Sur les points de diramation d’une surface multiple : points de seconde catégorie

Lucien Godeaux

Résumé
Examen d’un point de diramation d’une surface multiple d’ordre premier p > 2 en lequel le cône tangent se scinde en trois cônes rationnels $(\sigma\alpha)$, $(\tau\alpha)$, $(\sigma\beta)$ dans le cas où, sur la droite commune à $(\sigma\alpha)$, $(\tau\alpha)$, se trouve un point double conique infiniment voisin du point de diramation.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les points de diramation d'une surface multiple : points de seconde catégorie,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Examen d'un point de diramation d'une surface multiple d'ordre premier $p > 2$ en lequel le cône tangent se scinde en trois cônes rationnels (σ_a), (τ_a), (σ_β) dans le cas où, sur la droite commune à (σ_a), (τ_a), se trouve un point double conique infiniment voisin du point de diramation.

Étant donnée sur une surface algébrique F, une involution cyclique d'ordre premier n'ayant qu'un nombre fini de points unis, un de ceux-ci est dit de seconde espèce si la transformation birationnelle de F en soi génératrice de l'involution ne donne pas l'identité dans son domaine du premier ordre. Si Φ est une surface image de l'involution, à un point uni de seconde espèce correspond un point de diramation (de seconde espèce) en lequel le cône tangent à la surface se scinde en deux cônes (première catégorie), ou en trois cônes (seconde catégorie) ou en quatre cônes (troisième catégorie) rationnels [1]. Nous considérons ici un point de seconde catégorie.

Si nous projetons la surface Φ du point de diramation considéré sur un hyperplan de l'espace ambiant, nous obtenons une surface Φ_1 et au domaine du point de diramation correspond sur cette surface l'ensemble de trois courbes rationnelles σ_a, τ_a rencontrant σ_a en un point A_a, σ_β rencontrant τ_a en un point A_1 mais ne rencontrant pas σ_a. Dans la plupart des exemples que nous avons rencontrés le point A_1 est double pour la surface Φ_1 mais le point A_a est simple. Nous examinons ici le cas où le point A_a est

[1] *Mémoire sur les surfaces multiples* (Mémoires in-8° de l'Acad. roy. de Belgique, 1952).

double conique pour la surface Φ_1. Le point de diramation considéré est équivalent, au point de vue birationnel, à un ensemble de courbes rationnelles σ_α, ρ_0, τ_α, ρ_1, ρ_2, ..., ρ_t, σ_β, chacune de ces courbes rencontrant la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontrant pas les autres. Les courbes ρ_0, ρ_1, ρ_2, ..., ρ_t sont de degré virtuel — 2. Nous terminons en donnant un exemple.

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I d'ordre premier impair p, ne possédant qu'un nombre fini de points unis. Désignons par $|C|$ un système linéaire de courbes de F contenant p systèmes linéaires partiels $|C_0|$, $|C_1|$, ..., $|C_{p-1}|$ appartenant à l'involution I, le premier $|C_0|$ étant dépourvu de points-base, les autres ayant pour points-base les points unis de l'involution. En rapportant projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace linéaire ayant la même dimension que $|C_0|$, nous obtenons un modèle projectif Φ de la surface image de l'involution I sur lequel les points de diramation sont isolés.

Considérons un point uni A de seconde espèce de l'involution I auquel sont associés les entiers positifs α, β et soit A' le point de diramation correspondant sur Φ. Comme dans nos travaux antérieurs, nous désignerons par C_0' les courbes C_0 passant par A, par C_0'' les courbes C_0' assujetties à toucher en A une direction non unie pour I, et ainsi de suite. Si nous posons $p = 2\nu + 1$, le dernier système obtenu sera $|C_0^{(\nu+1)}|$ dont les courbes ont en A la multiplicité p et p tangentes variables.

Comme nous l'avons montré, il existe deux suites de points unis infiniment voisins successifs de A ; l'une est désignée par $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$, l'autre par $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, \beta - 1)$. Les points $(\alpha, \alpha - 1)$, $(\beta, \beta - 1)$ sont unis de première espèce, les autres sont unis de seconde espèce. Les points $(\alpha, 1)$, $(\beta, 1)$ appartiennent à toutes les courbes C_0', C_0'', ..., $C_0^{(\nu)}$. D'une manière précise, ces courbes ont en A des tangentes fixes $A(\alpha, 1)$, $A(\beta, 1)$. Si les courbes $C_0^{(i)}$ ont λ_i tangentes coïncidant avec $A(\beta, 1)$ et μ_i coïncidant avec $A(\alpha, 1)$, λ_i et μ_i satisfont aux congruences

$$\lambda_i + \alpha\mu_i \equiv 0, \quad \mu_i + \beta\lambda_i \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p).$$

Dans ce qui va suivre, nous supposerons que l'on a

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = hp, \quad (h > 1), \quad \mu_1 + \beta\lambda_1 = p. \tag{I}$$

Le point de diramation A' est multiple pour Φ et nous avons montré que, dans les conditions précédentes, le cône tangent en ce point à Φ se décompose en trois cônes rationnels. Projetons Φ de A' sur un hyperplan de l'espace ambiant et soit Φ_1 la surface obtenue. Au domaine de A' correspond sur Φ_1 l'ensemble de trois courbes rationnelles σ_a, τ_a rencontrant σ_a en un point A'_a, σ_β rencontrant τ_a en un point A'_1 mais ne rencontrant pas σ_a. En général, le point A'_1 est double par Φ_1 et équivaut à un certain nombre de courbes rationnelles de degré virtuel — 2. Le point A'_a peut être simple ou double. Nous imposerons la condition que le point A'_a est double conique pour la surface Φ_1.

2. Posons

$$p = a\alpha + b, \quad (b < \alpha), \quad p = b'\beta + a', \ (a' < \beta).$$

Dans ces conditions, nous avons établi que la courbe σ_a est d'ordre a et de degré virtuel — $(a + 1)$, la courbe σ_β d'ordre b' et de degré virtuel — $(b' + 1)$. Nous désignerons par m l'ordre de τ_a, son degré virtuel est — $(m + 2)$.

Au point de vue des transformations birationnelles, le point A' est équivalent à un ensemble de courbes rationnelles

$$\sigma_a, \ \rho_0, \ \tau_a, \ \rho_1, \ \rho_2, \ \ldots, \ \rho_t, \ \sigma_\beta$$

dont chacune rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres. Les courbes $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_t$ sont de degré virtuel — 2 et si le point A'_1 est simple pour la surface Φ_1, on a $t = 0$.

Nous désignerons par Γ les sections hyperplanes de Φ et par $\Gamma^{(i)}$ celles de ces courbes qui correspondent sur Φ aux courbes $C_0^{(i)}$. Nous avons

$$\Gamma \equiv \Gamma' + \sigma_a + \rho_0 + \tau_a + \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_t + \sigma_\beta.$$

Nous avons établi (¹) que si $h > 1$, il existe un nombre $h_1 > 1$ tel que

$$(h_1 - 1)(a + b) < \alpha - 1 < h_1(a + b).$$

Dans ces conditions, les nombres

$$\lambda_i' = (m + 1 - i)(h_1 b - \alpha) - (m - i)b,$$
$$\mu_i' = (m + 1 - i)(h_1 a + 1) - (m - i)a,$$
$$(i = 1, 2, \dots, m + 1)$$

sont des solutions des congruences (I).

En particulier, on a

$$\lambda_1 = m(h_1 b - \alpha) - (m - 1)b, \; \mu_1 = m(h_1 a + 1) - (m - 1)a$$

et l'on en déduit

$$h = mh_1 - m + 1.$$

Posons

$$\alpha - 1 - (h_1 - 1)b = \theta[(h_1 - 1)a + 1] + \zeta.$$

Les courbes C_0' passent $\lambda_1 + \mu_1$ fois par A, μ_1 fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \theta - 1)$, $a + 1 + \zeta$ fois par le point (α, θ), a fois par les points $(\alpha, \theta + 1)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$. Elles passent en outre par un certain nombre de points fixes, infiniment voisins successifs de (α, θ). Désignons par P le dernier de ces points fixes, il est multiple d'ordre m pour les courbes C_0'.

Les courbes Γ'' sont découpées sur Φ_1 par les hyperplans passant par le point A_1'. Les valeurs de λ_2, μ_2 correspondant à ces courbes donnent $\lambda_2 + \mu_2 > \lambda_1 + \mu_1$. Par conséquent, les sections de Φ par les hyperplans passant par A_a' correspondent à λ_1, μ_1. Si nous désignons par $\overline{\Gamma}_1$ ces courbes, on a

$$\Gamma \equiv \overline{\Gamma}_1 + \sigma_\alpha + 2\rho_0 + \tau_\alpha + \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_t + \sigma_\beta.$$

(¹) *Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples.* Deuxième Colloque de Géométrie algébrique de Liège, 1952 (Paris, Masson, 1952).

Les courbes C'_0, soient $\bar{C}'_0$, qui leur correspondent sur F passent encore $\lambda_1 + \mu_1$ fois par A, μ_1 fois par $(\alpha, 1)$, mais elles en passent plus que $m - 1$ fois par Γ et $a - 1$ fois par $(\alpha, \alpha - 1)$. Comme les courbes $\bar{\Gamma}_1$ rencontrent ρ_0 en deux points, on en conclut que les courbes $\bar{C}'_0$ passent par un certain nombre de points fixes, infiniment voisins successifs d'un point de la suite $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, \alpha - 2)$, le dernier de ces points fixes étant double pour les courbes.

Nous déterminerons ces points en raisonnant sur d'autres courbes que les courbes $\bar{C}'_0$.

3. La solution λ'_i, μ'_i des congruences (I) donne un système $|C_0^{(j)}|$ $(j \geqslant i)$ dont les courbes passent $m - i + 1$ fois par P. En particulier, pour $i = m$, on a des courbes $|C_0^*|$ passant une fois par P et a fois par $(\alpha, \alpha - 1)$, pour $i = m + 1$, des courbes passant a fois par $(\alpha, \alpha - 1)$ mais ne passant plus par P.

Si Γ^* sont les courbes qui correspondent sur Φ aux courbes C_0^*, on a

$$\Gamma \equiv \Gamma^* + \sigma_a + \rho_0 + \tau_a + m\rho_1 + \ldots .$$

Désignons pas Φ^* la surface, projection de Φ, dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ^*. Sur cette surface, τ_a est une courbe rationnelle d'ordre a et τ_a une droite rencontrant σ_a en un point A_a^* dont le domaine correspond à ρ_0. Dans nos hypothèses, A_a^* doit être double conique pour Φ^*.

Désignons par $\bar{\Gamma}^*$ les courbes Γ^* découpées par les hyperplans passant par le point A_a^* et par $\bar{C}_0^*$ les courbes qui leur correspondent sur F. On a

$$\Gamma \equiv \bar{\Gamma}^* + \sigma_a + 2\rho_0 + \tau_a + m\rho_1 + \ldots .$$

Les courbes $\bar{\Gamma}^*$ rencontrent en $a - 1$ point la courbe σ_a, en deux points la courbe ρ_0 et ne rencontrent plus τ_a. Par conséquent, les courbes $\bar{C}_0^*$, qui sont des courbes C_0^* particulières, passent $\lambda'_m + \mu'_m$ par A, μ'_m fois par $(\alpha, 1), \ldots, a - 1$ fois par $(\alpha, \alpha - 1)$, elles ne passent plus par P mais d'un point de la suite $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, \alpha - 2)$ se détache une suite de points fixes infiniment voisins successifs dont le dernier, P_1 est double pour les courbes $\overline{C}_0^*$. Au domaine de ce point correspond la courbe ρ_0.

Supposons que les courbes $\overline{C}_0^*$ passent $\mu_m = h_1 a + 1$ fois par les points $(\alpha, 1), \dots, (\alpha, x)$, $a - 1 + y$ fois par le point $(\alpha, x+1)$ et $a - 1$ fois par les points $(\alpha, x+2), \dots, (\alpha, \alpha - 1)$. La suite dont il vient d'être question et qui aboutit à P_1 se détache au point $(\alpha, x+1)$. Nous devons avoir

$$h_1(a+b) - (\alpha - 1) + x(ha + 1) + a - 1 + y \\ - (\alpha - 2 - x)(a - 1) = p,$$

c'est-à-dire

$$x[(h_1 - 1)a + 2] + y = 2(\alpha - 1) - (h_1 - 1)(a + b).$$

Puisque P_1 est double pour les courbes $\overline{C}_0^*$, les nombres

$$h_1 a + 1 - (a - 1 + y) \quad \text{et} \quad a - 1 + y - (a - 1)$$

doivent avoir comme unique facteur commun 2. Il en est donc de même des nombres $(h_1 - 1)\ a$, y. Nous devons donc poser $y = 2y'$. D'autre part, si $h_1 - 1$ est impair, a est pair et d'après la relation précédente, b est pair. Mais alors $p = a\alpha + b$ ne serait pas premier. On en conclut que h_1 est impair.

En posant $h_1 = 2h_1' + 1$, on a

$$x[h_1'a + 1) + y' = \alpha - 1 - h_1'(a + b). \tag{1}$$

Les nombres $h_1'a + 1$ et y' doivent être premiers entre eux. On en déduit

$$x[h_1'a + 1] + y' = \theta[2h_1'a + 1] + 2h_1'b + \zeta - h_1'(a + b).$$

On en déduit que l'on a $x > \theta$.

4. Nous avons établi que, dans le cas actuel, on a [1]

$$p = [(t+1)(2m+1) + 2]ab' + a(2m+1) + [(t+1)m + 1]b' \\ + m.$$

On en déduit

$$\alpha = [(t+1)(2m+1) + 2]b' + 2m + 1, \ b = [(t+1)m + 1]b' + m,$$

$$\beta = [(t+1)(2m+1) + 2]a + (t+1)m + 1, \ a' = a(2m+1) + m.$$

---

[1] *Addition à la note sur l'ordre d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de la Soc. roy. des Sciences de Liège, 1955, pp. 209-211).

On en tire

$$ma = (2m + 1)b - b'$$

et par conséquent, comme on doit avoir [1]

$$(h - 1)b < ma < hb,$$

on a $h = 2m + 1$, d'où $h_1 = 3$.

La relation

$$(h_1 - 1)(a + b) < \alpha - 1 < h_1(a + b)$$

donne $2a < (t + 1)b'$.

Les relations donnant θ, ζ, x, y' deviennent

$$(t + 1)b' = \theta(2a + 1) + \zeta,$$

$$x(a + 1) + y' = b'[(t + 1)(m + 1) + 1] + m - a.$$

Les nombres $a + 1$ et y' doivent être premiers entre eux. Cela entraîne que $a + 1$ et $(m + 1)[(b + 1)b' + 1] + b'$ sont premiers entre eux. Observons que p peut s'écrire sous la forme

$$p = a[(m+1)\{(t+1)b+1\} + b'] + (a+1)[m(t+1)b'+b'+m].$$

Par conséquent, p étant premier par hypothèse, $a + 1$ et $(m + 1)[(t + 1)b + 1] + b'$ sont certainement premier entre eux.

5. Parmi les solutions des congruences (I), nous rencontrons $\lambda = b$, $\mu = a$. Appelons $C_0^{(k)}$ les courbes qui correspondent à cette solution, $\Gamma^{(k)}$ les courbes qui leur correspondent sur Φ.

Les courbes $C_0^{(k)}$ passent $a - b$ fois par A et a fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$. Sur Φ, on a

$$\Gamma \equiv \Gamma^{(k)} + \sigma_\alpha + \rho_0 + \tau_\alpha + (m + 1)\rho_1 + \dots.$$

Puisque l'on a $2(a + b) < \alpha - 1$, on a à fortiori $2(a + b) < p$ et parmi les solutions des congruences (I), on trouve $\lambda = 2b$, $\mu = 2a$. Soient $C_0^{(l)}$ les courbes qui correspondent à cette solution et $\Gamma^{(l)}$ les courbes qui leur correspondent sur Φ. Les courbes $C_0^{(l)}$ passent $2(a + b)$ fois par A ; supposons qu'elles passent $2a$ fois

---

[1] *Les singularités des points*... (loc. cit.).

par les points $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, x)$, $a - 1 + y'$ fois par $(\alpha, x + 1)$, $a - 1$ fois par les points $(\alpha, x + 2), \ldots, (\alpha, \alpha - 1)$. On a

$$2(a + b) + 2ax + a - 1 + y' + (\alpha - 2 - x)(a - 1) = p,$$

c'est-à-dire

$$(a + 1)x + y' = \alpha - 1 - (a + b),$$

qui n'est autre que l'équation (1), où $h_1' = 1$.

On retrouve donc ainsi le point P_1 et la courbe ρ_0.

Sur Φ, on a

$$\Gamma = \Gamma^{(b)} + \sigma_a + 2\rho_0 + 2\tau_a + 2(m + 1\rho_1 + \ldots.$$

Sur la surface Φ_l, dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ, la courbe ρ_0 apparait donc comme une droite. Celle-ci étant de degré virtuel -2, la surface Φ_l doit être la projection de Φ_{l-1} à partir d'un point multiple de cette dernière surface.

6. Nous allons examiner un cas particulier, déjà rencontré dans un travail antérieur (¹) où nous sommes borné à énoncer les structures des points A et A'.

Nous supposons

$$p = 9\nu^2 - 3\nu + 1,\ \alpha = 6\nu^2 - \nu + 1,\ \beta = 9\nu^2 - 6\nu^2 + 3,$$
$$a = 1,\ b = 3\nu^2 - 2\nu.$$

Nous devons avoir

$$(h_1 - 1)(3\nu^2 - 2\nu + 1) < 6\nu^2 - \nu < h_1(3\nu^2 - 2\nu + 1),$$

d'où $h_1 = 3$. On a ensuite

$$\lambda_1 = 1,\ \mu_1 = 3\nu - 2,\ h = mh_1 - m + 1 = 2\nu - 1,$$

d'où $m = \nu - 1$.

Les relations donnant θ et x sont

$$\alpha - 1 - (h_1 - 1)b = 3\nu = \theta[(h_1 - 1)a + 1] + \zeta = 3\theta + \zeta,$$

(¹) *Remarques sur la formation des systèmes canonique et pluricanoniques de quelques surfaces algébrique*, cinquième note (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1957, pp. 96-97).

d'où $\theta = \nu$, $\zeta = 0$,

$$x(a + 1) + y' = \alpha - 1 - (a + b)$$

ou

$$2x + y' = 3\nu^2 + \nu - 1,$$

d'où $x = \frac{1}{2}\nu(3\nu + 1) - 1$, $y' = 1$.

Le point uni donnant naissance à la courbe ρ_0 est

$$\left(\alpha, \frac{1}{2}\nu(3\nu + 1), 1\right).$$

Liège, le 2 avril 1957.