Remarques sur la formation des systèmes canonique et pluricanoniques de quelques surfaces algébriques (troisième note)

Lucien Godeaux

Résumé
Construction d'une surface algébrique dont le système canonique possède quatre composantes fixes : une courbe algébrique comptée deux fois et trois courbes rationnelles de degré virtuel — (3v + 1), la partie variable étant composée au moyen d'un faisceau de courbes elliptiques. Le système bicanonique est irréductible.

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Remarques sur la formation des systèmes canonique et pluricanoniques de quelques surfaces algébriques,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie,
(Troisième note)

Résumé. — Construction d'une surface algébrique dont le système canonique possède quatre composantes fixes : une courbe algébrique comptée deux fois et trois courbes rationnelles de degré virtuel $-(3\nu + 1)$, la partie variable étant composée au moyen d'un faisceau de courbes elliptiques. Le système bicanonique est irréductible.

Dans cette troisième note [1], nous considérons la surface image d'une involution cyclique d'ordre premier $p = 3\nu^2 + 3\nu + 1$ appartenant à une surface d'ordre $3\nu + 3$. Cette involution possède trois points unis. La surface Φ, image de l'involution, possède trois points de diramation ; chacun d'eux est équivalent à l'ensemble de $\nu + 1$ courbes rationnelles, l'une de degré virtuel $-(3\nu + 1)$, les autres de degré virtuel -2. Il existe sur Φ un faisceau linéaire de courbes elliptiques $|K_3'|$ et dans ce faisceau, une courbe dégénérée en une courbe elliptique K_1' comptée trois fois.

Le système canonique de la surface Φ contient comme composantes fixes la courbe K_1' comptée deux fois, les composantes de degré virtuel $-(3\nu + 1)$ des points de diramation et comme partie variable des groupes de $\nu - 1$ courbes du faisceau $|K_3'|$. Le système bicanonique est irréductible.

[1] Les deux premières notes ont paru dans le *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1956, pp. 1002-1011, 1102-1106.

1. La surface F, d'ordre $3\nu + 3$, d'équation

$$\begin{aligned} & a_{01}x_1^{3\nu+2}x_2 + a_{02}x_2^{3\nu+2}x_3 + a_{03}x_3^{3\nu+2}x_1 + \\ + \; & x_4(a_{11}x_1^{2\nu+1}x_2^{\nu+1} + a_{12}x_2^{2\nu+1}x_3^{\nu+1} + a_{13}x_3^{2\nu+1}x_1^{\nu+1}) \\ + \; & x_4^2(a_{21}x_1^{2\nu+1}x_3^{\nu} + a_{22}x_2^{2\nu+1}x_1^{\nu} + a_{23}x_3^{2\nu+1}x_2^{\nu}) \\ + \; & \sum_{i=0}^{\nu+1} a_t(x_1x_2x_3)^{\nu-i+1}x_4^{3i} = 0. \end{aligned}$$

est transformée en soi par l'homographie de période $p = 3\nu^2 + 3\nu + 1$

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} x_1 & \epsilon x_2 & \epsilon^{3\nu^2}x_3 & \epsilon^{3\nu^2+2\nu+1}x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

où ϵ est une racine primitive d'ordre p de l'unité. On suppose $\nu > 1$.

Sur F, H engendre une involution I, d'ordre p, présentant trois points unis O_1, O_2, O_3 simples pour la surface.

Pour construire une surface Φ image de l'involution I, considérons le système découpé sur F par les surfaces d'ordre p, transformées en elles-mêmes par H et ne passant pas par les sommets du tétraèdre de référence. Soient $|C|$ ce système et r sa dimension. On a certainement $r > 3$. Rapportons projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace linéaire S_r. Il correspond à F dans cet espace, une surface Φ, d'ordre $3p(\nu + 1)$, dont les sections hyperplanes Γ ont le genre $\frac{3}{2}(p - 1)(\nu + 2)$.

Nous désignerons par O'_1, O'_2, O'_3 les points de diramation de la surface Φ homologues des points unis O_1, O_2, O_3. Nous allons déterminer la structure de ces points en utilisant les méthodes exposées dans notre *Mémoire sur les surfaces multiples* (¹). Il suffira d'ailleurs de s'occuper du point O'_1, les autres points ayant même structure.

2. Dans le plan $x_2 = 0$ tangent à la surface F au point O_1, H détermine une homographie dont les équations peuvent s'écrire soit

$$(x_1 \quad \eta x_3 \quad \eta^{\nu+1}x_4), \qquad \eta = \epsilon^{3\nu^2}$$

soit

$$(x_1 \qquad \epsilon^{3\nu^2+1}x_3 \quad \zeta x_4), \qquad \zeta = \epsilon^{3\nu^2+2\nu+1}.$$

(¹) Mémoires in-8° de l'Académie royale de Belgique, 1952.

Les nombres attachés au point uni O_1 sont donc $\alpha = \nu + 1$, $\beta = 3\nu^2 + 1$.

Appelons C' les courbes C passant par O_1. Les courbes C passent $3\nu + 1$ fois par O_1, 3ν fois par ν points $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \ldots, (\alpha, \nu)$ infiniment voisins successifs de O_1, le premier $(\alpha, 1)$ se trouvant sur la droite O_1O_3, et une fois par $3\nu^2$ points $(\beta. 1), (\beta, 2), \ldots, (\beta, 3\nu^2)$ infiniment voisins successifs de O_1, le premier se trouvant sur la droite O_1O_4.

Soient C'' les courbes C' assujetties à toucher en O_1 une droite distincte de O_1O_3, O_1O_4 et supposons $\nu > 2$. Les courbes C'' ont la multiplicité $4\nu + 1$ en O_1, passent $3\nu - 1$ fois par les points $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \ldots, (\alpha, \nu)$, $\nu + 2$ fois par les points $(\beta, 1), (\beta, 2)$, trois fois par le point $(\beta, 3)$, deux fois par les points $(\beta, 4), \ldots, (\beta, x)$, où $x = \frac{3}{2}\nu(\nu - 1) - 1$, une fois par $(\beta, x + 1)$, une fois par un point $(\beta, x + 1, 1)$ infiniment voisin du précédent, une fois par $\nu - 1$ points $(\beta, 3, 1), (\beta, 3, 2), \ldots, (\beta, 3, \nu - 1)$, infiniment voisins successifs de $(\beta, 3)$.

Les points (α, ν), $(\beta, 3\nu^2)$, $(\beta, 3, \nu - 1)$, $(\beta, x + 1), 1)$ sont unis de première espèce pour l'involution I.

Projetons Φ du point O_1' sur un hyperplan de l'espace ambiant et soit Φ_1 la surface obtenue. Au domaine du point (α, ν) correspond sur Φ_1 une courbe rationnelle σ_α d'ordre 3ν et au domaine du point $(\beta, 3\nu^2)$, une droite σ_β rencontrant σ_α en un point O_1''.

Le point O_1'' est double biplanaire pour la surface Φ_1 ; aux points infiniment voisins de ce point correspondent en effet les points des domaines de $(\beta, 3, \nu - 1)$, $(\beta, x + 1, 1)$. Au point O_1'' peuvent être infiniment voisins successifs des points doubles biplanaires suivis éventuellement d'un point double conique. Il en résulte que le point O_1' est équivalent à un ensemble de courbes rationnelles

$$\sigma_\alpha,\ \rho_1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_t,\ \sigma_\beta$$

dont chacune rencontre la précédente et la suivante en un point mais ne rencontre pas les autres. Le point O_1' est multiple d'ordre $3\nu + 1$ pour Φ, le cône tangent étant obtenu en projetant σ_α et σ_β de O_1'.

Les sections hyperplanes Γ' de Φ_1 satisfont à la relation fonctionnelle

$$\Gamma \equiv \Gamma' + \sigma_a + \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_t + \sigma_\beta.$$

Il en résulte que σ_a est de degré virtuel $-(3\nu + 1)$, les autres courbes de degré virtuel -2.

Pour déterminer la valeur de t, considérons sur F le système linéaire $|C_1|$ découpé par les surfaces d'ordre p, transformées en elles-mêmes par H et dont l'équation contient le terme $x_1^{p-1}x_4$. A ces courbes correspondent sur Φ des courbes Γ_1 rencontrant σ_a en un point et ne rencontrant pas $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_t, \sigma_\beta$. Ces courbes satisfont à la relation fonctionnelle.

$$p\Gamma \equiv \nu\Gamma_1 + \lambda\sigma_a + \lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_2 + \dots + \lambda_t\rho_t + \mu\sigma_\beta + \Delta,$$

Δ étant un terme qui provient des points O_2', O_3'.

En écrivant que Γ_1 ne rencontre pas $\rho_1, \dots, \sigma_\beta$, on trouve

$$\lambda_t = 2\mu, \lambda_{t-1} = 3\mu, \dots, \lambda_1 = (t+1)\mu, \lambda = (t+2)\mu.$$

En écrivant maintenant que Γ_1 rencontre σ_a en un point, on a

$$p - (3\nu + 1)\lambda + \lambda_1 = 0$$

On en déduit $\mu = 1$, $t = \nu - 1$.

3. Considérons maintenant le cas $\nu = 2$, d'où $p = 19$, $a = 3$, $\beta = 13$.

Les courbes C′ passent sept fois par O_1, six fois par $(a, 1)$, $(a, 2)$, une fois par $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, …, $(\beta, 12)$.

Les courbes C″ passent neuf fois par O_1, cinq fois par $(a, 1)$, $(\nu, 2)$, quatre fois par $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, deux fois par $(\beta, 3)$, $(\beta, 3, 1)$.

Si l'on conserve les notations précédentes, on voit que le point O_1'' est double conique pour la surface Φ_1, le domaine de ce point correspondant à celui de $(\beta, 3, 1)$. On en conclut que dans le cas $\nu = 2$, le point O_1' est équivalent à trois courbes rationnelles $\sigma_a, \rho_1, \sigma_\beta$.

On voit donc qu'au point de vue de la structure du point O_1', le cas $\nu = 2$ rentre dans le cas général.

Lorsque nous aurons à distinguer les points O_1', O_2', O_3', nous désignerons par

$$\sigma_\alpha^{(i)}, \ \rho_1^{(i)}, \ \dots, \ \rho_{\nu-1}^{(i)}, \ \sigma_\beta^{(i)}$$

les courbes rationnelles dont l'ensemble équivaut au point O_i'.

4. Désignons par K_1 la section de F par le plan $x_4 = 0$. Cette courbe a un point simple en O_1 et touche la droite O_1O_3 ; elle passe donc simplement par $(\alpha, 1)$ et par suite simplement par $(\alpha, 2)$, ..., (α, ν). Il en résulte que la courbe K_1' qui lui correspond sur Φ rencontre en un point chacune des courbes σ_α', σ_α'', σ_α''' mais ne rencontre pas les autres composantes des points O_1', O_2', O_3'. On en déduit

$$\Gamma \equiv pK_1' + \Sigma[(\nu+1)\sigma_\alpha + \nu\rho_1 + (\nu-1)\rho_2 + \dots + 2\rho_{\nu-1} + \sigma_\beta]. \quad \text{(I)}$$

La courbe K_1' est d'ordre $3(\nu + 1)$. Son genre, que l'on calcule par la formule de Zeuthen, est égal à l'unité. Le long de la courbe K_1', il existe un hyperplan ayant un contact d'ordre $p - 1$ avec la surface.

Le degré de K_1' se calcule au moyen de la formule (I), il est égal à zéro.

5. Considérons maintenant les courbes découpées sur F par les surfaces

$$x_1x_2x_3 + \lambda x_4^3 = 0 \quad (1)$$

et appelons-les K_3. Les surfaces (1) et par conséquent les courbes K_3 sont transformées en elles-mêmes par H et il correspond aux courbes K_3 sur Φ des courbes K_3'.

Observons que la surface (1) a un contact du second ordre avec le plan $x_2 = 0$ le long de la droite O_1O_3, par conséquent la courbe K_3 passe par le point $(\alpha, 1)$.

Effectuons ν fois la transformation

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_2x_3 & x_1x_3 & x_3x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire la transformation

$$(x_1^{\nu+1} \quad x_2x_3^\nu \quad x_1^\nu x_3 \quad x_3^\nu x_4),$$

dont l'inverse est

$$(x_1^\nu x_3 \quad x_1^\nu x_2 \quad x_3^{\nu+1} \quad x_1^\nu x_4).$$

A la surface F correspond la surface F′ d'équation

$$\begin{aligned} & x_1^\nu(a_{01}x_1^{3\nu^2+4\nu+2}x_2 + a_{02}x_2^{3\nu+2}x_3^{3\nu^2+\nu+1} + a_{03}x_1^{3\nu^2+2\nu+1}x_3^{2\nu+2}) \\ & + x_1^{\nu(\nu+1)}x_3^{2\nu+1}x_4(a_{11}x_1^{\nu^2+2\nu+1}x_2^{\nu+1}x_3^{\nu^2-\nu-1} + a_{12}x_2^{2\nu+1}x_3^{2\nu^2} + a_{13}x_1^{2\nu^2+2\nu+1}) \\ & + x_1^{\nu(\nu+1)}x_3^{2\nu}x_4^2(a_{21}x_1^{\nu^2+2\nu+1} + a_{22}x_2^{2\nu+1}x_3^{2\nu^2} + a_{23}x_1^{\nu^2}x_2^\nu x_3^{\nu^2+\nu+1}) \\ & \qquad + x_3^{\nu^2+\nu+1}\sum_{i=0}^{\nu+1} a_i(x_1^{2\nu+1}x_2)^{\nu-i+1}(x_3^{2\nu-1}x_4^3)^i = 0, \end{aligned}$$

et à la surface (1),

$$x_1^{2\nu+1}x_2 + \lambda x_3^{2\nu-2}x_4^3 = 0. \tag{1'}$$

A l'homographie H correspond l'homographie

$$(x_1 \quad \epsilon^{3\nu^2+\nu+1}x_2 \quad \epsilon^{3\nu^2}x_3 \quad \epsilon^{3\nu^2}x_4)$$

qui donne, dans le plan $x_2 = 0$ tangent à F′ en $O_1'(1, 0, 0, 0)$ une homologie de centre O_1'. Le point O_1' correspond au point (α, ν).

La courbe commune à F′ et à la surface (1′) appartient également à la surface dont l'équation s'obtient en remplaçant dans l'équation de F le terme $a_{01}x_1^{3\nu^2+3\nu+2}x_2$ par $a_{01}\lambda x_1^{3\nu^2+3\nu+1}x_2^{2\nu-2}x_4^3$. On voit alors que la courbe considérée a un point triple en O_1', les tangentes étant données par

$$a_{01}\lambda x_1^3 + a_{03}x_3^3 + a_{13}x_3^2x_4 + a_{21}x_3x_4^2 = 0, \; x_2 = 0.$$

La courbe K_3 passe donc trois fois par chacun des points O_1, $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., (α, ν) et a un comportement analogue en O_2, O_3. On en conclut la relation fonctionnelle

$$3\Gamma \equiv pK_3' + 3\,\Sigma\,[(\nu+1)\sigma_\alpha + \nu\rho_1 + \ldots + 2\rho_{\nu-1} + \sigma_\beta]. \tag{II}$$

et par suite

$$K_3' \equiv 3K_1'.$$

Sur la surface Φ, les courbes K_3' sont d'ordre $9(\nu+1)$ et forment un faisceau $|K_3'|$ dont fait partie la courbe $3K_1'$.

Les courbes K_3 sont de genre $\frac{1}{2}(9p - 7)$ et l'application de la formule de Zeuthen montre que les courbes K_3' sont elliptiques.

6. La courbe σ_α étant de degré virtuel — $(3\nu + 1)$, une courbe canonique de Φ, si elle existe, doit rencontrer σ_α en $3\nu - 1$ points. Or, la courbe K_1' rencontre σ_α en un point, donc la courbe $(3\nu - 1)$ K_1' fait partie d'une courbe canonique de Φ.

Les transformées sur F des courbes canoniques de Φ sont découpées par un système linéaire de surfaces dont l'équation se reproduit, lorsque l'on applique H, multipliée par une certaine puissance de ϵ. D'après ce qu'on vient de voir, ce système contient la surface $x_4^{3\nu-1}$, découpant sur F, la courbe K_1 comptée $3\nu - 1$ fois. Il en résulte que la puissance de ϵ est $4\nu + 1$.

Cela étant, le système de surfaces en question a pour équation

$$x_4^2[\lambda_0(x_1x_2x_3)^{\nu-1} + \lambda_1(x_1x_2x_3)^{\nu-2}x_4^3 + \ldots + \lambda_{\nu-1}x_4^{3(\nu-1)}] = 0.$$

On en conclut que les courbes

$$2K_1' + (\nu - 1)K_3'$$

font partie des courbes canoniques de la surface Φ et en forment d'ailleurs la partie variable.

On a

$$\begin{aligned}(3\nu - 1)\Gamma \equiv\ & \nu[2K_1' + (\nu - 1)K_3'] \\ & + (3\nu - 1)[(\nu + 1)\sigma_\alpha + \nu\rho_1 + \ldots + 2\rho_{\nu-1} + \sigma_\beta].\end{aligned}$$

7. Les courbes qui correspondent sur F aux courbes bicanoniques de Φ sont découpées par des surfaces d'ordre $6\nu - 2$ qui, quand on applique H, ont des équations qui se reproduisent multipliées par $\epsilon^{2\nu+2}$. De plus, ces surfaces ne peuvent contenir F comme partie.

Nous écrirons l'équation de ces surfaces sous la forme

$$\begin{aligned}& x_4(x_1x_2x_3 + \lambda x_4^3)^{\nu-2}(\lambda_{02}x_2^{3\nu+2}x_3 + \lambda_{03}x_3^{3\nu+2}x_1) \\ & + x_4^2(x_1x_2x_3 + \lambda x_4^3)^{\nu-2}(\lambda_{11}x_1^{2\nu+1}x_2^{\nu+1} + \lambda_{12}x_2^{2\nu+1}x_3^{\nu+1} + \lambda_{13}x_3^{2\nu+1}x_1^{\nu+1}) \\ & + (x_1x_2x_3 + \lambda x_4^3)^{\nu-1}(\lambda_{21}x_1^{2\nu+1}x_3^{\nu} + \lambda_{22}x_2^{2\nu+1}x_1^{\nu} + \lambda_{23}x_3^{2\nu+1}x_2^{\nu}) \\ & + x_4(x_1x_2x_3 + \lambda x_4^3)^{2\nu-1} = 0.\end{aligned}$$

Dans cette équation, on suppose que les multiplications indiquées sont effectuées et que les coefficients des différents termes obtenus sont remplacés par des indéterminées.

On voit que certaines courbes découpées sur F par ces surfaces comprennent les courbes du faisceau $|K_3|$ compté $\nu - 2$ fois et sont complétées par des courbes $K_{3\nu+4}$ découpées par les surfaces

$$x_4(\lambda_{02}x_2^{3\nu+2}x_3 + \lambda_{03}x_3^{3\nu+2}x_1) + \dots + x_4(x_1x_2x_3 + \lambda x_4^3)^{\nu+1} = 0. \quad (1)$$

Effectuons sur ces surfaces la transformation

$$\begin{pmatrix} x_1^{\nu+1} & x_2x_3^\nu & x_1^\nu x_3 & x_3^\nu x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons une équation dont nous nous bornons à écrire les termes de plus haute puissance de x_1.

$$\lambda_0 x_1^{\rho+2\nu+1}x_2 + x_1^p x_4^{2\nu-1}(\lambda_1 x_3^2 x_4 + \lambda_2 x_3 x_4^2 + \lambda_3 x_4^3) + \dots = 0.$$

La transformée de la courbe $K_{3\nu+4}$ est l'intersection de cette surface et de la surface F′, transformée de F, dont l'équation est écrite plus haut (n° 5).

Dans l'équation précédente, remplaçons le premier terme par sa valeur tirée de l'équation de F′. Nous obtenons une nouvelle surface d'équation

$$x_1^p(\lambda'_0 x_3^3 + \lambda'_1 x_3^2 x_4 + \lambda'_2 x_3 x_4^2 + \lambda'_3 x_4^3) + \dots = 0,$$

qui passe également par la transformée de $K_{3\nu+4}$. On en conclut que cette courbe passe trois fois par le point (1, 0, 0, 0) transformé du point (α, ν).

Effectuons maintenant sur F et sur la surface (1) la transformation

$$\begin{pmatrix} x_1^4 & x_2x_1^3 & x_3x_4^3 & x_1^3x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons des équations dont nous n'écrirons que le terme de plus haute puissance en x_1.

$$a_{01}x_1^{12\nu+8}x_2 + \dots = 0,$$
$$\lambda x_1^{9\nu+12}x_4 + \dots = 0.$$

Le point (1, 0, 0, 0) du nouvel espace est le transformé du point $(\beta, 3)$. On voit que la transformée de $K_{3\nu+4}$ passe simplement par ce point en y touchant la droite $x_2 = x_4 = 0$. Par conséquent, la courbe $K_{3\nu+4}$ passe simplement par les points $(\beta, 3, 1)$, $(\beta, 3, 2)$, ..., $(\beta, 3, v-1)$.

En résumé, les courbes $K_{3\nu+4}$ passent $\nu+3$ fois par O_1, trois fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., (α, ν), ν fois par les points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, une fois par les points $(\beta, 3)$, $(\sigma, 3, 1)$, ..., $(\beta, 3, \gamma-1)$.

8. Les courbes $K'_{3\nu+4}$ qui correspondent sur Φ aux courbes $K_{3\nu+4}$ rencontrent en trois points chacune des courbes σ'_α, σ''_α, σ'''_α et en un point chacune des courbes ρ'_1, ρ''_1, ρ'''_1, mais ne rencontrent pas les autres composantes des points O'_1, O'_2, O'_3. On en déduit la relation

$$\begin{gathered}(3\nu+4)\Gamma \equiv pK'_{3\nu+4} + (4\nu+3)\Sigma\sigma_\alpha \\ + (3\nu+4)[\nu\Sigma\rho_1 + (\nu-1)\Sigma\rho_2 + \dots + 2\Sigma\rho_{\nu-1} + \Sigma\sigma_\beta].\end{gathered}$$

Nous poserons

$$X \equiv \nu\Sigma\rho_1 + (\nu-1)\Sigma\rho_2 + \dots + 2\Sigma\rho_{\nu-1} + \Sigma\sigma_\beta$$

et nous écrirons la formule précédente sous la forme

$$(3\nu+4)\Gamma \equiv pK'_{3\nu+4} + (4\nu+3)\Sigma\sigma_\alpha + (3\nu+4)X. \qquad \text{(III)}$$

9. La partie variable du système canonique $|L_1|$ de Φ est $(\nu-1)K'_3$ et celle du système bicanonique $|L_2|$ est $K'_{3\nu+4}+(\nu-2)K'_3$.

Par les relations (I), (II), (III), on a

$$(3\nu-1)\Gamma \equiv p[2K'_1+(\nu-1)K'_3] + (3\nu^2+2\nu-1)\Sigma\sigma_\alpha + (3\nu-1)X,$$
$$(6\nu-2)\Gamma \equiv p[(\nu-2)K'_3+K'_{3\nu+4}] + (3\nu^2+\nu-3)\Sigma\sigma_\alpha + (6\nu-2)X.$$

De la comparaison de ces relations, on déduit

$$(\nu-2)K'_3 + K'_{3\nu+4} \equiv 2[2K'_1 + (\nu-1)K'_3] + \Sigma\sigma_\alpha.$$

Il en résulte que les systèmes canonique et bicanonique de Φ sont

$$\begin{aligned}|L_1| &= |2K'_1 + (\nu-1)K'_3 + \Sigma\sigma_\alpha|, \\ |L_2| &= |(\nu-2)K'_3 + K'_{3\nu+4} + \Sigma\sigma_\alpha| = |2L_1|.\end{aligned}$$

La partie variable du système bicanonique de Φ est certainement irréductible. En effet, si elle était réductible, elle serait, d'après le théorème de Bertini, composée au moyen d'un faisceau et celui-ci ne pourrait être que $|K'_3|$. Or, les courbes $K'_{3\nu+4}$ ne sont certainement pas composées au moyen de $|K'_3|$.

Liège, le 13 décembre 1956.