Sur la construction de surfaces projectivement canoniques

Lucien Godeaux

Résumé
Construction d’une surface dont le système des sections hyperplanes constitue le système canonique complet.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur la construction de surfaces projectivement canoniques,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Construction d'une surface dont le système des sections hyperplanes constitue le système canonique complet.

Nous appelons surface projectivement canonique une surface dont le système canonique complet est constitué par le système des sections hyperplanes (on dit parfois simplement surface canonique). Enriques a attiré l'attention, à diverses reprises, sur l'intérêt qu'il y a à construire de telles surfaces. Dans cette note, nous indiquons un procédé pour obtenir des surfaces de cette nature. Nous l'appliquons dans un cas particulier simple, nous réservant de traiter le cas général dans un travail ultérieur ; nous indiquons brièvement à la fin en quoi consiste ce cas général. L'intérêt de la construction que nous exposons ici réside dans le fait que l'on peut aisément former les équations de la surface, ces équations étant particulièrement simples. En fait, la surface est obtenue comme image d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique, cette involution n'ayant qu'un nombre fini de points unis, tous de première espèce.

1. Considérons, dans un espace linéaire S_5 à cinq dimensions, l'homographie H de période trois, d'équations

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 : x'_5 = x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : \epsilon x_4 : \epsilon x_5,$$

où ϵ est une racine primitive cubique de l'unité, et la surface F d'équations

$$\varphi_1(x_0, x_1, x_2, x_3) + \psi_1(x_4, x_5) = 0,$$

$$\varphi_2(x_0, x_1, x_2, x_3) + \psi_2(x_4, x_5) = 0,$$

$$\varphi_3(x_0, x_1, x_2, x_3) + \psi_3(x_4, x_5) = 0,$$

où les φ et les ψ sont des formes algébriques du troisième degré de leurs arguments. Nous supposerons que dans l'espace $\xi_0(x_4 = x_5 = 0)$, les trois surfaces $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ se rencontrent en 27 points distincts et que, sur la droite $\xi_1(x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0)$, les groupes de points $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$, $\psi_3 = 0$ n'ont aucun point commun.

La surface F, d'ordre 27, est transformée en soi par l'homographie H et celle-ci engendre, sur cette surface, une involution I n'ayant qu'un nombre fini de points unis : les points $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$.

Les sections hyperplanes de F sont des courbes de genre 55 dont la série canonique complète g_{108}^{54} est découpée par les hypersurfaces du quatrième ordre. Il en résulte que les courbes canoniques de F sont découpées par les hypersurfaces cubiques de S_5 et on obtient ainsi le système canonique complet, F étant l'intersection complète de trois hypersurfaces. Les hypersurfaces cubiques de S_5 linéairement indépendantes sont au nombre de 56 et si on défalque les trois hypersurfaces cubiques définissant F, on obtient le genre arithmétique $p_a = 53$ de cette surface. D'autre part, F étant régulière, son genre géométrique est $p_g = p_a = 53$.

Le genre linéaire de F est égal à $p^{(1)} = 244$.

2. Soient F′ une surface image de l'involution I, p_a' son genre arithmétique et π son genre linéaire.

En un point uni A de l'involution I, le plan tangent à la surface F passe par la droite ξ_1, donc H détermine dans ce plan une homologie de centre A. Le point A est donc un point uni de première espèce et le point de diramation qui lui correspond sur F′ est équivalent à une courbe rationnelle de degré virtuel — 3.

Entre les genres arithmétiques p_a de F et p'_a de F', nous avons la relation [1]

$$12(p_a + 1) = 3 . 12(p'_a + 1) - 4\alpha,$$

où $\alpha = 27$ est le nombre des points unis de l'involution. On en déduit $p'_a = 20$. La surface F' étant régulière comme F, son genre géométrique est $p'_g = 20$.

Entre les genres linéaires $p^{(1)}$ de F et π de F', nous avons la relation

$$p^{(1)} - 1 = 3(\pi - 1) + \alpha,$$

d'où $\pi = 73$.

3. Désignons par $|K|$ le système canonique de F, par $|K'|$ celui de F'.

Le système canonique $|K|$ de F contient trois systèmes linéaires partiels $|K_0|$, $|K_1|$, $|K_2|$ composés au moyen de l'involution I. Le premier est dépourvu de points-base, les courbes du second et du troisième doivent passer une ou deux fois par les points unis.

D'autre part, les courbes canoniques K' de F' doivent rencontrer en un point les courbes rationnelles équivalentes aux points de diramation. On en conclut que les courbes de l'un des systèmes $|K_1|$, $|K_2|$, par exemple celles de $|K_1|$, doivent passer une fois par les points unis de I et les courbes K_2 doublement. Le transformé du système canonique $|K'|$ de F' est donc le système $|K_1|$.

Les courbes K_1 sont découpées sur F par les hypersurfaces

$$x_4\chi_1(x_0, x_1, x_2, x_3) + x_5\chi_2(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0, \qquad (1)$$

où les χ sont des formes algébriques quadratiques à coefficients variables.

Le nombre des hypersurfaces (1) linéairement indépendantes est égal à 20, c'est-à-dire au genre géométrique $p'_g = p'_a$ de F'. On en conclut qu'aucune des hypersurfaces (1) ne contient F.

[1] *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de la Société Mathématique de France, 1919, pp. 1-16).

4. Les hypersurfaces (1) passent une fois par l'espace ξ_0 et deux fois par la droite ξ_1 ; ce sont des hypersurfaces réglées dont les génératrices s'appuyent sur ξ_0 et sur ξ_1.

Rapportons projectivement les hypersurfaces (1) aux hyperplans d'un espace linéaire S_{19} à 19 dimensions. Dans ce but, posons

$$\rho X_{ik} = \rho X_{ki} = x_4 x_i x_k, \quad \rho Y_{ik} = \rho Y_{ki} = x_5 x_i x_k, \qquad (2)$$
$$(i,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

et interprétons les X, Y comme coordonnées homogènes des points de S_{19}.

Des équations (2) on déduit que les déterminants

$$\left| \begin{matrix} X_{00} & X_{01} & X_{02} & X_{03} \\ X_{01} & X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{02} & X_{12} & X_{22} & X_{23} \\ X_{03} & X_{13} & X_{23} & X_{33} \end{matrix} \right| \qquad \left| \begin{matrix} Y_{00} & Y_{01} & Y_{02} & Y_{03} \\ Y_{01} & Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{02} & Y_{12} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{03} & Y_{13} & Y_{23} & Y_{33} \end{matrix} \right|$$

sont de caractéristiques deux.

Dans l'espace S_9, d'équations $Y_{00} = Y_{01} = \ldots = Y_{23} = 0$, les équations données par le premier déterminant représentent une variété V_3^8, à trois dimensions et d'ordre huit, obtenue en rapportant projectivement les quadriques d'un espace ordinaire aux hyperplans de S_9.

Dans S_{19}, ces équations représentent une variété W_{13}^8, de dimension 13 et d'ordre huit, lieu des espaces linéaires projetant les points de V_3^8 de l'espace S_9' d'équations $X_{00} = X_{01} = \ldots = X_{23} = 0$.

En intervertissant les rôles des deux déterminants, on obtient de même une variété $V_3'^8$ dans S_9' et une variété $W_{13}'^8$.

Des équations (1) on déduit également

$$\left\| \begin{matrix} X_{00} & X_{01} & X_{02} \ldots X_{23} \\ Y_{00} & Y_{01} & Y_{02} \ldots Y_{23} \end{matrix} \right\| = 0,$$

représentant une variété M_{10}^{10}, à dix dimensions, d'ordre dix.

Les variétés W_{13}^8, $W_{13}'^8$, M_{10}^{10} ont en commun une variété Ω_4 représentant les droites s'appuyant sur ξ_0 et ξ_1. En effet, les hypersurfaces (1) contenant une de ces droites forment un système linéaire de dimension 18 auquel il correspond une gerbe d'hyperplans de S_{19}. Le sommet de celle-ci correspond à la droite considérée.

Deux hypersurfaces (1) ont en commun en dehors de ξ_0 une variété à trois dimensions R_3^8 d'ordre huit, pour laquelle la droite ξ_1 est quadruple. Un hyperplan passant par ξ_0 coupe une hypersurface (1) suivant un cône du second ordre à trois dimensions dont le sommet est sur ξ_1. On en conclut que cet hyperplan coupe R_3^8 suivant un cône à deux dimensions du quatrième ordre et que, par conséquent, la variété R_3^8 coupe l'espace ξ_0 suivant une surface d'ordre quatre.

Une troisième hypersurface (1) coupe R_3^8 suivant une surface réglée R_2^{20}, d'ordre 20, passant huit fois par la droite ξ_1. Un hyperplan passant par ξ_0 coupe R_2^{20}, en dehors de ξ_0, suivant huit droites, donc ξ_0 rencontre R_2^{20} suivant une courbe d'ordre 12.

Une quatrième hypersurface (1) coupe R_2^{20}, en dehors de ξ_0, ξ_1, suivant une courbe d'ordre 32 formée de 32 droites s'appuyant sur ξ_0, ξ_1.

La variété Ω_4^{32} est donc d'ordre 32.

5. Le modèle projectif de la surface F′ obtenu en rapportant projectivement les hypersurfaces (1) aux hyperplans de S_{19} est tracé sur la variété Ω_4^{32}. En effet, un groupe de l'involution I est formé de trois points situés sur une droite s'appuyant sur ξ_0, ξ_1 et à ce groupe correspond sur Ω_4^{32} le point représentant cette droite.

Des équations de la surface F et des équations (1), on déduit

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1(X_{i0}, X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}) & \psi_1(X_{ik}, Y_{ik}) \\ \varphi_2(X_{i0}, X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}) & \psi_2(X_{ik}, Y_{ik}) \\ \varphi_3(X_{i0}, X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}) & \psi_3(X_{ik}, Y_{ik}) \end{matrix} \right\| = 0.$$

Ces équations représentent une variété d'ordre 27, à 17 dimensions. On obtient ainsi des variétés, pour $i, k = 0, 1, 2, 3$, contenant la surface F′.

L'ordre de F′ se calcule de la manière suivante : Une variété R_3^8 coupe F en 8.27 points formant 8.9 groupes de I et par conséquent F′ est d'ordre $72 = \pi - 1$.

Les équations que l'on vient d'écrire (n^os^ 4,5) *ont en commun la surface projectivement canonique* F' que nous nous proposions de construire.

La courbe de diramation sur ce modèle de la surface F' est formée de 27 droites représentant les 27 faisceaux de droites dont chacun a pour sommet un point uni de l'involution et pour plan, le plan passant par la droite ξ_1.

6. La question précédente peut se généraliser en considérant dans un espace linéaire S_r à r dimensions la surface

$$\varphi_i(x_0, x_1, \dots x_{r-2}) + \psi_2(x_{r-1}, x_r) = 0,$$
$$(i = 1, 2, \dots, r-2$$

où les φ et les ψ sont des formes algébriques de degré premier p, linéairement indépendantes, les plus générales possible.

Cette surface est transformée en soi par une homographie de période p ayant pour axes ponctuels la droite

$$x_0 = x_1 = \dots = x_{r-2} = 0$$

et l'espace à $r-2$ dimensions $x_{r-1} = x_r = 0$. Sur la surface, cette homographie engendre une involution d'ordre p possédant p^{r-2} points unis de première espèce. On peut construire un modèle projectivement canonique de l'image de cette involution.

Liége, le 5 octobre 1957.