient une surface dont le plan tangent en O_1 est $a_1x_2 + a_2x_3$. Il faut alors modifier la transformation quadratique comme nous l'avons fait pp. 890-891 de notre note *Sur une surface du cinquième ordre possédant une droite double tacnodale* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1956, pp. 884-896).

5. De ce qui précède, on déduit que le système canonique $| L_1 |$ de Φ doit avoir comme composantes fixes les courbes τ_a. On a

$$| L_1 | = | K_3' + \Sigma \tau_a |$$

et par suite, pour les systèmes bicanonique et tricanonique,

$$|L_2| = |2L_1| = |2K_3' + 2\Sigma\tau_a|,$$
$$|L_3| = |3L_1| = |3K_3' + 3\Sigma\tau_a| = |K_9' + 2\Sigma\tau_a|.$$

Observons que le système 31-canonique est certainement dépourvu de composantes fixes. A ce système correspond en effet sur F le système découpé par les surfaces d'ordre 93 formant un système invariant pour l'homographie H et contenant le terme en x_4^{93}; il contient par suite les termes en x_1^{93}, x_2^{93}, x_3^{93} et, par conséquent, les courbes 31-canoniques de Φ ne peuvent plus contenir les courbes τ_a.

Liège, le 29 janvier 1957.