Bulletin de la Classe des sciences

Note sur les points de diramation d’une surface multiple

Lucien Godeaux

Résumé
On considère un point de diramation d’une surface multiple d’ordre premier en lequel le cône tangent à la surface se scinde en quatre cônes rationnels. Examen du comportement en ce point de diramation de certaines courbes tracées sur la surface.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Note sur les points de diramation d'une surface multiple,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — On considère un point de diramation d'une surface multiple d'ordre premier en lequel le cône tangent à la surface se scinde en quatre cônes rationnels. Examen du comportement en ce point de diramation de certaines courbes tracées sur la surface.

Dans nos recherches sur les involutions cycliques d'ordre premier, n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique [1], nous avons montré qu'en un point de diramation le plus général d'une surface image de l'involution, cette surface a un point multiple en lequel le cône tangent se décompose en quatre cônes rationnels (σ_α), (τ_α), (τ_β), (σ_β), deux cônes consécutifs ayant en commun une génératrice. Au point considéré sont infiniment voisins successifs des points doubles dont le premier se trouve sur une des droites $(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$, $(\tau_\alpha, \tau_\beta)$, $(\tau_\beta, \sigma_\beta)$. Dans cette note, nous reprenons une question que nous avons déjà étudiée [2], à savoir comment se forment les points doubles de la suite dont le premier point se trouve sur la droite $(\tau_\alpha, \tau_\beta)$.

---

(1) *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique*. Actualités Scientifiques, N° 270 (Paris, Hermann, 1935) ; *Mémoire sur les surfaces multiples* (MÉMOIRES IN-8° DE L'ACADÉMIE ROY. DE BELGIQUE, 1953) ; *Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples* (DEUXIÈME COLLOQUE DE GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE, Liège, 1952 ; Paris, Masson et Liège, Thone, 1952).

(2) *Recherches sur les points de diramation de troisième catégorie d'une surface multiples* (BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROY. DE BELGIQUE, 1953, pp. 1013-1023, 1087-1093, 1954, pp. 81-86, 200-208, 355-370).

1. Soient F une surface algébrique contenant une involution cyclique I d'ordre premier impair p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Nous pouvons construire sur F un système linéaire $|\overline{C}|$ contenant p systèmes linéaires partiels $|C|$, $|C_1|$, ..., $|C_{p-1}|$ appartenant à l'involution I et dont le premier, $|C|$, est dépourvu de points-base et a d'autre part une dimension aussi grande qu'on le veut. On en déduit l'existence d'une surface normale Φ, image de l'involution, dont les sections hyperplanes Γ correspondent aux courbes C et sur laquelle les points de diramation sont isolés.

Considérons un point uni de seconde espèce A de l'involution, simple pour la surface F et auquel sont attachés les entiers α, β, compris entre 1 et p ($\alpha\beta - 1 = \mathcal{M}p$). Soit A' le point de diramation qui lui correspond sur Φ.

Le point A est l'origine de deux suites de points fixes $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$ et $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, \beta - 1)$, infiniment voisins successifs de A. Si T est la transformation birationnelle de F en soi génératrice de l'involution I, T détermine dans le domaine du premier ordre de A une involution d'ordre p ayant les points unis $(\alpha, 1)$, $(\beta, 1)$.

Nous désignerons par C' les courbes C passant par A. Elles ont en ce point une certaine multiplicité et leurs tangentes sont confondues avec les droites $A(\alpha, 1)$, $A(\beta, 1)$. Nous désignerons par C'' les courbes C' touchant en A une droite distincte des droites $A(\alpha, 1)$, $A(\beta, 1)$, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne des courbes ayant en A la multiplicité p et des tangentes variables.

Nous appellerons Γ', Γ'', ... les sections hyperplanes de Φ correspondant aux courbes C', C'', ... et par Φ_1, Φ_2, ... les surfaces, projections de Φ, dont les sections hyperplanes sont respectivement les courbes Γ', Γ'', ...

2. Soient λ_1, μ_1 deux entiers positifs satisfaisant aux congruences

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \qquad \mu + \beta\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p) \qquad (\mathrm{I})$$

et tels que la somme $\lambda_1 + \mu_1$ soit la plus petite possible. Supposons que l'on ait

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = h_1 p, \qquad \mu_1 + \beta\lambda_1 = h_2 p,$$

avec $h_1 > 1$, $h_2 > 1$.

Dans ces conditions, le point de diramation A′ est équivalent à un ensemble de courbes rationnelles

$$\sigma_a,\ \omega_1',\ \omega_2',\ \ldots,\ \omega_{u_1}',\quad \tau_a,\ \rho_1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_t,\quad \tau_\beta,\ \omega_1'',\ \omega_2'',\ \ldots,\ \omega_{u_2}'',\ \sigma_\beta,$$

dont chacune rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres.

Posons

$$p = a_1\alpha + b_1,\ (b_1 < \alpha), \qquad p = b_2\beta + a_2,\ (a_2 < \beta).$$

Les courbes C′ passent $\lambda_1 + \mu_1$ fois par le point A et

μ_1 fois par les points $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \ldots, (\alpha, \theta_1 - 1)$,

$a_1 + m_1(\eta_1 + 1)$ fois par le point (α, θ_1),

a_1 fois par les points $(\alpha, \theta_1 - 1), \ldots, (\alpha, \alpha - 1)$,

un certain nombre de fois par une suite de points $(\alpha, \theta_1, 1), \ldots$ infiniment voisins successifs de (α, θ_1), suite qui se termine par un point P_1 multiple d'ordre m_1 pour les courbes C′,

λ_1 fois par les points $(\beta, 1), (\beta, 2), \ldots, (\beta, \theta_2 - 1)$,

$b_2 + m_2(\eta_2 + 1)$ fois par le point (β, θ_2),

b_2 fois par les points $(\beta, \theta_2 + 1), \ldots, (\beta, \beta - 1)$

un certain nombre de fois par une suite de points infiniment voisins successifs $(\beta, \theta_2, 1), \ldots$ du point (β, θ_2), suite qui se termine par un point P_2 multiple d'ordre m_2 pour les courbes C′.

Les nombres $\theta_1, \eta_1, \theta_2, \eta_2$ sont donnés par les relations

$$(t + 1)\lambda_1 + b_2(u_2 + 1) = \theta_1[a_1(u_1 + 1) + 1] + \eta_1,$$
$$(t + 1)\mu_1 + a_1(u_1 + 1) = \theta_2[b_2(u_2 + 1) + 1] + \eta_2.$$

Sur la surface Φ, la courbe σ_a correspond au domaine du point $(\alpha, \alpha - 1)$ et a le degré virtuel $-(a_1 + 1)$; la courbe τ_a au domaine du point P_1 et a le degré virtuel $-(m_1 + 2)$, la courbe τ_β au domaine du point P_2 et a le degré virtuel $-(m_2 + 2)$, la courbe σ_β au domaine du point $(\beta, \beta - 1)$ et a le degré virtuel $-(b_2 + 1)$, les courbes ω', ρ, ω'' ont toutes le degré virtuel -2.

On a

$$\Gamma = \Gamma' + \sigma_a + \Sigma\omega' + \tau_a + \Sigma\rho + \tau_\beta + \Sigma\omega'' + \sigma_\beta.$$

Sur la surface Φ_1, les courbes σ_α, τ_α, τ_β, σ_β sont des courbes d'ordres respectifs a_1, m_1, m_2, b_2. Le point (σ_n, τ_α) est équivalent à l'ensemble des u_1 courbes ω', le point $(\tau_\alpha, \tau_\beta)$ à l'ensemble des t courbes ρ, le point $(\tau_\beta, \sigma_\beta)$ à l'ensemble des u_2 courbes ω''.

3. Nous poserons pour abréger

$$U_1 = m_1(u_1 + 1) + 1, \qquad U_2 = m_2(u_2 + 1) + 1,$$
$$M_1 = a_1(u_1 + 1) + 1), \qquad M_2 = b_2(u_2 + 1) + 1.$$

Parmi les solutions en nombres entiers positifs des congruences (I), on a

$$\left.\begin{aligned} \lambda_i' &= (ti + i - t)\lambda_1 + (i - 1)M_2 \\ \mu_i' &= \mu_1 - (i - 1)M_1 \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, m_1)$$

et

$$\left.\begin{aligned} \lambda_i'' &= \lambda_1 - (i - 1)M_2 \\ \mu_i'' &= (ti + i - t)\mu_1 + (i - 1)M_1 \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, m_2).$$

On a

$$\lambda_1 = \lambda_1' = \lambda_1'' = b_2U_2 + m_2, \quad \mu_1 = \mu_1' = \mu_1'' = a_1U_1 + m_1.$$

Nous désignerons par $C_1^{(i)}$ les courbes C correspondant à la solution λ_i', μ_i' et par $C_2^{(i)}$ les courbes C correspondant à la solution λ_i'', μ_i'' des congruences (I). Les systèmes $|C_1^{(i)}|$, $|C_2^{(i)}|$ se trouvent parmi les systèmes $|C''|$, $|C'''|$, ...

On ne peut avoir $\lambda_2' = \lambda_2''$, $\mu_2' = \mu_2''$, car cela entraînerait $\lambda_1 = 0$, $\mu_1 = 0$. Nous supposerons

$$\lambda_2' + \mu_2' < \lambda_2'' + \mu_2'',$$

c'est-à-dire

$$(t + 1)\lambda_1 + 2M_2 < (t + 1)\mu_1 + 2M_1.$$

Soient λ_2, μ_2 deux nombres entiers positifs, solutions des congruences (I), tels que la somme $\lambda_2 + \mu_2$ soit immédiatement supérieure à $\lambda_1 + \mu_1$. Le système $|C''|$ qui correspond à cette solution peut ou non coïncider avec $|C''|$. Nous supposerons qu'ils ne coïncident pas, c'est-à-dire que l'on a

$$\lambda_2 + \mu_2 < \lambda_2' + \mu_2'.$$

Les courbes Γ'' sont découpées sur Φ_1 par les hyperplans passant par le point $(\tau_\alpha, \tau_\beta)$, par conséquent les courbes C$''$ passent a_1 fois par le point $(\alpha, \alpha - 1)$ $m_1 - 1$ fois par P_1, $m_2 - 1$ fois par P_2 et b_2 fois par $(\beta, \beta - 1)$. On en conclut $\mu_2 > \mu_2'$ et $\lambda_2 > \lambda_2''$. Par conséquent les courbes C$''$ doivent passer par deux points fixes, unis de première espèce pour l'involution I, l'un R_1 de ces points terminant une suite de points infiniment voisins successifs de l'un des points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ... et le second point R_2 terminant une suite de points infiniment voisins successifs d'un des points de la suite $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ...

Sur la surface Φ_2, nous avons une courbe σ_α d'ordre a_1, une courbe τ_α d'ordre $m_1 - 1$, une courbe ρ_1 représentant le domaine du point R_1, une courbe ρ_t représentant le domaine du point R_2, une courbe τ_β d'ordre $m_2 - 1$, enfin une courbe σ_β d'ordre b_2. Le point $(\tau_\alpha, \tau_\beta)$ de Φ_1 est équivalent à l'ensemble des courbes ρ_1, ρ_t. Comme ce point est au plus double pour Φ_1, ρ_1 et ρ_2 sont des droites et le point $(\tau_\alpha, \tau_\beta)$ est double biplanaire pour Φ_1. Les points R_1, R_2 sont simples pour les courbes C$''$.

Les courbes précédentes se présentent sur Φ_2 dans l'ordre

$$\sigma_\alpha, \tau_\alpha, \rho_1, \rho_t, \rho_\beta, \sigma_\beta$$

et chacune de ces courbes rencontre la précédente et la suivante en un point , mais ne rencontre pas les autres.

On a la relation fonctionnelle

$$\Gamma \equiv \Gamma'' + \sigma_\alpha + \Sigma\omega' + \tau_\alpha + 2\Sigma\rho + \tau_\beta + \Sigma\omega'' + \sigma_\beta.$$

D'autre part, on a $t \geqslant 2$.

4. Les courbes Γ_1'', qui correspondent sur Φ_2 aux courbes C_1'' rencontrent en a_1 points la courbe σ_α et en $m_1 - 1$ points la courbe τ_α, mais ne rencontrent pas les droites ρ_1, ρ_t. De même, les courbes Γ_2'' qui correspondent sur Φ_2 aux courbes C_2'' rencontrent σ_β en b_2 points et τ_β en $m_2 - 1$ points, mais ne rencontrent pas les droites ρ_1, ρ_t. Il en résulte que les courbes Γ''', qui correspondent aux courbes C$'''$, sont découpées sur Φ_2 par les hyperplans passant par le point (ρ_1, ρ_t).

Le point (ρ_1, ρ_t) peut être simple $(t = 2)$ ou double conique $(t = 3)$, ou double biplanaire $(t \geqslant 4)$ pour la surface Φ_2.

Supposons en premier lieu que le point (ρ_1, ρ_t) soit simple pour la surface Φ_2. Sur la surface Φ_3, nous avons les courbes

$$\sigma_a, \ \tau_a, \ \rho', \ \tau_\beta, \ \sigma_\beta$$

d'ordres respectifs a_1, $m_1 - 1$, 1, $m_2 - 1$, b_2.

La droite ρ', qui est exceptionnelle, représente le domaine d'un point R, uni de première espèce, de l'entourage du point A. Il existe donc une suite de points unis, terminée par le point R, infiniment voisins successifs soit d'un certain point (a, i), soit d'un certain point (β, i). Dans le premier cas, on a $\mu_3 > \mu_2'$. Mais le comportement des courbes C''' aux points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ... est le même que celui des courbes C_2'' et on aurait $\lambda_2 = \lambda_2''$, ce qui est absurde, puisqu'on a $\lambda_3 + \mu_3 \leqslant \lambda_2' + \mu_2' < \lambda_2'' + \mu_2''$. C'est donc le second cas qui se présente et on a $t = 2$, $\mu_3 = \mu_2'$, $\lambda_3 = \lambda_2'$. Les courbes Γ''' sont des courbes Γ'' passant simplement par un point simple.

Observons que les points (τ_a, ρ'), (τ_β, ρ') sont doubles pour la surface Φ_3, car ils sont respectivement équivalents aux droites ρ_1, ρ_2 de degré virtuel -2.

Supposons en second lieu que le point (ρ_1, ρ_t) soit double conique pour la surface Φ_2. On a alors $t = 3$ et la relation fonctionnelle

$$\Gamma = \Gamma''' + \sigma_a + \Sigma\omega' + \tau_a + 2\rho_1 + 3\rho_2 + 2\rho_3 + \tau_\beta + \Sigma\omega'' + \sigma_\beta.$$

Sur la surface Φ_3, on a les courbes rationnelles

$$\sigma_a, \ \tau_a, \ \rho_2, \ \tau_\beta, \ \sigma_\beta,$$

respectivement d'ordres a_1, $m_1 - 1$, 2, $m_2 - 1$, b_2.

Le raisonnement précédent peut être repris et on voit qu'il existe sur F un point uni de première espèce, R, terminant une suite de points infiniment voisins successifs d'un certain point (β, i). Le point R est double sur les courbes C'''. On voit que l'on a $\mu_3 = \mu_2'$ et que le système $|C'''|$ coïncide avec le système $|C_1''|$.

5. Supposons enfin que le point (ρ_1, ρ_t) soit double biplanaire pour la surface Φ_2. Sur la surface Φ_3, on a les courbes rationnelles

$$\sigma_\alpha, \tau_\alpha, \rho_2, \rho_{t-1}, \tau_\beta, \sigma_\beta$$

respectivement d'ordre a_1, $m_1 - 1$, 1, 1, $m_2 - 1$, b_2.

On a actuellement

$$\Gamma = \Gamma''' + \sigma_\alpha + \Sigma\omega' + \tau_\alpha + 2\rho_1 + 3(\rho_3 + \ldots + \rho_{t-1}) + \\ 2\rho_t + \tau_\beta + \Sigma\omega'' + \sigma_\beta.$$

Les droites ρ_2, ρ_{t-1} représentent les domaines de deux points R'_1, R'_2 de l'entourage du point A. Ces points terminent deux suites de points unis infiniment voisins successifs de deux points des suites $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ... ou $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ...

On peut faire trois hypothèses :

Les points R'_1, R'_2 terminent deux suites la première issue d'un point (α, i), la seconde issue d'un point (β, j).

Les points R'_1, R'_2 terminent des suites issues de deux points de la suite $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ... On aurait alors $\lambda'_3 = \lambda''_2$, d'où $\mu_3 = \mu''_2$, ce qui est impossible.

Les points R'_1, R'_2 terminent deux suites issues de deux points de la suite $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ... On a alors $\mu_3 = \mu'_2$, d'où $\lambda_3 = \lambda'_2$, ce qui est impossible à priori.

Sur la surfaces Φ_3, les courbes $\Gamma^{(4)}$ sont découpées par des hyperplans passant par l'un des points (τ_α, ρ_2), (ρ_3, ρ_{t-1}), (ρ_{t-1}, τ_β).

Si les hyperplans des courbes $\Gamma^{(4)}$ passaient par le point (ρ_{t-1}, τ_β), ces courbes rencontreraient encore τ_α en $m_1 - 1$ points et σ_α en a_1 points. On aurait $\mu_4 = \mu'_2 = \mu_3$, ce qui est impossible.

On arrive de la même manière à la même conclusion si les hyperplans des courbes $\Gamma^{(4)}$ passaient par le point (ρ_2, ρ_{t-1}).

Ces hyperplans doivent donc passer par le point (τ_α, ρ_2). Sur la surface Φ_4 sont alors tracées les courbes σ_α d'ordre a_1, τ_α d'ordre $m_1 - 2$, la droite ρ_1, la droite ρ_{t-1}, les courbes τ_β d'ordre $m_2 - 1$, σ_β d'ordre b_2.

On a maintenant

$$\Gamma = \Gamma^{(4)} + \sigma_\alpha + \Sigma\omega' + \tau_\alpha + 3(\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_{t-1}) + \\ 2\rho_t + \tau_\beta + \Sigma\omega'' + \sigma_\beta.$$

6. Dans certains cas, on peut montrer comment se forme le point double biplanaire $(\tau_\alpha, \tau_\beta)$ de Φ_1 et les points doubles successifs.

Supposons que l'on ait

$$x(\lambda_1 + \mu_1) < \lambda_2' + \mu_2',$$

c'est-à-dire

$$M_1 - M_2 < (t - x + 2)\lambda_1 - (x - 1)\mu_1.$$

On suppose toujours

$$\lambda_2' + \mu_2' < \lambda_2'' + \mu_2'',$$

c'est-à-dire

$$2(M_1 - (M_2 > (t + 1)(\lambda_1 - \mu_1).$$

On en déduit

$$(t + 1)(\lambda_1 - \mu_1) < 2(t - x + 2)\lambda_1 - 2(x - 1)\mu_1,$$

c'est-à-dire

$$(t - 2x + 3)(\lambda_1 + \mu_1) > 0.$$

Par suite, on a

$$x < \frac{t + 3}{2}.$$

Supposons t pair et posons $t = 2s$. Cela signifie qu'au point double biplanaire $(\tau_\alpha, \tau_\beta)$ de Φ_1 font suite $s - 1$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire. On a alors $x < s + 1$ et

$$\Gamma = \Gamma^{(4)} + \sigma_\alpha + \Sigma\omega' + \tau_\alpha + 2\rho_1 + 3\rho_2 + 4(\rho_4 + \ldots + \rho_{2s-2}) \\ + 3\rho_{2s} - 1 + 2\rho_{2s} + \tau_\beta + \Sigma\omega'' + \sigma_{\beta'},$$

. . . .

$$\Gamma = \Gamma^{(s)} + \sigma_\alpha + \Sigma\omega' + \tau_\alpha + 2\rho_1 + \ldots + (s + 1)(\rho_s + \rho_{s+1}) \\ + \ldots + 2\rho_{2s} + \tau_\beta + \Sigma\omega'' + \sigma_\beta.$$

Les courbes $\Gamma^{(s+1)}$ sont les courbes $\Gamma^{(s)}$ passant par le point (ρ_s, ρ_{s+1}), simple pour la surface Φ_s.

Supposons maintenant t impair et posons $t = 2s + 1$. Au point double biplanaire $(\tau_\alpha, \tau_\beta)$ de Φ_1 font suite $s-1$ points doubles biplanaire suivis d'un point double conique. On a $x \leqslant s+1$ et les relations fonctionnelles

$$\Gamma \equiv \Gamma^{(4)} + \sigma_\alpha + \Sigma\omega' + \tau_\alpha + 2\rho_1 + 3\rho_2 + 4(\rho_3 + \ldots + \rho_{2s-1}) + 3\rho_{2s} + 2\rho_{2s+1} + \tau_\beta + \Sigma\omega'' + \sigma_\beta,$$

. . . .

$$\Gamma \equiv \Gamma^{(2s+1)} + \sigma_\alpha + \Sigma\omega' + \tau_\alpha + 2\rho_1 + \ldots + (s+1)\rho_s + (s+2)\rho_{s+1} + (s+1)\rho_{s+2} + \ldots + 2\rho_{2s+1} + \tau_\beta + \Sigma\omega'' + \sigma_\beta.$$

Liège, le 13 décembre 1957.