Bulletin de la Classe des sciences

Sur la détermination des courbes tracées sur une surface multiple

Lucien Godeaux

Résumé
On considère les courbes tracées sur une surface multiple d'ordre premier, n'ayant qu'un nombre fini de points de diramation. On donne quelques indications sur une méthode permettant de déterminer ces courbes et on en fait une application à un cas particulier.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur la détermination des courbes tracées sur une surface multiple,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — On considère les courbes tracées sur une surface multiple d'ordre premier, n'ayant qu'un nombre fini de points de diramation. On donne quelques indications sur une méthode permettant de déterminer ces courbes et on en fait une application à un cas particulier.

Étant donnée, sur une surface algébrique F, une involution cyclique I d'ordre premier p impair, on peut construire, sur cette surface, un système linéaire $|C|$ transformé en soi par la transformation birationnelle T génératrice de I, contenant p systèmes linéaires $|C_0|$, $|C_1|$, ..., $|C_{p-1}|$ appartenant à l'involution I, le premier étant dépourvu de points-base et les autres ayant comme points-base les points unis de I, supposés en nombre fini. Sur une surface Φ image de l'involution, il correspond à ces p systèmes des systèmes linéaires complets $|\Gamma_0|$, $|\Gamma_1|$, ..., $|\Gamma_{p-1}|$.

Nous avons déterminé la structure des points de diramation de la surface Φ [1]. Chacun de ceux-ci est équivalent à un ensemble de courbes rationnelles de degré virtuel inférieur à -1. Le problème qui se présente est la détermination du comportement des courbes Γ_1, Γ_2, ..., Γ_{p-1} aux points de diramation, c'est-à-dire quelles sont les composantes des points de diramation que ces courbes rencontrent. Nous avons déjà consacré plusieurs

---

[1] *Mémoire sur les surfaces multiples* (MÉMOIRES IN-8° DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1953).

notes à ce problème [1]. La méthode à suivre est la suivante : Les systèmes $|2C|$, $|3C|$, ..., $|kC|$ se comportent vis-à-vis de l'involution comme le système $|C|$, c'est-à-dire que le système $|kC|$ contient p systèmes linéaires $|(kC)_0|$, $|(kC)_1|$, ..., $|(kC)_{p-1}|$ appartenant à l'involution, le premier étant dépourvu de points-base. Le système $|(kC)_0|$ contient des courbes formées de k courbes prises d'une certaine manière, dans les systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_{p-1}|$. Ces courbes se comportent en un point uni de I comme les courbes C_0 passant un certain nombre de fois par le point uni et dont le comportement en ce point est connu. Dans cette note, après avoir donné les grandes lignes de cette méthode, nous l'appliquons à un cas particulier pour en préciser l'emploi.

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I d'ordre premier impair $p = 2\nu + 1$, ne possédant qu'un nombre fini de points unis. Construisons sur F un système linéaire $|C|$ transformé en lui-même par la transformation birationnelle T de F en soi, contenant p systèmes linéaires partiels $|C_0|$, $|C_1|$, ..., $|C_{p-1}|$ appartenant à I, le premier étant dépourvu de points-base. En rapportant projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace de dimension convenable, il correspond à F une surface normale Φ image de l'involution I. Nous désignerons par Γ_0 les sections hyperplanes de Φ et par Γ_1, Γ_2, ..., Γ_{p-1} les courbes qui correspondent sur Φ respectivement aux courbes C_1, C_2, ..., C_{p-1}.

Soit A un point uni de seconde espèce de l'involution I auquel sont attachés les entiers α, β, compris entre 1 et p. Au point A correspond sur Φ le point de diramation isolé A'.

Il existe ν systèmes linéaires $|C_0'|$, $|C_0''|$, ..., $|C_0^{(\nu)}|$ formés par des courbes C_0 passant par A et ayant en ce point des multiplicités croissantes. Les courbes $C_0^{(i)}$ sont précisément les courbes $C_0^{(i-1)}$ assujetties à toucher en A une direction non unie pour T. Ces courbes ont des tangentes fixes en A, confondues avec les deux directions unies pour T issues de A.

[1] *Sur les courbes tracées sur une surface multiple* (Bull. de l'Acad roy. de Belgique, 1953, pp. 419-425, 532-540) ; *Sur certaines courbes tracées sur une surface multiple* (Bull. de la Soc. Roy. des Sciences de Liège, 1955, pp. 201-208).

Par les méthodes que nous avons indiquées, on peut déterminer les comportements en A des courbes C'_0, C''_0, ..., $C_0^{(\nu)}$ et en déduire les structures des points A et A'. Il s'agit maintenant de déterminer le comportement en A des courbes C_1, C_2, ..., C_{p-1} et d'en déduire le comportement en A' des courbes Γ_1, Γ_2, ..., Γ_{p-1}.

2. Si ϵ est une racine primitive d'ordre p de l'unité, on peut attacher aux systèmes $|C_0|$, $|C_1|$, ..., $|C_{p-1}|$ respectivement les nombres $\epsilon^0 = 1$, ϵ, ..., ϵ^{p-1}.

Nous connaissons le comportement en A des courbes C_1 et C_α. Au point A sont infiniment voisins successifs d'une part une suite de points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$, d'autre part, une suite de points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, \beta - 1)$. Ces points sont unis de seconde espèce pour I sauf $(\alpha, \alpha - 1)$, $(\beta, \beta - 1)$ qui sont unis de première espèce.

Les courbes C_1 passent simplement par les points A, $(\beta, 1)$, ..., $(\beta, \beta - 1)$, les courbes C_α passent simplement par les points A, $(\alpha, 1)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$.

Considérons le système $|kC|$, où k est un entier positif. Il est transformé en soi par T et contient p systèmes linéaires partiels $|(kC)_0|$, $|(kC)_1|$, ..., $|(kC)_{p-1}|$ appartenant à l'involution I.

Nous pouvons arranger les notations de manière que le système $|(kC)_i|$ contiennent les courbes $(k-1)C_0 + C_i$. Alors, aux systèmes $|(kC)_0|$, $|(kC)_1|$, ..., $|(kC)_{p-1}|$ sont respectivement associés les nombres $\epsilon^0 = 1$, ϵ, ..., ϵ^{p-1}.

Supposons en premier lieu $k = 2$. Les courbes $C_i + C_{p-i}$ appartiennent au système $|(2C)_0|$, c'est-à-dire au système $|2C_0|$. Observons que :

1° Les courbes $C_i + C_{p-i}$ ont des tangentes fixes en A ;

2° Les courbes $C_0^{(\nu)}$ assujetties à toucher en A une direction non unie pour T ont en A la multiplicité p et p tangentes variables.

Il en résulte que les courbes $C_i + C_{p-i}$ ont en A le même comportement que les courbes $C_0 + C_0^{(m)}$, c'est-à-dire le même comportement que les courbes $C_0^{(m)}$, m étant un entier compris entre 0 et $\nu + 1 (1 \leqslant m \leqslant \nu)$.

Cette remarque permettra de déterminer le comportement en A des courbes C_{p-1}, $C_{p-\alpha}$.

D'autre part, les courbes kC_1 appartiennent au système $|(kC)_k|$, qui comprend également les courbes $(k-1)C_0 + C_k$, ce qui donnera des indications sur le comportement en A des courbes C_k.

On obtiendra d'autres indications en considérant les courbes kC_α.

Il ne semble pas possible d'énoncer les règles générales et nous montrerons, sur un cas particulier, comment il faut opérer.

3. Supposons $p = 17$, $\alpha = 11$, $\beta = 14$. Nous avons à déterminer les solutions des congruences

$$\lambda + 11\mu = 0, \quad \mu + 14\lambda = 0, \qquad (\text{mod. } 17).$$

On trouve $\lambda_1 = 1$, $\mu_1 = 3$; $\lambda_2 = 6$, $\mu_2 = 1$; $\lambda_3 = 2$, $\mu_3 = 6$; $\mu_4 = 7$, $\mu_4 = 4$; $\lambda_5 = 3$, $\mu_5 = 9$; $\lambda_6 = 12$, $\mu_6 = 2$; $\lambda_7 = 8$, $\mu_7 = 7$; $\lambda_8 = 4$, $\mu_8 = 12$.

Les courbes $C'_0, C''_0, \ldots, C_0^{(8)}$ sont caractérisées par les schémas suivants :

Courbes C'_0.

A^4, $(\beta, 1)^1$, $(\beta, 2)^1$, …, $(\beta, 13)^1$.
$(\alpha, 1)^3$
$(\alpha, 2, 1)^1$, $(\alpha, 2)^2$
$(\alpha, 3)^1$
$\vdots$
$(\alpha, 10)^1$.

Courbes C''_0.

A^7, $(\beta, 1)^3$, $(\beta, 2)^2$, $(\beta, 3)^2$, $(\beta, 4)^2$, $(\beta, 5)^1$,
$(\alpha, 1)^1$, $(\beta, 1, 1)^1$, $(\beta, 5, 1)^1$.
$\vdots$ $(\beta, 1, 2)^1$,
$(\alpha, 10)^1$. $(\beta, 1, 3)^1$.

Courbes C'''_0.

A^8, $(\beta, 1)^2$, …, $(\beta, 4)^2$, $(\beta, 5)^1$,
$(\alpha, 1)^6$, $(\beta, 5, 1)^1$.
$(\alpha, 2, 1)^3$, $(\alpha, 2)^3$.

Courbes $C_0^{(4)}$.

$$\begin{array}{llll} & A^{11}, & (\beta, 1)^4, & (\beta, 2)^2, \\ & (\alpha, 1)^4, & (\beta, 1, 1)^1, & (\beta, 2, 1)^1, \ (\beta, 2, 1, 1)^1. \\ (\alpha, 2, 1)^2, & (\alpha, 2)^8, & (\beta, 1, 2)^1, & \\ & & (\beta, 1, 3)^1. & \end{array}$$

Courbes $C_0^{(5)}$.

$$\begin{array}{ll} A^{12}, (\beta, 1)^3, (\beta, 2)^2, & \\ (\alpha, 1, 3)^1, (\alpha, 1, 2)^2, (\alpha, 1, 1)^2, (\alpha, 1)^4, & (\beta, 2, 1)^1, (\beta, 2, 1, 1)^1 \\ (\alpha, 1, 3, 1)^1 \quad (\alpha, 2, 1)^1, (\alpha, 2)^1, & \end{array}$$

Courbes $C_0^{(6)}$.

$$\begin{array}{lll} & A^{14}, & (\beta, 1)^3, \\ & (\alpha, 1)^2, & (\beta, 1, 1)^3, \\ (\alpha, 2, 1)^1, & (\alpha, 2)^1, & (\beta_1, 1, 2)^3, \\ & & (\beta, 1, 3)^3. \end{array}$$

Courbes $C_0^{(7)}$.

$$\begin{array}{ll} A^{15}, & (\beta, 1)^2, \\ (\alpha, 1, 3)^1, (\alpha, 1, 2)^2, (\alpha, 1, 1)^2, (\alpha, 1)^2, & (\beta, 1, 1)^2, \\ (\alpha, 1, 3, 1)^1. & (\beta, 1, 2)^2, \\ & (\beta, 1, 3)^2. \end{array}$$

Courbes $C_0^{(8)}$.

$$\begin{array}{ll} A^{16}, & (\beta, 1)^1 \\ (\alpha, 1, 11)^1, \ldots, (\alpha, 1, 1)^1, (\alpha, 1)_1, & (\beta, 1, 1)^1, \\ & (\beta, 1, 2)^1, \\ & (\beta, 1, 3)^1 \end{array}$$

Aux domaines des points $(\alpha, 10)$, $(\alpha, 2, 1)$, $(\beta, 1, 3)$, $(\beta, 2, 1, 1)$, $(\beta, 5, 1)$, $(\beta, 13)$ correspondent respectivement sur Φ des courbes rationnelles σ_α, τ_α, ρ_1, ρ_2, ρ_3, σ_β toutes de degré virtuel -2 sauf τ_α, qui est de degré virtuel -3. Aux domaines des points $(\alpha, 1, 3, 1)$, $(\alpha, 1, 11)$ correspondent sur Φ des courbes exceptionnelles.

On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_\alpha + \tau_\alpha + \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \sigma_\beta,$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0'' + \sigma_\alpha + \tau_\alpha + 2(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) + \sigma_\beta,$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0''' + \sigma_\alpha + 2(\tau_\alpha + \rho_1 + \rho_2 + \rho_3) + \sigma_\beta,$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(4)} + \sigma_\alpha + 2\tau_\alpha + 3(\rho_1 + \rho_2) + 2\rho_3 + \sigma_\beta,$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(6)} + \sigma_\alpha + 2\tau_\alpha + 4\rho_1 + 3\rho_2 + 2\rho_3 + \sigma_\beta.$$

4. Nous avons d'autre part

$$17\Gamma_0 \equiv 17\Gamma_1 + \sigma_\alpha + 2\tau_\alpha + 5\rho_1 + 8\rho_2 + 11\rho_3 + 14\sigma_\beta + \Delta_1,$$
$$17\Gamma_0 \equiv 17\Gamma_{11} + 11\sigma_\alpha + 5\tau_\alpha + 4\rho_1 + 3\rho_2 + 2\rho_3 + \sigma_\beta + \Delta_{11}\ ;$$

les termes Δ_1, Δ_{11} provenant des autres points de diramation de Φ.

Les courbes Γ_1 coupent σ_β en un point variable et les courbes Γ_{11} coupent σ_α en un point variable.

On a $C_1 + C_{16} \equiv C_0 + C_0'$ et par conséquent les courbes C_{16} passant trois fois par A, trois fois par $(\alpha, 1)$, deux fois par $(\alpha, 2)$, une fois par $(\alpha, 3)$, ..., $(\alpha, 10)$ et par $(\alpha, 2, 1)$. Les courbes Γ_{16} rencontrent les courbes σ_α et τ_α chacune en un point variable. On a

$$17\Gamma_0 \equiv 17\Gamma_{16} + 16\sigma_\alpha + 15\tau_\alpha + 12\rho_1 + 9\rho_2 + 6\rho_3 + 3\sigma_\beta + \Delta_{16},$$

Δ_{16} étant un terme qui provient des autres points de diramation.

La courbe $C_{11} + C_6$ peut être une courbe $C_0 + C_0'$ ou $C_0 + C_0''$. Si c'est une courbe $C_0 + C_0'$, la courbe C_6 doit passer trois fois par A, deux fois par $(\alpha, 1)$, une fois par $(\alpha, 2)$, $(\alpha, 3)$, ..., $(\alpha, 10)$ et par $(\alpha, 2, 1)$, ce qui est impossible. Donc $C_{11} + C_6$ est une courbe $C_0 + C_0''$; la courbe C_6 passe six fois par A, trois fois par $(\beta, 1)$, deux fois par $(\beta, 2)$, $(\beta, 3)$, $(\beta, 4)$, une fois par $(\beta, 5)$, $(\beta, 5, 1)$, $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 2)$, $(\beta, 1, 3)$.

Les courbes Γ_6 rencontrent en un point variable chacune des courbes ρ_1, ρ_3. On a

$$17\Gamma_0 \equiv 17\Gamma_6 + 6\sigma_\alpha + 12\tau_\alpha + 30\rho_1 + 31\rho_2 + 32\rho_3 + 16\sigma_\beta + \Delta_6,$$

Δ_6 provenant des autres points de diramation de Φ.

5. Nous allons maintenant déterminer le comportement en A des courbes C_8, C_9.

Observons tout d'abord que les courbes $3C_1 + 2C_{11}$ appartiennent au système $|(5\ C)_8|$. Il en résulte que les courbes $(5C)_8$

et par conséquent les courbes C_8 passent cinq fois par A et ont en ce point deux tangentes confondues avec $A(\alpha, 1)$ et trois avec $A(\beta, 1)$.

Les courbes $4C_1 + 2C_{11}$ appartiennent au système $|(6C)_9|$, par suite les courbes de ce système passent six fois par A et ont en ce point deux tangentes confondues avec $A(\alpha, 1)$ et quatre avec $A(\beta, 1)$. Il en est de même des courbes C_9.

Les courbes $C_8 + C_9$ ont donc la multiplicité onze en A et coïncident avec les courbes $C_0 + C_0^{(4)}$. On en conclut que :

Les courbes C_8 passent cinq fois par A, deux fois par $(\alpha, 1)$, une fois par $(\alpha, 2)$, $(\alpha, 2, 1)$, trois fois par $(\beta, 1)$, deux fois par $(\beta, 2)$, une fois par $(\beta, 2, 1)$, $(\beta, 2, 1, 1)$.

Les courbes C_9 passent six fois par A, deux fois par $(\alpha, 1)$, une fois par $(\alpha, 2)$, $(\alpha, 2, 1)$, une fois par $(\beta, 1)$, $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 2)$, $(\beta, 1, 3)$.

On a

$$17\Gamma_0 \equiv 17\Gamma_8 + 8\sigma_\alpha + 16\tau_\alpha + 23\rho_1 + 30\rho_2 + 20\rho_3 + 10\sigma_\beta + \Delta_8,$$
$$17\Gamma_0 \equiv 17\Gamma_9 + 9\sigma_\alpha + 18\tau_\alpha + 28\rho_1 + 21\rho_2 + 14\rho_3 + 7\sigma_\beta + \Delta_9,$$

Δ_8 et Δ_9 provenant des autres points de diramation de Φ.

Les courbes Γ_8 rencontrent les courbes τ_α, ρ_2 chacune en un point variable et les courbes Γ_9, les courbes τ_α et ρ_1 chacune en un point variable également.

6. La détermination du comportement en A des courbes C_8, C_9 montre le procédé à utiliser. Nous nous bornerons, pour les autres systèmes, à énoncer les résultats.

Les courbes C_2 passent deux fois par les points A, $(\beta, 1)$, ..., $(\beta, 4)$, une fois par $(\beta, 5)$, $(\beta, 5, 1)$. On a

$$17\Gamma_0 \equiv 17\Gamma_2 + 2\sigma_\alpha + 4\tau_\alpha + 10\rho_1 + 16\rho_2 + 22\rho_3 + 11\sigma_\beta + \Delta_2,$$

où Δ_2 a la signification habituelle.

On a $C_2 + C_{15} \equiv C_0 + C_0''$ et les courbes C_{15} passent cinq fois par A, une fois par $(\alpha, 1)$, ..., $(\alpha, 10)$, $(\beta, 1)$, $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 2)$, $(\beta, 1, 3)$. On a

$$17\Gamma_0 \equiv 17\Gamma_{15} + 15\sigma_\alpha + 13\tau_\alpha + 24\rho_1 + 18\rho_2 + 12\rho_3 + 8\sigma_\beta + \Delta_{13}.$$

Les courbes C_3 passent trois fois par A et par $(\beta, 1)$, deux fois par $(\beta, 2)$, une fois par $(\beta, 2, 1)$, $(\beta, 2, 1, 1)$. On a

$$17\Gamma_0 \equiv 17\Gamma_3 + 3\sigma_\alpha + 6\tau_\alpha + 15\rho_1 + 24\rho_2 + 16\rho_3 + 8\sigma_\beta + \Delta_3.$$

Les courbes $C_3 + C_{14}$ appartiennent au système déterminé par les courbes $C_0 + C_0^{(4)}$. Les courbes C_{14} passent huit fois par A, quatre fois par $(\alpha, 1)$, deux fois par $(\alpha, 2)$ et $(\alpha, 2, 1)$, une fois par $(\beta, 1)$, $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 2)$, $(\beta, 1, 3)$. On a

$$17\Gamma_0 \equiv 17\Gamma_{14} + 14\sigma_\alpha + 28\tau_\alpha + 36\rho_1 + 27\rho_2 + 18\rho_3 + 9\sigma_\beta + \Delta_{14}.$$

Lrs courbes C_4 passent quatre fois par A et une fois par les points $(\beta, 1)$, $(\beta, 1, 1, 1)$, $(\beta, 1, 1, 2)$, $(\beta, 1, 1, 3)$. On a

$$17\Gamma_0 \equiv 17\Gamma_4 + 4\sigma_\alpha + 8\tau_\alpha + 20\rho_1 + 15\rho_2 + 10\rho_3 + 5\sigma_\beta + \Delta_4.$$

Les courbes $C_4 + C_{13}$ appartiennent au système $|C_0 + C_0''|$. Les courbes C_{13} passent trois fois par A, une fois par $(\alpha, 1)$, ..., $(\alpha, 10)$, deux fois par $(\beta, 1)$ ..., $(\beta, 4)$ et une fois par $(\beta, 5)$, $(\beta, 5, 1)$. On a

$$17\Gamma_0 \equiv 17\Gamma_{13} + 13\sigma_\alpha + 9\tau_\alpha + 14\rho_1 + 19\rho_2 + 24\rho_3 + 12\sigma_\beta + \Delta_{13}.$$

Les courbes C_{12} ont le même comportement en A que les courbes $C_4 + C_{11}$, c'est-à-dire passent deux fois par A, une fois par $(\alpha, 1)$, ..., $(\alpha, 10)$, une fois par $(\beta, 1)$, ..., $(\beta, 13)$. On a

$$17\Gamma_0 \equiv 17\Gamma_{12} + 12\sigma_\alpha + 7\tau_\alpha + 9\rho_1 + 11\rho_2 + 13\rho_3 + 15\sigma_\beta + \Delta_{12}.$$

Les courbes $C_5 + C_{12}$ appartiennent au système $|C_0 + C_0'|$. Les courbes C_5 passant deux fois par A et par $(\alpha, 1)$, une fois par $(\alpha, 2)$, $(\alpha, 2, 1)$. On a

$$17\Gamma_0 \equiv 17\Gamma_5 + 5\sigma_\alpha + 10\tau_\alpha + 8\rho_1 + 6\rho_2 + 4\rho_3 + 2\sigma_\beta + \Delta_5.$$

Les courbes C_{10} passent quatre fois par A, $(\alpha, 1)$, deux fois par $(\alpha, 2)$, $(\alpha, 2, 1)$. On a

$$17\Gamma_0 \equiv 17\Gamma_{10} + 10\sigma_\alpha + 20\tau_\alpha + 16\rho_1 + 12\rho_2 + 8\rho_3 + 4\sigma_\beta + \Delta_{10}.$$

La courbe $C_{10} + C_7$ appartient au système $|C_0 + C_0'''|$. Les courbes C_7 passent quatre fois par A, deux fois par $(\alpha, 1)$, une fois par $(\alpha, 2)$, $(\alpha, 2, 1)$, deux fois par $(\beta, 1)$, ..., $(\beta, 4)$, une fois par $(\beta, 5)$, $(\beta, 5, 1)$. On a

$$17\Gamma_0 \equiv 17\Gamma_7 + 7\sigma_\alpha + 14\tau_\alpha + 18\rho_1 + 22\rho_2 + 26\rho_3 + 13\sigma_\beta + \Delta_7.$$

Liège, le 15 mai 1957.