

Université de Liège
Faculté des sciences appliquées
Service Hydrodynamique Appliquée
et Constructions Hydrauliques



Analyse expérimentale des effets induits par le mouvement de redressement d'une porte basculante



KERGER François

**Travail de fin d'études réalisé en vue de l'obtention
du grade d'Ingénieur Civil des Constructions
Année académique 2006-2007**

KERGER FRANÇOIS

3ÈME ÉPREUVE DU GRADE D'INGÉNIEUR CIVIL DES CONSTRUCTIONS

UNIVERSITÉ DE LIÈGE - FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES

ANNÉE ACADÉMIQUE 2006-2007

TRAVAIL DE FIN D'ÉTUDES :
ANALYSE EXPÉRIMENTALE DES EFFETS INDUITS PAR LE
MOUVEMENT DE REDRESSEMENT D'UNE PORTE
BASCULANTE

La dynamique de l'écoulement de surface induit par le mouvement essentiellement vertical d'un corps génère des efforts sur ce dernier qu'il convient de quantifier pour son dimensionnement et celui de ses organes de manoeuvre. Le mouvement d'une porte clapet, se fermant en sortant d'une chambre en fond de radier d'écluse, est un exemple de ce type d'écoulements complexes et montre leur importance dans le domaine industriel. La faiblesse théorique des réponses à ces problématiques disponibles dans la littérature montre l'intérêt majeur d'une telle étude et laisse place à une grande originalité méthodologique.

Depuis plusieurs mois, d'importantes recherches ont été effectuées au sein du service d'Hydrodynamique Appliquée et Construction Hydraulique pour créer un schéma numérique efficace de modélisation des écoulements dans un plan vertical à surface libre instationnaire, y compris les écoulements induits par le déplacement quelconque d'un corps à l'intérieur du fluide. En 2006, A. Canor avait créé un modèle expérimental de porte basculante dans le but de valider une première version du code de calcul basée sur les équations des écoulements irrotationnels.

Par une approche complète (théorique, numérique et expérimentale) requérant un large spectre des compétences de l'ingénieur, l'ambition de cette étude est de participer, au sein de l'équipe du HACH, à cet effort de création d'un outil de modélisation de ces écoulements complexes et des efforts qu'ils induisent. En premier lieu, il est proposé une vaste étude théorique des méthodes numériques de résolution des équations de Navier-Stokes 2D vertical et 3D, ainsi que des méthodes numériques de suivi d'interface. Ces développements mathématiques et numériques, couplés avec une évaluation critique de leur potentiel, s'inscrivent dans la foulée de l'effort de recherche de l'équipe du HACH.

En outre, le dispositif expérimental a été aménagé pour acquérir au mieux l'information hydrodynamique et mécanique utile à une validation du code de calcul ainsi créé. Pour ce faire, le système de manoeuvre de la porte a été remplacé par un système de levage vertical de la porte placée horizontalement. Les phénomènes induits par le mouvement vertical de cet élément plan correspondent mieux aux phénomènes hydrodynamiques pris en compte dans le code numérique et atteignent des intensités significatives étant donné le domaine de mesure et la précision des capteurs disponibles.

KERGER FRANÇOIS

MASTER OF SCIENCE IN ENGINEERING - MAJOR IN CONSTRUCTION

LIÈGE UNIVERSITY - APPLIED SCIENCE SCHOOLS

ACADEMIC YEAR 2006-2007

MASTER'S DISSERTATION :
EXPERIMENTAL STUDY OF EFFECTS INDUCED BY FLAP
GATE SETTING UP MOVEMENT

Dynamics of free surface flow induced by an essentially vertical body's movement generates forces on this one, which we have to quantify in order to size the gate and its manoeuvring system. Flap gate's movement, sealing the sas by coming from a chamber at the bottom of the lock's foundation raft, is a good example of this kind of complex flows and shows their industrial major importance. The theoretical weakness of available answers in literature to this problematic shows the major interest in such study and lets us the possibility to follow an original methodology.

Since several months, wide-ranging research have been done within the Applied Hydrodynamics and Hydraulic Structure (*Hydrodynamique Appliquée et Constructions Hydrauliques HACH*) department in order to create an efficient numerical scheme simulating unsteady free surface flows in a vertical plane, including flows induced by an essentially vertical body's movement inside the fluid. In 2006, A. Canor created an experimental flap gate's model in order to validate a first attempt of the numerical scheme based on irrotational flow's equations.

Trough an theoretical, numerical and experimental combined approach requiring a wide spectrum of engineer's skills, this study's ambition is taking part, within HACH team, in the effort to create a complex flow's and induced forces simulation tool. First of all, a wide-ranging theoretical research about numerical methods of solving vertical two-dimensional and tri-dimensional Navier-Stokes equations and interfaces tracking's numerical methods is proposed. These mathematical and numerical developments, coupled with a critical evaluation of their potentialities, are in line with the HACH team's research works.

The experimental system has been furthermore modified in such a way as to get hydrodynamic and mechanical data useful to validate the HACH simulation tool. In order to do it, flap gate's manoeuvring system was replaced by a vertical uplift system actionning the gate placed horizontally. Phenomena induced by the vertical movement of this horizontal plate correspond better to hydrodynamic phenomena described by the simulation tool and reach significant intensity in comparison with the available sensor's measuring range and accuracy.

KEYWORDS : Hydrodynamics, Level Set method, Projection method, incompressible Navier-Stokes equation, Hamilton-Jacobi equation, vertical two-dimensional incompressible flow, body's induced flow, *ENO* and *WENO* schemes.

Cette étude a été menée sous le patronage du Professeur Piroton, à qui je tiens à témoigner ma vive gratitude pour ses conseils judicieux et l'attention sans faille qu'il m'a accordée tout au long de mon travail.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur Detrembleur, assistant dans le service HACH, pour sa disponibilité dans mes travaux quotidiens. La réalisation d'une thèse de doctorat et de plusieurs études pour le HACH ne l'ont jamais empêché de trouver le temps nécessaire pour me conseiller et me soutenir. Merci aussi à tous les autres collaborateurs du HACH : Messieurs et mesdames Erpicum, Archambeau, Dewals, Dupont, Volon, Khuat Duy, Broze. Leurs conseils occasionnels et leur encadrement lors des cours dont ils étaient chargés m'ont été précieux.

Que Messieurs Lhermeroute, Lallemand, Dewart, Stouvenakers et Salme trouvent ici l'expression de ma reconnaissance mais aussi de mon enthousiasme pour leur travail de construction et de modification du modèle expérimental.

Merci au Professeur Lejeune, au Professeur Jaspert et à Monsieur Delhaxe pour leur présence dans mon jury et l'intérêt qu'ils ont porté à cette étude dès le début.

Un travail de fin d'études est certes personnel mais il eut été difficile de le mener à terme sans la collégialité de l'ensemble de la troisième année Ingénieur des Constructions 2006-2007. Je pense tout particulièrement aux étudiants de la salle de structure qui m'ont permis de passer ces six mois de recherche dans un environnement chaleureux et agréable. Merci pour les captivantes discussions sur des sujets scientifiques de pointes que nous avons pu mener au long de ces six mois.

Merci à Andrée et Marc pour la relecture attentive du texte.

Enfin, un chaleureux merci à mes parents et à ma soeur, Valérie. De près et de loin, dans les bons et moins bons moments, ils ont été présents à mes côtés pendant toutes mes études. Leur soutien, leurs conseils et leurs encouragements m'ont permis de garder le cap. En ce sens, ce travail est aussi le leur.

TABLE DES MATIÈRES

1	Introduction	1
1.1	Préambule	2
1.2	Exemple de la porte basculante	3
1.3	Sujet de l'étude	5
1.4	Approche générale	6
1.4.1	Contribution théorique simplifiée à la modélisation des écoulements induits par le mouvement quasi vertical d'un corps	6
1.4.2	Contribution expérimentale à la modélisation des écoulements induits par le mouvement quasi vertical d'un corps	6
1.4.3	Contribution mathématique à la résolution numérique des écoulements verticaux à surface libre	7
I	Contribution théorique simplifiée à la modélisation des écoulements induits par le mouvement quasi vertical d'un corps	10
2	Modèle simplifié	11
2.1	Analyse dimensionnelle	12
2.1.1	Théorème de Vaschy-Buckingham	12
2.1.2	Analyse dimensionnelle d'un élément plan en mouvement dans un fluide à surface libre	12
2.1.3	Comparaison avec l' <i>aérodynamique</i>	13
2.2	Mécanisme de création de traînée en <i>hydrodynamique</i>	15
2.2.1	Écoulement non inertiel	16
2.2.2	Écoulement inertiel	18
2.2.3	Effet de l'accélération	21
2.3	Synthèse du modèle simplifié	23
II	Contribution expérimentale à la modélisation des écoulements induits par le mouvement quasi vertical d'un corps	24
3	Analyse expérimentale	25
3.1	Dispositif expérimental	26
3.1.1	Bassin et système mécanique de translation de l'élément plan	26
3.1.2	Systèmes de manoeuvre	27
3.1.3	Système de mesure	28

3.1.4	Système de visualisation de l'écoulement	30
3.2	Campagne d'essais	31
3.3	Essais à vitesse constante	32
3.3.1	Mesures expérimentales brutes	32
3.3.2	Exploitation statistique des mesures	33
3.3.3	Vitesse et accélération	33
3.3.4	Analyse de la variation de surface libre	34
3.3.5	Pression <i>de traînée</i> et pression <i>hydrodynamique</i>	35
3.3.6	Coefficient de pression	41
3.3.7	Conclusion sur l'essai à vitesse constante	41
3.4	Essais à <i>effort contrôlé</i>	42
3.4.1	Vitesse et accélération	42
3.4.2	Variation de surface libre	43
3.4.3	Pression <i>de traînée</i> et pression <i>hydrodynamique</i>	44
3.4.4	Coefficient de pression	49
3.4.5	Conclusion sur l'essai à <i>effort contrôlé</i>	50
3.5	Influence de la surface libre	51
3.5.1	Vitesse et accélération	51
3.5.2	Variation de surface libre	51
3.5.3	Pression de <i>traînée</i>	52

III Contribution mathématique à la résolution numérique des écoulements verticaux à surface libre 53

4	Solveur Navier-Stokes incompressible 54
4.1	Mise en équation 55
4.2	Principes de résolution 57
4.2.1	Méthode itérative implicite 57
4.2.2	Fonction de courant et de vorticité 57
4.2.3	Méthode de la compressibilité artificielle 58
4.2.4	Méthode des projections 58
4.2.5	Méthode <i>Gauge</i> 59
4.3	Méthode des projections 60
4.3.1	Méthode des variables primitives 60
4.3.2	Méthode des variables primitives - approche <i>multistep</i> 64
4.3.3	Méthode des variables intermédiaires - approche <i>multistep</i> 68
4.4	<i>Gauge</i> methode 70
4.4.1	Principe 70
4.4.2	Résolution 71
4.4.3	Comparaison avec la méthode des projections 72
4.5	Schémas proposés 73
5	Méthode Level Set 74
5.1	Méthodes de suivi d'interface 75
5.1.1	Introduction 75
5.1.2	Principe de la méthode <i>Level Set</i> 75
5.2	Équation d'évolution de la fonction <i>Level Set</i> 78
5.2.1	Formulation 78

5.2.2	Choix de l'équation d'évolution	78
5.2.3	Nature mathématique	79
5.2.4	Schéma du premier ordre de précision	84
5.2.5	Schéma d'ordre de précision deux et supérieure	86
5.3	Méthode <i>Fast Marching</i>	91
5.3.1	Problème eikonale	91
5.3.2	Lien avec les problèmes de suivi d'interface	92
5.3.3	Equation eikonale approchée	92
5.3.4	Algorithme de la méthode <i>Fast Marching</i>	93
5.4	Opérations complémentaires à la méthode <i>Level Set</i>	95
5.4.1	Construction de la <i>vitesse étendue</i>	95
5.4.2	Initialisation de la fonction <i>Level Set</i>	96
5.4.3	Algorithmes de (ré)initialisation	97
5.4.4	Méthode de visualisation	101
5.5	Algorithmes améliorés	103
5.5.1	Méthode <i>Narrow Band Level Set</i>	103
5.5.2	Conservation des volumes	104
5.5.3	<i>Level Set</i> à haut ordre de précision sans réinitialisation	105
5.6	Synthèse sur la méthode <i>Level Set</i>	106
6	Résultats numériques <i>WOLF</i>	107
6.1	Présentation du code <i>WOLF</i>	108
6.1.1	Suite logicielle <i>WOLF</i>	108
6.1.2	Module 2D vertical	109
6.2	Modélisation numérique	110
7	Conclusions	113
7.1	Contributions à la modélisation du phénomène	114
7.1.1	Modèle simplifié	114
7.1.2	Modèle expérimental	115
7.1.3	Modèle numérique	116
7.2	Axes de recherches pour la modélisation	119
8	Bibliographie	120
IV	Annexes	I
A	Développements théoriques divers	II
A.1	Rappel sur la portance et la traînée	III
A.1.1	Effort de traînée d'un élément plan perpendiculaire à l'écoulement . . .	III
A.1.2	Traînée de frottement d'un élément plan perpendiculaire à l'écoulement	IV
A.1.3	Traînée de pression d'un élément plan fin perpendiculaire à l'écoulement	V
A.2	Application du Paradoxe de d'Alembert	VIII
A.2.1	Paradoxe de d'Alembert	VIII
A.2.2	Paradoxe de d'Alembert en présence d'une surface libre	X

B	Resultats expérimentaux complémentaires	XI
B.1	Analyse de l'erreur de mesure	XII
B.1.1	La précision de la mesure	XII
B.1.2	Erreur systématique	XIII
B.1.3	Dispersion statistique	XIII
B.1.4	Conclusion	XIV
B.2	Essais complémentaires à vitesse constante	XV
B.2.1	Vitesse et accélération	XV
B.2.2	Variation de surface libre	XV
B.2.3	Pression de traînée	XVI
B.2.4	Coefficient de pression	XIX
B.3	Essais complémentaires à effort contrôlé	XX
B.3.1	Effort, vitesse et accélération	XX
B.3.2	Variation de surface libre	XXI
B.3.3	Coefficient de pression	XXI
B.3.4	Pression de traînée	XXII
C	Discrétisation des lois de conservation hyperboliques	XXV
C.1	Nature mathématique de l'équation	XXVI
C.1.1	Caractéristiques	XXVI
C.1.2	Théorème de Lax-Wendroff	XXVIII
C.1.3	Condition d'entropie	XXVIII
C.1.4	Condition de monotonie	XXX
C.1.5	Décentrement du schéma	XXX
C.2	Méthode de Godunov	XXXII
C.2.1	Problème de Riemann	XXXII
C.2.2	Principe du schéma de Godunov	XXXIII
C.2.3	Schéma de type Godunov	XXXV
C.2.4	Résumé du schéma de Godunov	XXXVI
C.3	Schéma de type Godunov du second ordre de précision ou plus	XXXVII
C.3.1	Schéma monotone	XXXVIII
C.3.2	Schéma <i>Total Variation Diminishing</i>	XXXVIII
C.4	Schémas <i>ENO</i> et <i>WENO</i> pour la résolution des lois de conservation hyperboliques	XL
C.4.1	Reconstruction 1D des valeurs aux frontières	XL
C.4.2	Approximation <i>ENO</i> et <i>WENO</i> en 1D	XLIII
C.4.3	Schémas <i>ENO</i> et <i>WENO</i> pour les lois de conservation 1D	XLVIII
C.4.4	Schémas <i>ENO</i> et <i>WENO</i> pour les lois de conservation 2D	LI
C.5	Discrétisation temporelle	LIII

TABLE DES NOTATIONS

Le maillage utilisé dans cette étude est un maillage 2D uniforme $\Delta x = \Delta y$ où les notations suivantes sont utilisées :

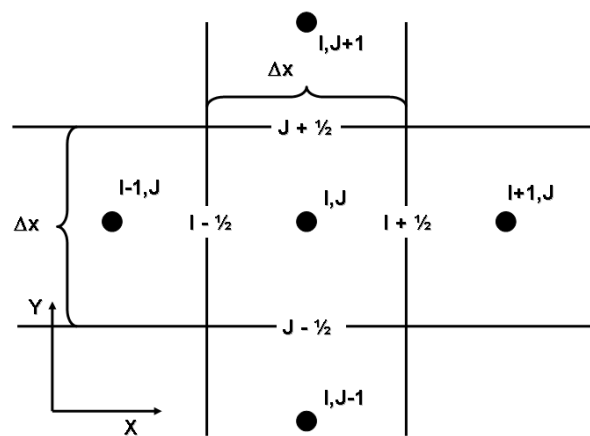


FIG. 1 – Maillage

Opérateurs

\mathcal{P}	Opérateur de projection dans l'espace des champs de divergence nulle
∇	Opérateur différentiel
$\nabla\phi$	Gradient de ϕ
$\nabla.\underline{a}$	Divergence de \underline{a}
$\Delta\phi$	Laplacien de ϕ
$\nabla \times \underline{a}$	Rotationnel de \underline{a}
d/dt	Dérivée matérielle
$\partial/\partial t$	Dérivée par rapport au temps
$\partial/\partial x_i$	Dérivée spatiale
D^+	Différence finie décentrée aval
D^-	Différence finie décentrée amont

Caractères usuels

A	Surface
\underline{a}, a_i, a	Vecteur accélération, composante et module de l'accélération
\underline{a}	Variable intermédiaire de la méthode <i>gauge</i>
cfl	Constante de Friedrichs-Levy-Courant
dS	élément infinitésimal de surface
dx	élément infinitésimal de longueur
$d(\underline{x}, t, \tau)$	Fonction distance fictive (réinitialisation itérative)
e	Épaisseur
E_v	Module d'élasticité
F	Force
\underline{F}	Fonction de courant
F	Vitesse normale à l'interface
F^{ext}	Champ de vitesse normale à l'interface étendue
g	Accélération de la pesanteur
H	Hauteur
H	Fonction de préservation du volume
h	Profondeur
K	Coefficient de proportionnalité
l	longueur
$L^2(\Omega)$	Espace de Hilbert de Ω
M	Moment de rotation
M	Masse
m	Fonction minmod
N, n	Nombre donné
\underline{n}	Normal à l'interface
P	Force, effort
p	Pression
S	Surface
$sign$	Fonction signe
t	Variable temporelle
t_γ^{n-1}	quantile d'ordre $1 - \gamma$ de la loi de student à $n - 1$ ddl
T	Variable du problème eikonale
\underline{v}, v_i, V	Vecteur vitesse, composante et module de vitesse
\underline{u}, u_i, U	Vecteur vitesse, composante et module de vitesse
\underline{v}^*	Champ de vitesse approché
V	Volume
V_0	Vitesse de translation du plan
r, R	Norme du vecteur e_r en coordonnées cylindriques et sphériques
\underline{w}	Champ de vitesse fictif
\underline{x}, x_i	vecteur position et composante de la position
x	abscisse de la position
y	ordonnée de la position
z	élévation de la position

Indices

0	Initial
e	Relatif à l'eau
s	Relatif au corps solide
p	Relatif au plan
L	Relatif à la portance
D	Relatif à la traînée
sup	Relatif à la face supérieure du plan
inf	Relatif à la face inférieure du plan
t	Relatif au temps
th	Valeur théorique
\bar{x}	valeur moyenne de la variable x

Caractères grecs

α	Niveau de confiance en terme probabiliste
β	Pseudo-vitesse de l'onde de pression
Δ	Variation finie
Δ	Erreur de mesure
φ	Fonction quelconque
ϕ	Fonction <i>Level Set</i>
ϕ	Variable intermédiaire de la méthode <i>gauge</i>
Γ	Frontière du domaine de calcul ou interface
κ	Courbure
μ	Viscosité absolue
μ	Espérance mathématique
ν	Viscosité relative
π	Produit sans dimension
θ	Angle
ρ	Masse volumique
Ω	Domaine de calcul
$\partial\Omega$	Frontière du domaine de calcul
σ	Coefficient de tension surfacique
σ^2	Variance
τ	Contrainte de cisaillement
ω	Vitesse angulaire
$\underline{\xi}$	Fonction de vortacité
ψ	Variable intermédiaire de l'approche multistep

Nombres adimensionnels

C_p	Coefficient de pression	$\Delta p / (1/2)\rho v^2$
C_f	Coefficient de frottement local	$\tau_w / 1/2\rho v^2$
C_L	Coefficient de portance	$F_L / 1/2\rho v^2 A$
C_D	Coefficient de traînée	$F_D / 1/2\rho v^2 A$
Fr	Nombre de Froude	v^2 / gl
M	Nombre de Mach	v / c
Re	Nombre de Reynolds	$\rho v d / \mu$
We	Nombre de Weber	$\rho v^2 l / \sigma$

TABLE DES FIGURES

1	Maillage	ix
1.1	Principe de la porte relevante	2
1.2	Systèmes Hottop et Myholm [future-sciences, 2007]/[Campus,page 58]	3
1.3	Systèmes mécanique et par arbre moteur [Ronquieres, 2007]/[AIP CN,2006,page 3]	4
1.4	Écoulement sur un élément plan perpendiculaire - Principe	5
1.5	approche générale de l'étude	9
2.1	Distribution des pressions sur les faces amont et aval d'un élément plan dans un écoulement fluide sans surface libre	15
2.2	Distribution de coefficient de pression théorique sur base de Bernouilli	16
2.3	Zone de décollement de la couche limite	17
2.4	Application du théorème de Bernouilli généralisé à la translation uniforme d'un élément plan dans un fluide à surface libre	19
2.5	Décomposition de la charge hydrodynamique fournie au fluide	23
2.6	Expérience de pensée	23
3.1	Dispositif expérimental	26
3.2	Cadre et système de traction	27
3.3	Position des capteurs de pression dans l'élément plan	28
3.4	Système de mesure	29
3.5	Évolution temporelle des mesures brutes fournies par les capteurs - essai à vitesse constante 90 mm/s	32
3.6	Évolution temporelle de la vitesse et de l'accélération - essai à vitesse constante 90 mm/s	34
3.7	Évolution temporelle de la vitesse comparée à la variation de surface libre - essai à vitesse constante 90 mm/s	35
3.8	Contributions à la pression mesurée	35
3.9	Évolution temporelle de la pression de traînée - essai à vitesse constante	37
3.10	Comparaison de l'évolution de la pression de traînée au capteur central et latéral	38
3.11	Évolution temporelle des valeurs de pression hydrodynamique théorique	40
3.12	Évolution du coefficient de pression - essai à vitesse constante	41
3.13	Evolution avec la profondeur de l'effort de traction sur l'élément plan - essai à <i>effort contrôlé</i>	42
3.14	Évolution temporelle de la vitesse et de l'accélération - essai à <i>effort contrôlé</i>	43
3.15	Evolution de la variation de surface libre - Essai à <i>effort contrôlé</i>	43
3.16	Évolution temporelle des pressions <i>de traînée</i> - Essai à <i>effort contrôlé</i>	45

3.17	Comparaison de l'évolution de la pression <i>de traînée</i> aux capteurs central et latéral - essai à <i>effort contrôlé</i>	46
3.18	Évolution temporelle de la pression théorique - essai à <i>effort contrôlé</i>	47
3.19	Principe du calcul des efforts générés	48
3.20	Comparaison de l'effort de manoeuvre généré par le contrepoids et mesuré par la sonde de pression	49
3.21	Evolution temporelle du coefficient de pression C_p - Essai à <i>effort contrôlé</i>	49
3.22	Comparaison de l'évolution de la vitesse et de l'effort de traction	51
3.23	Comparaison des variations temporelles de surface libre - capteur central	52
3.24	Comparaison de l'évolution temporelle des pressions hydrodynamiques totales - capteur central	52
5.1	Évolution temporelle de la fonction Level Set [www.wikipeda.fr]	76
5.2	Forme des caractéristiques de l'équation d'évolution - choc et raréfaction	81
5.3	<i>Solutions faibles</i> du problème intégral [Sethian,1996,a]	82
5.4	Phénomène de Gibbs	83
5.5	Principe de la méthode <i>Fast Marching</i> [Sethian,1999,a]	91
5.6	Principe de la méthode <i>Fast Marching</i>	93
5.7	Configurations possibles pour le calcul des distances à l'interface	96
5.8	Erreur introduite lors du positionnement de l'interface	99
5.9	Configurations de base de la méthode <i>Marching Squares</i> et mise en évidence des ambiguïtés	102
6.1	Architecture de la suite logicielle WOLF	108
6.2	Domaine de calcul et conditions aux limites	110
6.3	Champ de vitesse numérique	111
6.4	Champ de pression numérique	112
7.1	Contributions à l'effort de traînée en <i>hydrodynamique</i>	114
A.1	Forces de portance et de traînée	III
A.2	Couche limite sur les parois latérales de l'élément plan	IV
A.3	Ecoulement autour d'un élément plan	V
A.4	Distribution des pressions sur les faces amont et aval d'un élément plan dans un écoulement fluide sans surface libre	VI
A.5	Coefficient de traînée d'une plaque plane perpendiculaire à l'écoulement	VII
A.6	Volume de contrôle pour le calcul de la traînée	IX
A.7	Principe de l'expérience de pensée sur l'effet de la surface libre	X
B.1	Analyse statistique de l'erreur sur la mesure de pression (117 mesures) en mm H2O	XII
B.2	Analyse statistique de l'erreur sur la mesure de déplacement (69 mesures) en mm	XIII
B.3	Évolution de la vitesse et de l'accélération - essais à vitesse constante 95 mm/s	XV
B.4	Évolution en fonction de la profondeur de la variation de surface libre - essais à vitesse constante 95 mm/s	XV
B.5	Évolution temporelle de la pression de traînée - essais à vitesse constante 95 mm/s	XVI
B.6	Comparaison de l'évolution temporelle de la pression de traînée entre le capteur central et latéral - essais à vitesse constante 95 mm/s	XVII

B.7	Évolution des pressions hydrodynamiques théoriques- essais à vitesse constante 95 mm/s	XVIII
B.8	Évolution des coefficients de pression - essais à vitesse constante 95 mm/s . . .	XIX
B.9	Évolution en fonction de la profondeur de l'effort de traction - essais à effort contrôlé - 20 kg	XX
B.10	Évolution temporelle de la vitesse et de l'accélération - essais à effort contrôlé - 20 kg	XX
B.11	Évolution temporelle de la variation de surface libre - essais à effort contrôlé - 20 kg	XXI
B.12	Évolution avec la profondeur du coefficient de pression - essais à effort contrôlé - 20 kg	XXI
B.13	Évolution temporelle de la <i>pression de traînée</i> - essais à effort constant - 20 kg	XXII
B.14	Comparaison de l'évolution temporelle des pressions de traînée au capteur central et latéral - essais à effort contrôlé - 20 kg	XXIII
B.15	Évolution temporelle des pressions hydrodynamiques théoriques - essais à effort contrôlé - 30 kg	XXIV
C.1	Caractéristiques de l'équation de conservation hyperbolique 1D	XXVII
C.2	Phénomène de Gibbs	XXXI
C.3	Problème de Riemann 1D	XXXII
C.4	Principe de la méthode de Godunov	XXXIV
C.5	Mécanisme de génération des oscillations dans la solution numérique	XXXVII
C.6	Table des constantes $c_{r,j}$ pour un maillage uniforme	XLII
C.7	Phénomène de Gibbs	XLIII

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

The significance of fluid mechanics becomes apparent when we consider the vital role it plays in our everyday lives. When we turn on our kitchen faucets, [...] we use electricity [...], we drive our cars [...], we are confident in the operation of hydraulic [...] processes. And our lives depend on a very important fluid mechanic process : the flow of blood through our veins and arteries.

J. A. Roberson

Sommaire

1.1	Préambule	2
1.2	Exemple de la porte basculante	3
1.3	Sujet de l'étude	5
1.4	Approche générale	6
1.4.1	Contribution théorique simplifiée à la modélisation des écoulements induits par le mouvement quasi vertical d'un corps	6
1.4.2	Contribution expérimentale à la modélisation des écoulements induits par le mouvement quasi vertical d'un corps	6
1.4.3	Contribution mathématique à la résolution numérique des écoulements verticaux à surface libre	7

1.1 Préambule

La dynamique des écoulements à surface libre induis par le mouvement essentiellement vertical d'un corps immergé est un phénomène complexe et difficile à appréhender. En particulier, il est difficile de prévoir les efforts générés par le fluide en mouvement sur le corps qui donne naissance à l'écoulement. Ainsi, à ma connaissance, aucune théorie générale décrivant ce type de phénomène n'est proposée dans la littérature.

La complexité de ces écoulements découle principalement du couplage fondamental qui existe entre le champ de pression à la surface du corps en mouvement et le champ de vitesse induit par ce déplacement. En effet, les efforts à la surface de l'élément plan sont induits par l'écoulement, mais ils correspondent aussi au *moteur de l'écoulement*. Il n'est pas possible d'étudier l'un sans l'autre.

Des exemples pratiques de mouvements quasi-verticaux de structures du génie civil immergées dans l'eau sont pourtant régulièrement rencontrés par les bureaux d'études. Ainsi, le relèvement d'une porte basculante (figure 1.1), se fermant en sortant d'une chambre en fond de radier d'écluse, est un exemple typique de ces écoulements à surface libre quasi-verticaux.

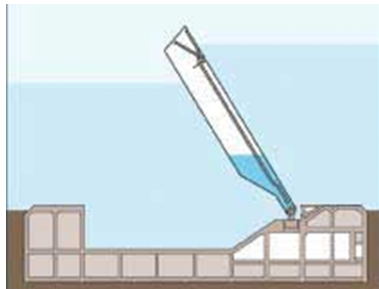


FIG. 1.1 – Principe de la porte relevante

Historiquement, le dimensionnement de ce type d'ouvrage était réalisé au moyen d'études expérimentales spécifiques sur un modèle réduit de la structure. Les résultats des essais obtenus en laboratoire sont alors étendus à la structure à taille réelle sur base de la *théorie des similitudes*. Néanmoins, depuis une trentaine d'années, la *computational fluid mechanics* fournit un nouvel outil pour traiter ce type de problème. Cette nouvelle science, apparue avec l'essor des ordinateurs, permet de simuler numériquement les écoulements de fluide et s'affranchir de la création d'un modèle réduit coûteux. Les travaux du HACH, en toute généralité, et cette étude en particulier, s'intègrent dans cette démarche de création et de validation de codes de calcul pour le dimensionnement des constructions hydrauliques.

1.2 Exemple de la porte basculante

Le relèvement d'une porte basculante (figure 1.1), se fermant en sortant d'une chambre en fond de radier d'écluse, est un exemple typique de ces écoulements à surface libre quasi-verticaux. En réalité, le vocable *porte clapet* ou *porte basculante* (*flap gate*) identifie plusieurs types de structures des constructions hydrauliques. Outre la porte d'écluse, il désigne également certains barrages mobiles et déversoirs à niveaux variables. D'une manière générale, ces portes basculantes se composent d'un vantail rigidifié par des profilés qui a pour fonction de retenir une certaine quantité d'eau. Ce vantail s'articule autour d'un axe de rotation horizontal disposé sur la fondation (figure 1.1).

De nombreux mécanismes destinés à actionner le relèvement de la porte ont été élaborés. Pour le cas spécifique des portes d'écluses, les principaux types sont résumés ci-dessous :

- **Système Hottop** : Ces portes peuvent être rendues automotrices en les munissant d'un double bordage et de réservoirs à air qui sont remplis lorsque la porte est ouverte et reposent sur le fond. Ce principe, utilisé dans la pratique sur un certain nombre d'écluses sur le Rhin et le Danube, est tout à fait d'actualité puisqu'il a été choisi pour équiper les portes marée-tempête de la ville de Venise (Projet Moïse).
- **Système Myholm** : La porte est reliée dans sa partie supérieure à des contrepoids par l'intermédiaire d'une chaîne. Le contrepoids est directement relié au sas de telle manière qu'il soit plein d'eau lorsque le sas est au niveau amont et vide lorsque le sas est au niveau aval. Ainsi, la porte est actionnée par la chute elle-même.

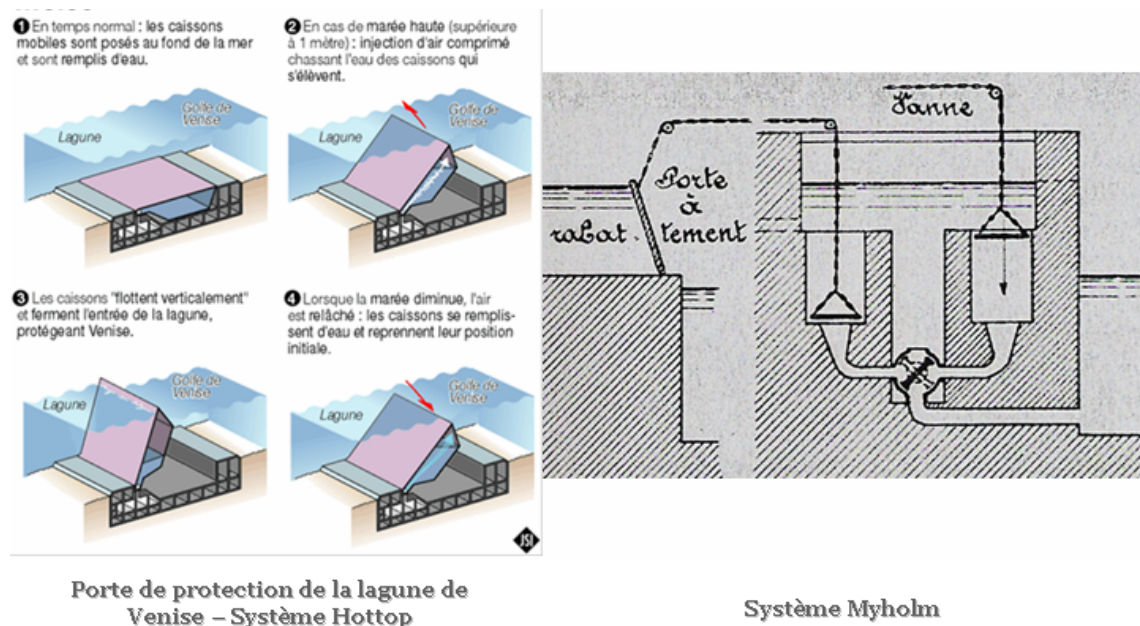


FIG. 1.2 – Systèmes Hottop et Myholm [future-sciences, 2007]/[Campus,page 58]

- **Système mécanique** : Divers systèmes mécaniques ont vu le jour et ont été appliqués dans la pratique. Ainsi, l'écluse de Troja utilise un système de chaînes et poulies actionné à la main, alors que les écluses du canal Rhin-Herne utilisent un bras fixe supérieur. Avec l'avènement des méthodes électromécaniques, l'utilisation de verins hydro-pneumatiques ou hydrauliques placés sous la porte a été rendue possible.

- **Système d'arbre moteur** : Grâce au développement des moteurs et des procédés d'exécution des éléments métalliques, il est également possible de construire des arbres de transmission qui assurent le relèvement de la porte. La porte de contrôle du déversoir du *Montgomery Dam* en Arkansas en est un exemple.

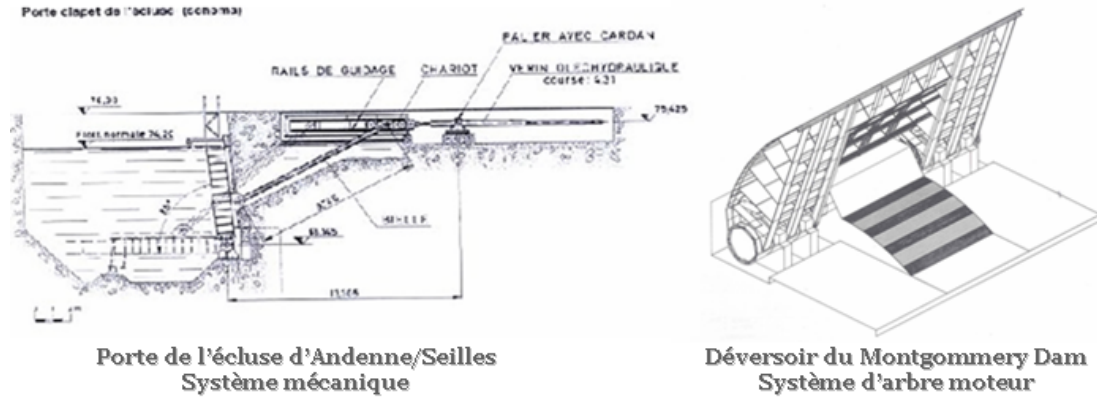


FIG. 1.3 – Systèmes mécanique et par arbre moteur [Ronquieres, 2007]/[AIPCN,2006,page 3]

Pour dimensionner ces systèmes de manoeuvre, il est nécessaire d'évaluer les efforts induits par l'écoulement lors du mouvement de la porte. Cette évaluation permet alors de mesurer le *couple résistant dû au mouvement de l'eau* M_e par rapport à l'axe de rotation. La seule formulation utilisable disponible dans la littérature est proposée par Serge LELIAVSKY . Il établit dans [Leliavsky] une formulation simple basée sur l'hypothèse que la résistance que l'eau oppose au mouvement de la porte est équivalente à celle que l'eau oppose au mouvement de translation d'un plan de surface unitaire. Il obtient ainsi la formulation suivante :

$$M_e = \frac{560}{4} \omega^2 H^4 \quad (1.1)$$

- où $M_e \left[\frac{Nm}{m_{lin}} \right]$ est le moment résistant à l'axe de rotation
 $\omega \left[\frac{rad}{s} \right]$ est la vitesse de rotation de la porte
 $H \left[m \right]$ est la hauteur de la porte

Cette formulation, vu la très grande approximation faite dans l'hypothèse à la base du raisonnement, donne des résultats peu précis. Elle fournit une première idée mais ne permet pas de se dispenser de la construction d'un modèle réduit.

1.3 Sujet de l'étude

Une première approche d'évaluation des efforts induits lors du relèvement d'une porte basculante a été réalisée au sein du HACH en 2006 par A. Canor [Canor,2006]. Ce travail, essentiellement expérimental, met en évidence la complexité extrême des écoulements induits par le mouvement quasi vertical de la porte d'écluse. De nombreux phénomènes visqueux, turbulents et instationnaires se produisent simultanément, rendant la décomposition des effets en contributions simples quasi impossible. De plus, le mécanisme utilisé limite fortement la vitesse de rotation et donc l'intensité des phénomènes observés et mesurés. Enfin, la comparaison des mesures expérimentales avec une première ébauche de code de calcul développée par le HACH montre la nécessité de créer un nouveau schéma numérique plus robuste et précis.

Cette étude propose donc de **concentrer ses efforts sur un phénomène plus fondamental** que la rotation, à savoir **la translation**. La translation verticale d'un élément plan horizontal dans l'eau (figure 1.4) représente en effet la configuration la plus fondamentale de la dynamique des écoulements à surface libre induits par les mouvements quasi-verticaux de corps solides. L'étude de ce mécanisme permet de mieux isoler les contributions des divers phénomènes simples aux mesures expérimentales. Autrement dit, l'auteur se propose de prendre du recul vis-à-vis du phénomène afin d'en améliorer la compréhension.

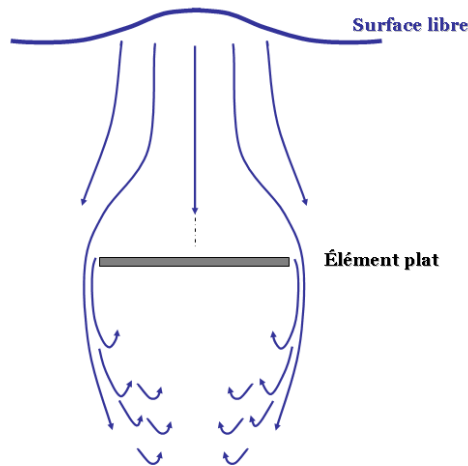


FIG. 1.4 – Écoulement sur un élément plan perpendiculaire - Principe

En résumé, l'objectif de ce travail de recherche est de fournir une contribution théorique à la compréhension de la dynamique de l'écoulement 2D induit par le mouvement de translation verticale d'un élément plan et en particulier des efforts générés par le fluide. Pour ce faire, il est mené en parallèle une étude bibliographique sur ce type d'écoulement et une campagne expérimentale de mesure des efforts sur l'élément plan. Les conclusions sur les mécanismes de l'écoulement sont alors mis au service du HACH pour le développement d'un code de calcul adapté et efficient.

1.4 Approche générale

La démarche scientifique à la base de cette étude se décompose en trois grands volets qui sont présentés successivement dans ce texte. Ces trois parties correspondent chacune à un aspect du métier de l'ingénieur. C'est pourquoi nous avons affirmé, en préambule, que ce TFE requiert un large spectre des compétences de l'ingénieur.

1.4.1 Contribution théorique simplifiée à la modélisation des écoulements induits par le mouvement quasi vertical d'un corps

L'objectif de cette partie est d'obtenir une description complète et argumentée des mécanismes participant à la création des efforts sur les parois d'un corps immergé dans un fluide à surface libre. Ceci doit en fait nous permettre de **dégager les principaux paramètres influençant le champ de pression sur la surface de l'élément ainsi que des formules de prédimensionnement. Cette approche correspond clairement au *modus operandi* de l'ingénieur-concepteur, qui utilise des formules simplifiées pour obtenir un prédimensionnement.**

Pour ce faire, dans une première tentative purement théorique, le théorème de Vaschy-Buckingham est appliqué successivement à un élément plan en translation dans l'air puis dans l'eau. Ce simple raisonnement théorique expose la spécificité de l'*hydrodynamique* sur l'*aérodynamique* que constituent la présence et le rôle actif d'une surface libre.

La fin de chapitre comporte une analyse originale sur le thème des écoulements à surface libre induits par le mouvement de corps. Celle-ci est le résultat de six mois de réflexion au cours desquels a été mené un va-et-vient constant entre recherche bibliographique, essais expérimentaux et raisonnements mathématiques, en vue d'obtenir un modèle simplifié décrivant le phénomène. Sur base du théorème de Bernoulli généralisé et de la théorie des couches limites, il est établi un modèle simplifié totalement novateur qui décrit les différents mécanismes qui génèrent de la pression sur le plan en mouvement : pression *aérodynamique* purement Bernoulli, pression *aérodynamique* générée par le décollement de la couche limite, surpression générée par l'inertie et surpressions consommées en pertes de frottement et d'ondes de surface.

1.4.2 Contribution expérimentale à la modélisation des écoulements induits par le mouvement quasi vertical d'un corps

La deuxième phase se base sur une méthode classique et caractéristique pour le dimensionnement des ouvrages hydrauliques, qui consiste à construire une maquette à échelle réduite en laboratoire. Habituellement, les mesures sur la maquette sont extrapolées grâce à la *théorie des similitudes* pour être utilisées par l'ingénieur du bureau d'étude dans sa note de calcul. Dans notre cas, l'objectif premier des essais n'est pas cette extrapolation, car nous n'étudions pas une application pratique précise. Le but poursuivi dans cette étude par l'analyse expérimentale est double :

1. fournir des **résultats fiables qui serviront à valider le code de calcul numérique du HACH** ;
2. **alimenter la réflexion de l'auteur sur le phénomène**, mettre en évidence les principaux paramètres d'influence, tester les hypothèses théoriques émises aboutissant

à l'élaboration du modèle conceptuel du chapitre 2.

Pour ce faire, il a été construit un cadre métallique sur lequel vient s'accrocher un dispositif de traction verticale d'un élément plan de $2 \times 0,75$ m. Cet élément plan est instrumenté grâce à des sondes de pression, de profondeur et des filaments de visualisation. Pour améliorer la précision des mesures, un traitement statistique des résultats est utilisé et fournit un intervalle de certitude à chaque grandeur expérimentale.

1.4.3 Contribution mathématique à la résolution numérique des écoulements verticaux à surface libre

Nous savons que l'essor des ordinateurs a permis de simuler numériquement les écoulements de fluide et de s'affranchir de la création d'un modèle réduit coûteux. Cette nouvelle science est appelée *computational fluid mechanics* et constitue un domaine de travail privilégié pour l'ingénieur recherche-développement du *XXI^{ème}* siècle. **Cette étude propose donc une synthèse discursive et argumentée de la littérature traitant de la résolution numérique des écoulements incompressibles 2D verticaux et 3D à surface libre. Cette partie ne constitue en rien un catalogue exhaustif de toutes les méthodes possibles et de leur détails d'implémentation. Mon objectif est de décrire systématiquement mais très brièvement les choix possibles face à une problématique et d'argumenter en faveur de l'une ou l'autre qui sera alors approfondie jusqu'à la question suivante.**

Numériquement, cette modélisation nécessite de créer deux solveurs distincts qui sont ensuite couplés dans un programme de calcul complet. Le premier solveur doit permettre de résoudre de manière efficace les équations de Navier-Stokes qui décrivent les écoulements incompressibles. Le second doit permettre de suivre avec précision la position de la surface libre.

Solveur Navier-Stokes

La première partie de l'étude sur ce solveur décrit le principe des cinq principales méthodes de discrétisation des équations de Navier-Stokes incompressibles. Il est montré que, pour diminuer l'effort de calcul, les *méthode des projection* et *méthode gauge* sont privilégiées.

Le principe de la méthode des projections, qui consiste à projeter les équations dans l'espace des champs de divergence nulle, ainsi que sa mise en équation, est détaillé dans ce texte. La projection est approximativement réalisée en calculant un champ de vitesse approché, duquel on dérive le champ de pression réel. Il est alors possible de corriger le champ de vitesse. Les choix qui sont réalisés dans ce chapitre sont essentiellement basés sur deux critères. Le premier est la consistance des conditions aux limites proposées et la manière dont les erreurs introduites aux frontières sont propagées dans le domaine de calcul. Le second critère est la convergence de la solution qui impose une cohérence des schémas de discrétisation des deux pas de l'approche *multistep*. Il est en effet démontré analytiquement que les deux pas sont intimement liés, rendant la discrétisation du premier pas dépendante de celle du second.

Pour finir, il est envisagé d'utiliser la méthode *gauge*. Cette discrétisation novatrice (2003) permet de résoudre les deux problèmes précités sans complexifier le schéma numérique.

Solveur de suivi d'interfaces

Dans ce chapitre, il est décrit une méthode de suivi numérique d'interface utilisée dans les codes de calcul d'écoulements 2D verticaux pour suivre avec précision la position de la surface libre. C'est la méthode *Level Set* développée à Berkeley. La plupart des méthodes classiques proposent de suivre explicitement l'interface dans un espace de dimension n . Au lieu de cela, le principe de la méthode *Level Set* est de créer une surface dans un espace élargi de dimension $n + 1$ qui possède la propriété fondamentale d'intercepter l'espace initial de dimension n au niveau de l'interface. Cette surface est définie en pratique grâce à une fonction ϕ dite *fonction Level Set*. Il suffit ensuite de mouvoir la surface créée dans l'espace élargi et de positionner son intersection avec l'espace initial pour connaître la position de la surface libre à tout moment.

Dans les algorithmes *Level Set*, le choix de la fonction ϕ n'est pas imposé. Ce mémoire argumente en faveur d'une fonction de type distance signée. Néanmoins, en pratique, la résolution de l'équation d'évolution ne permet pas à la fonction ϕ de conserver une telle structure, rendant le schéma numérique instable. C'est pourquoi une étape supplémentaire, appelée *réinitialisation*, est nécessaire à chaque pas de temps. Les principaux algorithmes de réinitialisation sont exposés dans ce texte.

Enfin, il est mis en évidence un grave problème de précision de ces algorithmes suite à la réinitialisation. Ceci explique que nous avons poussé les recherches vers des adaptations modernes de la méthode *Level Set* : *Narrow Band Level Set*, *Reinitialisation raffinée*, *Reinitialisation itérative conservative*.

Résultats numériques *WOLF*

Dans une dernière étape, une version simplifiée du code de calcul développé par le HACH pour la résolution des écoulements 2D verticaux à surface libre est appliquée au cas de la translation verticale uniforme d'un élément plan. Ce code de calcul est en réalité une version en développement du module 2D vertical de la suite logiciel *Wolf*. Cette application permet essentiellement de vérifier que le terme d'inertie est correctement modélisé par la méthode des projections.

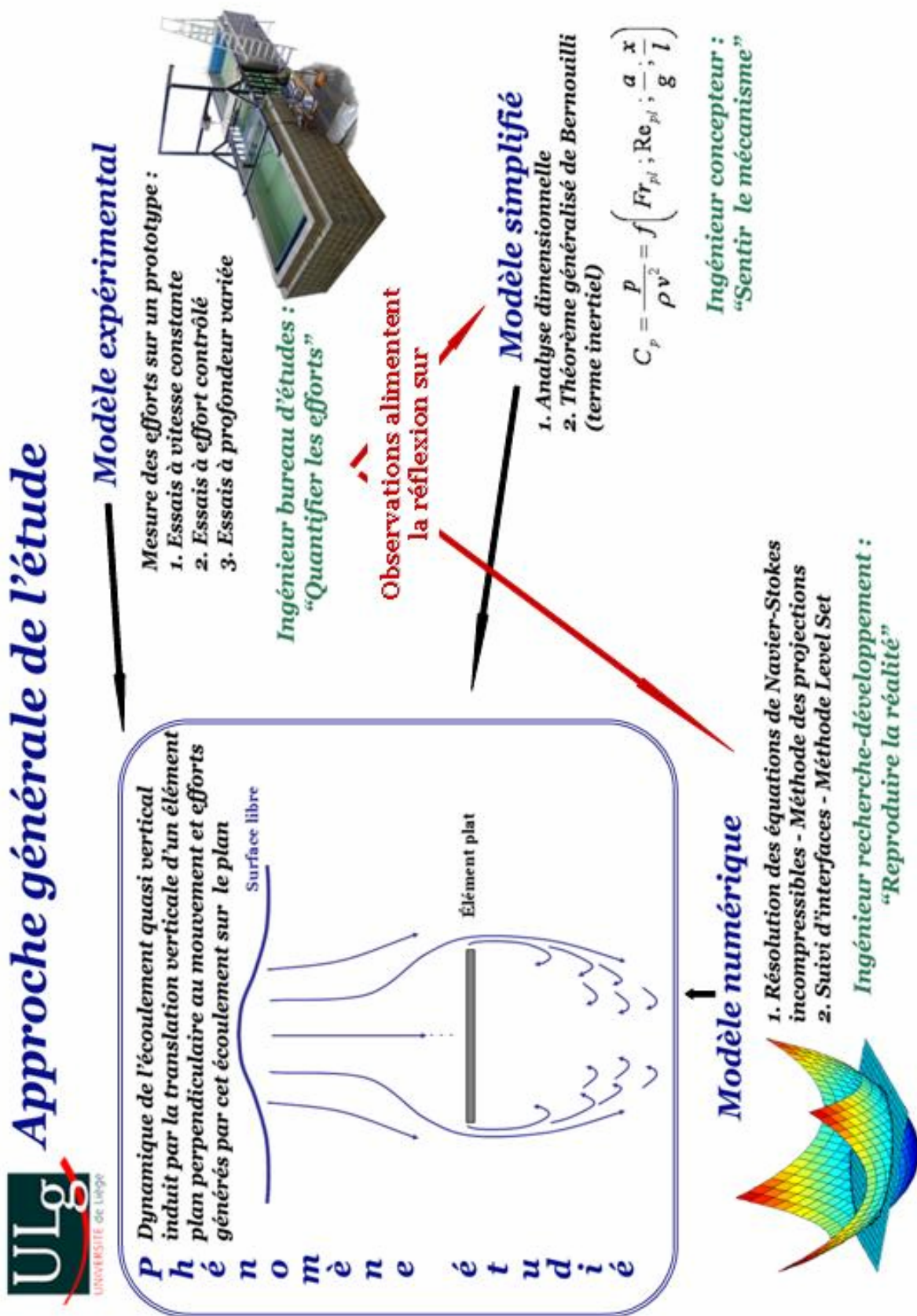


FIG. 1.5 – approche générale de l'étude

Première partie

Contribution théorique simplifiée à la
modélisation des écoulements induits par
le mouvement quasi vertical d'un corps

CHAPITRE 2

MODÈLE SIMPLIFIÉ

*Hydraulic research cannot be dissociated from theory if it is to be fully effective.
The purely experimental approach to the solution of a problem without any
theoretical analysis, even if restricted to a dimensional analysis, is likely to be
wasteful of efforts.*

P. Novak

Sommaire

2.1	Analyse dimensionnelle	12
2.1.1	Théorème de Vaschy-Buckingham	12
2.1.2	Analyse dimensionnelle d'un élément plan en mouvement dans un fluide à surface libre	12
2.1.3	Comparaison avec l' <i>aérodynamique</i>	13
2.2	Mécanisme de création de traînée en <i>hydrodynamique</i>	15
2.2.1	Écoulement non inertiel	16
2.2.2	Écoulement inertiel	18
2.2.3	Effet de l'accélération	21
2.3	Synthèse du modèle simplifié	23

2.1 Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle constitue un outil de choix pour l'hydraulicien. Elle permet de fournir des informations sur un phénomène physique à partir de simples considérations d'homogénéité. Dans ce texte, nous proposons d'utiliser cette théorie pour réduire le nombre de variables du problème étudié expérimentalement et donc mettre en évidence les dépendances les plus fortes. En outre, la comparaison des résultats de cette analyse dimensionnelle avec les résultats classiques de l'*aérodynamique* met en évidence la source fondamentale de toute la problématique que nous étudions, à savoir l'influence forte de la surface libre du fluide par le biais du nombre de Froude.

2.1.1 Théorème de Vaschy-Buckingham

Considérons un phénomène physique décrit par une relation de la forme $f(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$ où q_1, q_2, \dots, q_n sont n paramètres indépendants.

SI k DÉSIGNE LE NOMBRE MINIMAL D'UNITÉS FONDAMENTALES NÉCESSAIRES POUR DÉFINIR LES DIMENSIONS DES PARAMÈTRES q_1, q_2, \dots, q_n ,

ALORS IL EST POSSIBLE DE GROUPEZ LES n PARAMÈTRES EN $n-k$ PRODUITS SANS DIMENSION ET ÉTABLIR LA RELATION FONCTIONNELLE INITIALE SOUS LA FORME

$$\varphi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) = 0 \quad (2.1)$$

OÙ $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ SONT LES PRODUITS SANS DIMENSION DÉFINIS À PARTIR DES q_1, q_2, \dots, q_n .

2.1.2 Analyse dimensionnelle d'un élément plan en mouvement dans un fluide à surface libre

Classiquement, en *hydrodynamique* et *hydraulique*, la vitesse v considérée dans les diverses formules et nombres adimensionnels est la vitesse du fluide. Cependant, dans le cadre de cette étude, l'écoulement complexe analysé est induit par le mouvement de l'élément plan. L'expérimentateur connaît donc uniquement le mouvement du corps et souhaite étudier le déplacement de fluide généré. C'est pourquoi, dans ce paragraphe, il est proposé une analyse dimensionnelle atypique et originale. Le raisonnement est en effet mené en prenant le point de vue du corps lui-même et pas de l'écoulement. Autrement dit, vitesse v et profondeur h utilisées sont des paramètres relatifs à l'élément plan.

Les paramètres physiques qui peuvent influencer le phénomène sont les suivants :

- Effort sur la porte par mètre linéaire	P	$[M T^{-2}]$
- Longueur de l'élément plan	l	$[L]$
- Epaisseur de l'élément plan	e	$[L]$
- Masse volumique de l'eau	ρ	$[M L^{-3}]$
- Viscosité absolue de l'eau	μ	$[M L^{-1} T^{-1}]$

- Accélération de la pesanteur	g	$[L T^{-2}]$
- Masse volumique de l'élément plan	ρ_s	$[M L^{-3}]$
- Coefficient de tension surfacique	σ	$[M T^{-2}]$
- Vitesse du corps	v_p	$[L T^{-1}]$
- Module d'élasticité du fluide	E_v	$[M L^{-1} T^{-2}]$
- Profondeur du corps	h_p	$[L]$
- Accélération du corps	a_p	$[L T^{-2}]$

Par application du théorème de Vaschy-Buckingham, nous savons qu'il est possible de déterminer 9 nombres adimensionnels fonctions de ces variables. On obtient alors la relation suivante :

$$\frac{P}{\rho l v_p^2} = f \left(Fr_p, Re_p, M_p, We_p, \frac{a}{g}, \frac{h}{l}, \frac{e}{l}, \frac{\rho_s}{\rho} \right) \quad (2.2)$$

où $We_p = \frac{\rho v_p^2 l}{\sigma}$	est le nombre de Weber du corps \propto compare l'énergie cinétique par unité de volume aux forces de pression associées à la tension superficielle
$M_p = \frac{v_p}{c} = v_p \sqrt{\frac{\rho}{E_v}}$	est le nombre de Mach du corps \propto compare l'énergie cinétique par unité de masse à l'énergie interne par unité de masse
$Re_p = \frac{\rho v_p l}{\mu}$	est le nombre de Reynolds du corps \propto compare les forces d'inertie aux forces de viscosité
$Fr = \sqrt{\frac{v_p^2}{gh_p}}$	est le nombre de Froude du corps \propto compare les forces d'inertie aux forces volumiques associées au champ de pesanteur

Puisque les mesures précises que nous réalisons sont des mesures de pression locale, il s'avère plus utile de se placer de manière locale en un point précis x de l'élément plan et considérer la pression p en lieu et place de l'effort total P par mètre linéaire. On définit ainsi un nouveau nombre adimensionnel, le *coefficient de pression* C_p :

$$C_p = \frac{p}{\rho v^2} = f \left(Fr_p, Re_p, M_p, We_p, \frac{a}{g}, \frac{h}{l}, \frac{e}{l}, \frac{\rho_s}{\rho}, \frac{x}{l} \right) \quad (2.3)$$

Le dispositif expérimental (chapitre 3 page 25) ne permet de faire varier, dans un domaine limité, que les paramètres v_p , h_p , a_p et $\frac{x}{l}$, si bien que l'on peut simplifier la relation (2.3) :

$$C_p = \frac{p}{\rho v^2} = f \left(Fr_p, Re_p, \frac{a}{g}, \frac{x}{l} \right) \quad (2.4)$$

2.1.3 Comparaison avec l'aérodynamique

L'action d'un fluide sans surface libre sur un corps de forme quelconque a été largement étudiée en *aérodynamique* car ce phénomène est crucial pour le comportement des avions. Par changement de repère, on peut montrer qu'il y a stricte équivalence entre l'action d'un fluide de vitesse uniforme et constante sur un corps et l'action d'un fluide immobile sur un corps en mouvement de translation uniforme et rectiligne.

Grâce à l'analyse dimensionnelle analogue à celle du paragraphe 2.1.2, il est montré, dans [Candel,1990,page 305], que le coefficient de pression d'un écoulement uniforme sur une plaque plane perpendiculaire s'écrit sous la forme suivante :

$$C_p = \frac{p}{\rho V_0^2} = f\left(Re_{V_0}, \frac{x}{l}\right) \quad (2.5)$$

Dans ce chapitre, ce n'est tant les similitudes que les différences entre l'*hydrodynamique* et l'*aérodynamique* qui nous intéressent. La comparaison des formulations (2.4) et (2.5) montre clairement que, en présence d'eau, le coefficient de pression C_p dépend du nombre de Fr et de l'accélération adimensionnelle $\frac{a}{g}$, alors que ce n'est pas le cas en présence d'air. Cette nouvelle dépendance constitue la clef du présent travail et tout son intérêt.

2.2 Mécanisme de création de traînée en *hydrodynamique*

Dans l'annexe A.1 page III est présentée la théorie générale relative aux forces agissant sur un corps fermés dans un écoulement stationnaire à vitesse V_0 sans surface libre. Après avoir défini les notions de portance et de traînée, nous y démontrons que, dans le cas du plan perpendiculaire à l'écoulement, la force de portance est nulle et celle de traînée de frottement est négligeable. Le lien qui existe entre la résistance à l'avancement de l'élément plan et la distribution de pression sur les faces amont et aval y est clairement identifié :

$$\begin{aligned} D &= \int_S [-p \cos(n, x_i)] dS \\ &= \int_{-b/2}^{b/2} p^{sup}(x) dx - \int_{-b/2}^{b/2} p^{inf}(x) dx \end{aligned} \quad (2.6)$$

De plus, la littérature de l'*aérodynamique*, dont un résumé est présentée dans cette annexe, donne une idée des résultats à atteindre. Nous montrons en effet que le coefficient de pression devient très vite indépendant du nombre de Reynolds pour des vitesses élevées et que la distribution de pression sur les faces est alors donnée par la figure 2.1. Néanmoins, comme l'analyse dimensionnelle l'a clairement mis en évidence au paragraphe 2.1, ces résultats ne sont pas généralisables à l'hydraulique.

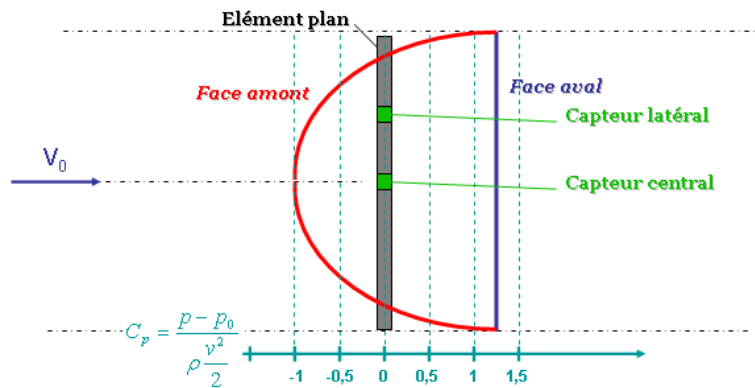


FIG. 2.1 – Distribution des pressions sur les faces amont et aval d'un élément plan dans un écoulement fluide sans surface libre

La question essentielle qui se pose dès lors est de **mettre en évidence la spécificité des écoulements à surface libre dans le mécanisme de création de la traînée**. Autrement dit, pourquoi, physiquement, l'eau ne crée pas un effort de traînée identique à l'air ?

Pour ce faire, la dynamique de l'écoulement généré par la translation d'un élément est étudiée sur base de l'équation de Bernoulli, successivement en négligeant puis en tenant compte de l'inertie du fluide. Ainsi, l'effet de l'inertie est mis en évidence de manière nette. Ensuite, l'expression de l'effet d'inertie en fonction de la position de la surface libre est établie analytiquement. Cette formulation permet d'identifier la différence fondamentale entre l'*aérodynamique* et l'*hydrodynamique* et d'expliquer le mécanisme de déformation de la surface libre. Enfin, la contribution de l'accélération du corps sur les efforts induits à sa surface est brièvement analysée.

2.2.1 Écoulement non inertiel

Dans ce paragraphe, l'écoulement de fluide induit par le mouvement de translation du plan est étudié en supposant que le fluide ne présente pas d'inertie. L'objectif est de retrouver les valeurs de la distribution de pression qui sont présentées sur la figure 2.1. Il sera en effet montré dans le paragraphe 2.2.2 que les résultats de l'*aérodynamique* correspondent en réalité à un écoulement sans inertie.

Théorème de Bernouilli

Pour ce faire, le raisonnement est basé sur le théorème de Bernouilli stationnaire :

$$\frac{U^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = cst \quad (2.7)$$

qui est valable pour autant que le fluide soit dénué de viscosité et donc irrotationnel, qu'il soit incompressible et que les forces volumiques dérivent seulement du potentiel g .

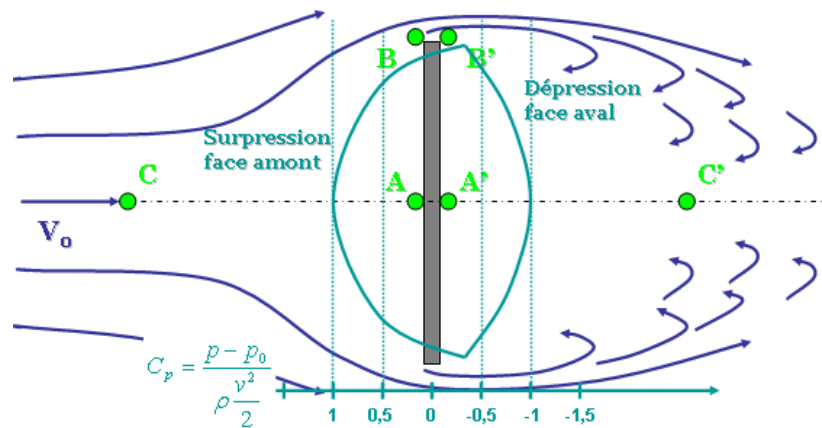


FIG. 2.2 – Distribution de coefficient de pression théorique sur base de Bernouilli

En se basant sur les notations de la figure 2.2, l'application du théorème de Bernouilli entre A-C montre que

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{U_A^2}{2g} = \frac{p_C}{\rho g} + \frac{U_C^2}{2g} \quad (2.8)$$

\Leftrightarrow

$$p_A = \rho \frac{V_0^2}{2} \quad (2.9)$$

pour autant que l'on suppose que la pression est nulle dans l'écoulement non perturbé (i.e $p_C = 0$).

Puisque la vitesse varie de $U = 0$ en A à $U = V_0 + \Delta V$ en B, la pression le long de la face amont du plan diminue au fur et à mesure que l'on s'éloigne du centre du plan selon la loi suivante

$$p(x) = \rho \left(\frac{V_0^2}{2} - \frac{U(x)^2}{2} \right) \quad (2.10)$$

pour atteindre en B la valeur $p_B = -\rho \frac{\Delta V^2}{2}$ où ΔV est la survitesse nécessaire pour assurer la continuité entre les masses d'air amont et aval.

Par un raisonnement parfaitement analogue, on obtient la distribution de vitesse des dépressions sur la face aval telle qu'elle est représentée sur la figure 2.2.

Décollement

La distribution de pression de la figure 2.2 établie sur base du théorème de Bernouilli seul n'est pas identique à celle trouvée dans la littérature et représentée sur la figure A.4. Il faut en effet tenir compte, pour la face aval, du phénomène de décollement de la couche limite.

Le décollement intervient lorsque la couche limite se développe en présence d'un gradient de pression adverse, c'est-à-dire dans la situation où la pression augmente dans la direction de l'écoulement. C'est exactement le cas rencontré sur les bords latéraux de l'élément plan. Si on se place du point de vue du fluide, sa vitesse, à l'extrémité aval du bord latéral, vaut $V_0 + \Delta V$. Par Bernouilli, il est donc le siège d'une pression $p = -\rho \frac{(V_0 + \Delta V)^2}{2}$, alors que le fluide au centre de la face aval a une vitesse nulle et est donc caractérisé par une pression nulle. On observe donc un gradient de pression adverse entre les points B' et C'.

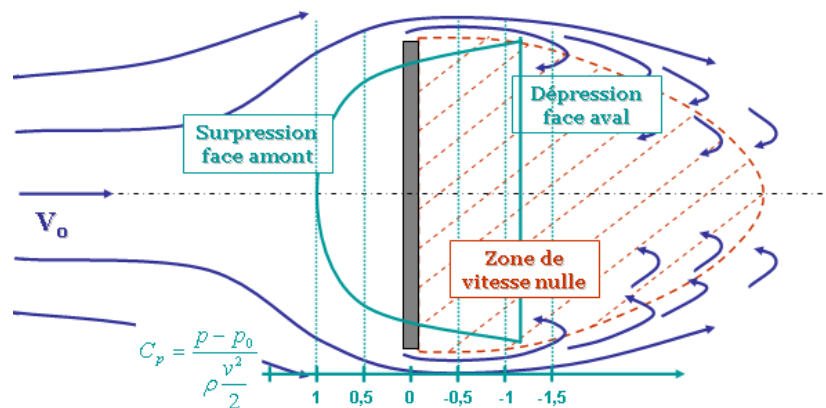


FIG. 2.3 – Zone de décollement de la couche limite

Dans ce cas de figure, la vitesse de l'écoulement externe à la couche limite le long des parois du plan diminue et les particules fluides subissent une décélération. La décélération est encore plus intense dans la couche limite du fait des transferts de quantité de mouvement par les forces visqueuses. En effet, la quantité de mouvement du fluide diminue graduellement pour compenser les gradients de pression et les forces de frottement pariétales. En un certain point, la vitesse s'annule.

Dans le cas de l'élément plan, le point d'annulation de la vitesse correspond, dès les faibles vitesses, aux arêtes avales du plan. Il existe donc, derrière le plan, **une zone de fluide de vitesse convective nulle mais fortement turbulente**. Voilà pourquoi le coefficient de pression vaut une valeur constante sur toute la face aval du plan.

2.2.2 Écoulement inertiel

Théorème de Bernoulli généralisé

Selon [Piroton,2001,page246], le théorème de Bernoulli stationnaire (2.7) peut être modifié pour tenir compte de l'inertie du fluide :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{U^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} \quad (2.11)$$

où un terme dû à l'accélération en instationnaire apparaît comme terme source dans la variation de la charge totale.

En se basant de nouveau sur les notations de la figure 2.2, l'application du théorème de Bernoulli généralisé entre A-B montre que

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{U_A^2}{2g} - \frac{p_B}{\rho g} - \frac{U_B^2}{2g} = -\frac{1}{g} \int_B^A \frac{\partial U}{\partial t} dx \quad (2.12)$$

⇔

$$p_A = \rho \frac{V_0^2}{2} + \frac{1}{g} \int_A^B \frac{\partial U}{\partial t} dx \quad (2.13)$$

pour autant que l'on suppose que la pression est nulle dans l'écoulement non perturbé (i.e $p_C = 0$). Clairement, puisque la vitesse du fluide est nulle en A et vaut $V_0 + \Delta V$ en B, l'intégrale de (2.13) est toujours positive ou nulle. Le terme d'inertie majore donc la pression sur la face amont de l'élément plan! Un raisonnement identique, mené pour la face aval, conclut que l'inertie crée une augmentation de la dépression.

Prise en compte de la surface libre

L'évaluation du terme d'inertie dans (2.13) est malaisée sans résoudre complètement l'écoulement puisque la vitesse $U(x, y, t)$ dont il dépend est la vitesse du fluide. Par contre, il est possible de montrer clairement que ce terme augmente plus l'élément plan se rapproche de la surface libre (ou d'une frontière fixe). En effet, pour ce faire, il suffit de définir un volume de contrôle au droit des parois latérales de l'élément plan et qui remonte jusqu'à la surface libre comme illustré sur la figure 2.4.

Supposons l'élément plan en translation uniforme à vitesse V_0 . Pour chaque intervalle de temps Δt , un volume ΔV doit être expulsé du volume de contrôle supérieur et un volume ΔV doit être aspiré dans le volume de contrôle inférieur. Évidemment, ce volume expulsé doit traverser la surface d'échange du volume de contrôle, si bien qu'on peut écrire :

$$\Delta V = A(t) U(t, x, y) \Delta t \quad (2.14)$$

$\xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0}$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = A(t) U(t, x, y) \quad (2.15)$$

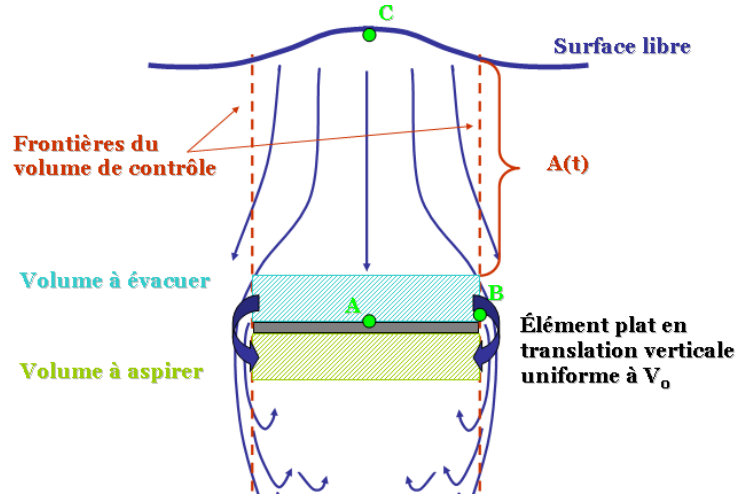


FIG. 2.4 – Application du théorème de Bernoulli généralisé à la translation uniforme d'un élément plan dans un fluide à surface libre

où $A(t)$ est l'aire de la surface d'échange, directement liée à la profondeur de l'élément plan. En dérivant (2.15) par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial A(t)}{\partial t} U(t) + A(t) \frac{\partial U(t)}{\partial t} \quad (2.16)$$

\Leftrightarrow

$$\frac{\partial A(t)}{A(t)} = - \frac{\partial U(t)}{U(t)} \quad (2.17)$$

\Leftrightarrow

$$U(t) = Cst * \frac{1}{A(t)} \quad (2.18)$$

\Rightarrow

$$a(t) = \frac{\partial U(t)}{\partial t} = -Cst * \frac{1}{A(t)^2} \quad (2.19)$$

Grâce à cet élégant développement analytique, on vient de montrer que l'accélération nécessaire pour assurer la continuité du fluide entre la face amont et la face aval du plan en mouvement est inversement proportionnelle à $A(t)^2$. Cette dépendance permet de distinguer deux comportements différents :

1. Si la surface libre est très éloignée, $A(t) \rightarrow \infty$ ce qui implique que $a(t) \rightarrow 0$. Le terme d'inertie dans (2.13) est donc nul et la pression sur les parois de l'élément est identique à celle trouvée pour un écoulement non inertiel. Ceci explique que les écoulements aérodynamiques soient analogues à l'écoulement théorique non inertiel.
2. Si le corps affleure la surface libre, $A(t) \rightarrow 0$ ce qui implique que $a(t) \rightarrow \infty$. La contribution du terme d'inertie dans (2.13) explose et la pression sur les parois de l'élément augmente fortement par rapport au cas théorique d'un écoulement non inertiel. Ceci explique la différence de comportement entre l'aérodynamique et l'hydrodynamique.

Mouvement de surface libre

Sur base de ces résultats, les mouvements d'oscillations de la surface libre sont justifiables. En effet, il vient d'être exposé que, pour éjecter l'eau latéralement, il faut vaincre les phénomènes d'inertie. La pression du fluide contenu dans le volume de contrôle s'en trouve nécessairement augmentée de la quantité suivante par rapport au cas non inertiel :

$$\Delta p = \frac{1}{g} \int_B^A \frac{\partial U}{\partial t} dx \quad (2.20)$$

Or, au niveau de la surface libre, la pression est imposée par la relation d'équilibre suivante :

$$p_C = p_{atm} + p_{surf} \quad (2.21)$$

où p_{surf} est la pression due à la tension de surface, liée à la courbure de la surface libre, et évaluée par la loi de Laplace (in [Tanguy,2004,page5]) :

$$p_{surf} = \sigma \kappa \quad (2.22)$$

où σ est le coefficient de tension de surface et κ la courbure de l'interface entre les deux fluides immiscibles. Une rapide évaluation indique que pour une élévation de 2 mm d'eau, $p_{surf} = 0,002 \text{ mm } H_2O$, ce qui est totalement négligeable.

Dés lors, **pour maintenir l'équilibre (2.21) des pressions à la surface tout en générant la surpression (2.20) nécessaire pour vaincre l'inertie, la surface libre s'élève au droit du plan.** La charge qui sera consommée en inertie lors de l'éjection du fluide est stockée sous forme de pression hydrostatique et de tension de surface. Le raisonnement est bien évidemment analogue pour expliquer la dépression de la face aval.

Notons une conséquence directe de ce mécanisme. Suite à l'élévation de la surface libre, une onde infinitésimale se crée à la surface du fluide. Il est connu, [Piroton,2001,page304], que ce type d'onde se propage avec une célérité donnée par la formule de Lagrange sur la surface du bassin. Cette propagation n'est rien d'autre qu'un transport de quantité de mouvement qui sera dissipée pour sa majorité en frottements divers. Cette réflexion montre clairement qu'une partie de la charge fournie au fluide par le plan en mouvement est dissipée au cours du stockage et n'est plus disponible pour vaincre l'inertie.

Sur base de la théorie linéaire des ondes de surface, nous savons que l'énergie transportée par une vague d'amplitude H dans un bassin de profondeur d vaut :

$$E = \frac{8}{3} \rho g H d^2 \sqrt{\frac{H}{d}} \quad [J/m_{lin}] \quad (2.23)$$

Dans le cas d'une translation verticale à vitesse constante 90 mm/s, il est mesuré (voir paragraphe 3.3 page 32) une vague d'environ 5 mm d'amplitude si bien que $E \approx 10 \text{ J}/m_{lin}$. Si la largeur du plan vaut 0,75 m, la distance de translation 0,7 m, la pression générée sur les deux faces du plan pour créer cette vague durant les 6 secondes de translation vaut alors $p \approx 0,95 \text{ mm } H_2O$. C'est de l'ordre de grandeur des pressions expérimentalement attribuées à l'onde de surface.

Pertes visqueuses

Pour mémoire, signalons qu'une partie de la charge fournie au fluide est dissipée sous forme de tensions visqueuses. En bonne approximation, cette perte est néanmoins négligeable.

Effet mémoire

Un dernier point, lié au phénomène d'inertie et de stockage de charge par déformation de la surface libre, vaut la peine d'être analysé. Dans le phénomène étudié, toute la charge fournie provient du mouvement du plan. Nous savons qu'une partie est directement consommée pour mettre les particules en mouvement. Il vient également d'être montré qu'une partie est stockée par déformation de surface libre. A la fin de l'essai, la charge stockée est rendue au fluide lorsque la surface libre revient à son niveau initial.

De ce point de vue, une partie du travail produit en début de translation est consommée avec un certain retard, à la fin de la translation ! Plus généralement, une partie du travail fournie lorsque la surface libre s'élève est consommée en réalité lorsque la surface libre s'abaisse. Ce phénomène, que nous appellerons *effet mémoire*, a une conséquence importante dans l'exploitation des résultats. Comme nous le verrons par la suite, ce retard empêche de relier le coefficient de pression C_p à des valeurs simples tels que Fr et Re .

2.2.3 Effet de l'accélération

Selon la seconde loi de Newton, une force F appliquée à un corps de masse M lui communique une accélération a telle que $F = M a$. Cette loi suppose que le corps est dans le vide et elle s'applique approximativement s'il se trouve dans un fluide dont la masse volumique est faible par comparaison avec sa propre masse volumique. Si le corps se trouve dans l'eau, ou plus exceptionnellement dans l'air (cas des dirigeables), la force est partiellement utilisée pour communiquer une accélération aux particules fluides¹ :

$$F = M a + \Delta F \quad (2.24)$$

S'il n'y a pas de perte d'énergie dans des tourbillons ou dans la turbulence (écoulement irrotationnel) et que la viscosité est négligée (fluide parfait), la force communiquée aux particules fluides est proportionnelle à l'accélération du corps, le coefficient de proportionnalité M_a étant défini comme la *masse ajoutée* du corps :

$$\Delta F = M_a a \quad (2.25)$$

$$M_a = K \rho V$$

où $K [-]$ est un coefficient de proportionnalité
 $V [m^3]$ est un volume de référence souvent pris égal au volume du corps solide

¹L'analogie suivante peut aider le lecteur à appréhender ce phénomène : les particules fluides sont des balles de ping pong qui sont accélérées en venant rebondir sur la raquette qu'est le corps en mouvement accéléré

Il est ensuite évident de transformer cet effort en surpression :

$$p_a = K \rho \frac{V}{S} = K \rho ep. a \quad (2.26)$$

Pour les écoulements rotationnels, le phénomène devient bien plus complexe. Des développements analytiques plus poussés ont été menés par N.E. KOCHIN [Kochin,1964]. On ne peut le résoudre qu'en utilisant des données expérimentales qu'il faut interpréter en terme de nombres sans dimension. Une méthode consiste à considérer la force hydrodynamique comme la somme d'une force d'inertie dépendant de l'accélération selon la formule précédente et d'une force de traînée dépendant de la vitesse.

2.3 Synthèse du modèle simplifié

La figure 2.5 synthétise les six phénomènes consommant la charge hydrodynamique fournie au fluide et mis en évidence dans notre modèle simplifié. Ce modèle simplifié est purement qualitatif car la dépendance temporelle du phénomène ne permet pas de quantifier les contributions par des formulations directs. La *traînée* dépend de l'historique de l'écoulement !

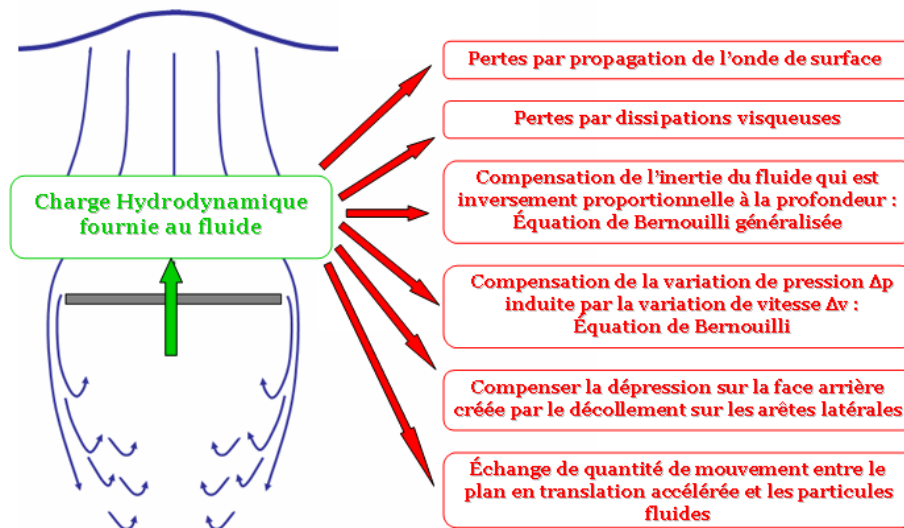


FIG. 2.5 – Décomposition de la charge hydrodynamique fournie au fluide

Pour illustrer le rôle de la surface libre, réalisons l'expérience de pensée représentée sur la figure A.7, qui consiste en la translation uniforme d'un plan dans un fluide non-visqueux. En l'absence de surface libre (figure de gauche), l'application du modèle simplifiée ou du paradoxe de d'Alembert (annexe A.2) montre que *l'effort de traînée* est nul. Alors que, à proximité d'une surface libre (figure de droite), *l'effort de traînée* n'est plus nul, car la charge fournie au fluide est consommée en inertie du fluide et en transport de quantité de mouvement par les ondes de surface.

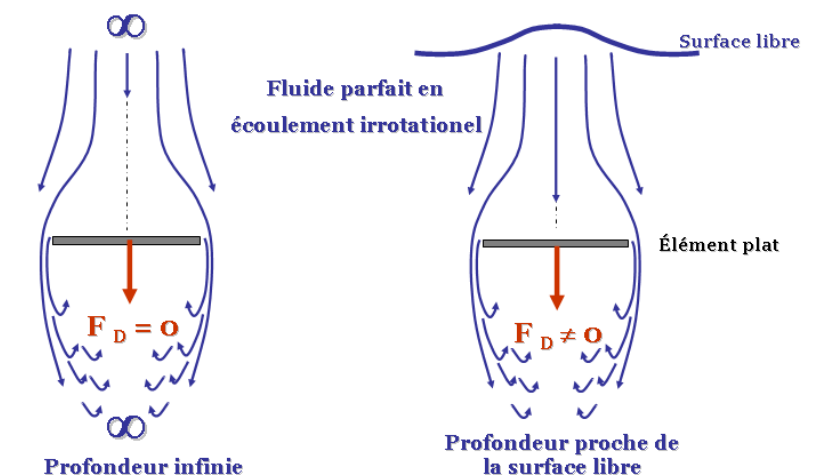


FIG. 2.6 – Expérience de pensée

Deuxième partie

Contribution expérimentale à la
modélisation des écoulements induits par
le mouvement quasi vertical d'un corps

CHAPITRE 3

ANALYSE EXPÉRIMENTALE

Research into hydraulic engineering has increasingly come to rely on experimental methods, including the use of scale and analogue models.

P. Novak

Sommaire

3.1	Dispositif expérimental	26
3.1.1	Bassin et système mécanique de translation de l'élément plan	26
3.1.2	Systèmes de manoeuvre	27
3.1.3	Système de mesure	28
3.1.4	Système de visualisation de l'écoulement	30
3.2	Campagne d'essais	31
3.3	Essais à vitesse constante	32
3.3.1	Mesures expérimentales brutes	32
3.3.2	Exploitation statistique des mesures	33
3.3.3	Vitesse et accélération	33
3.3.4	Analyse de la variation de surface libre	34
3.3.5	Pression <i>de traînée</i> et pression <i>hydrodynamique</i>	35
3.3.6	Coefficient de pression	41
3.3.7	Conclusion sur l'essai à vitesse constante	41
3.4	Essais à <i>effort contrôlé</i>	42
3.4.1	Vitesse et accélération	42
3.4.2	Variation de surface libre	43
3.4.3	Pression <i>de traînée</i> et pression <i>hydrodynamique</i>	44
3.4.4	Coefficient de pression	49
3.4.5	Conclusion sur l'essai à <i>effort contrôlé</i>	50
3.5	Influence de la surface libre	51
3.5.1	Vitesse et accélération	51
3.5.2	Variation de surface libre	51
3.5.3	Pression de <i>traînée</i>	52

3.1 Dispositif expérimental

Les mesures expérimentales présentées dans cette étude ont été réalisées dans le bassin, dédié à la dynamique des écoulements quasi-verticaux, du Laboratoire des Constructions Hydrauliques de l'Université de Liège. Les principaux organes de ce dispositif sont présentés sur la figure 3.1 page 26. Dans ce paragraphe, chacun des organes est décrit de manière précise afin que le lecteur puisse rééditer la campagne expérimentale s'il le souhaite.

3.1.1 Bassin et système mécanique de translation de l'élément plan

Le bassin est réalisé en maçonnerie sur une dalle en béton et offre une surface de 10 m de longueur sur 2 m de large. Cette longueur du bassin permet, dans la majorité des essais, que les mesures ne soient pas perturbées par le passage d'ondes de surface réfléchies sur les extrémités du bassin. En effet, par application de la formule de Lagrange [Piroton,2001,page 305], nous savons que la célérité d'une onde de surface infinitésimale vaut $\sqrt{g h} = \sqrt{9,81 * 1} \approx 3,2 \frac{m}{s}$. Une onde de surface créée par le mouvement de relèvement de l'élément plan met donc environ 3 secondes pour se réfléchir sur les parois et atteindre à nouveau la zone centrale du bassin. En outre, des isolants alvéolés sont placés aux extrémités du bassin pour réduire l'amplitude des ondes de surface. Il est nécessaire de disposer d'un bassin relativement large pour que la zone centrale ne soit pas affectée par des effets de bords et que l'approximation 2D soit valide. Afin de pouvoir visualiser l'écoulement quasi-vertical induit, les parois latérales du bassin dans la zone centrale sont réalisées en carreaux de plexiglas sur toute la hauteur du prototype.

L'élément plan utilisé dans la série d'expériences est une **structure en aluminium** (figure 3.1) recouverte de deux plaques de plexiglas. Les creux dans la structure permettent de placer les capteurs de pression. Durant les essais, les vides de la structure sont remplis d'eau. Au final, l'élément fait 2 m de longueur, 75 cm de largeur et 14 cm d'épaisseur. Son poids total complètement immergé vaut 64 kg. Sur base de la note de calcul de A. Canor [Canor,2006], il a été vérifié que les efforts restaient admissibles.

Enfin, le système d'accrochage de l'élément plan est constitué d'un cadre en profilés métalliques muni de poulies sur lesquelles repose un câble métallique reliant l'élément plan au système de manoeuvre (figure 3.2). Plus précisément, quatre câbles relient les quatre extrémités de l'élément plan à un anneau. Cet anneau est accroché à une poulie double. Le câble fait deux allers-retours entre cette poulie double et deux poulies simples accrochées au cadre. Une extrémité du câble est fixée au cadre et l'autre est ancrée dans le système de manoeuvre (voir paragraphe 3.1.2). Grâce à ce dispositif judicieux de poulies, **l'effort à développer pour lever l'élément plan est diminué d'un facteur 3 ou 4.**

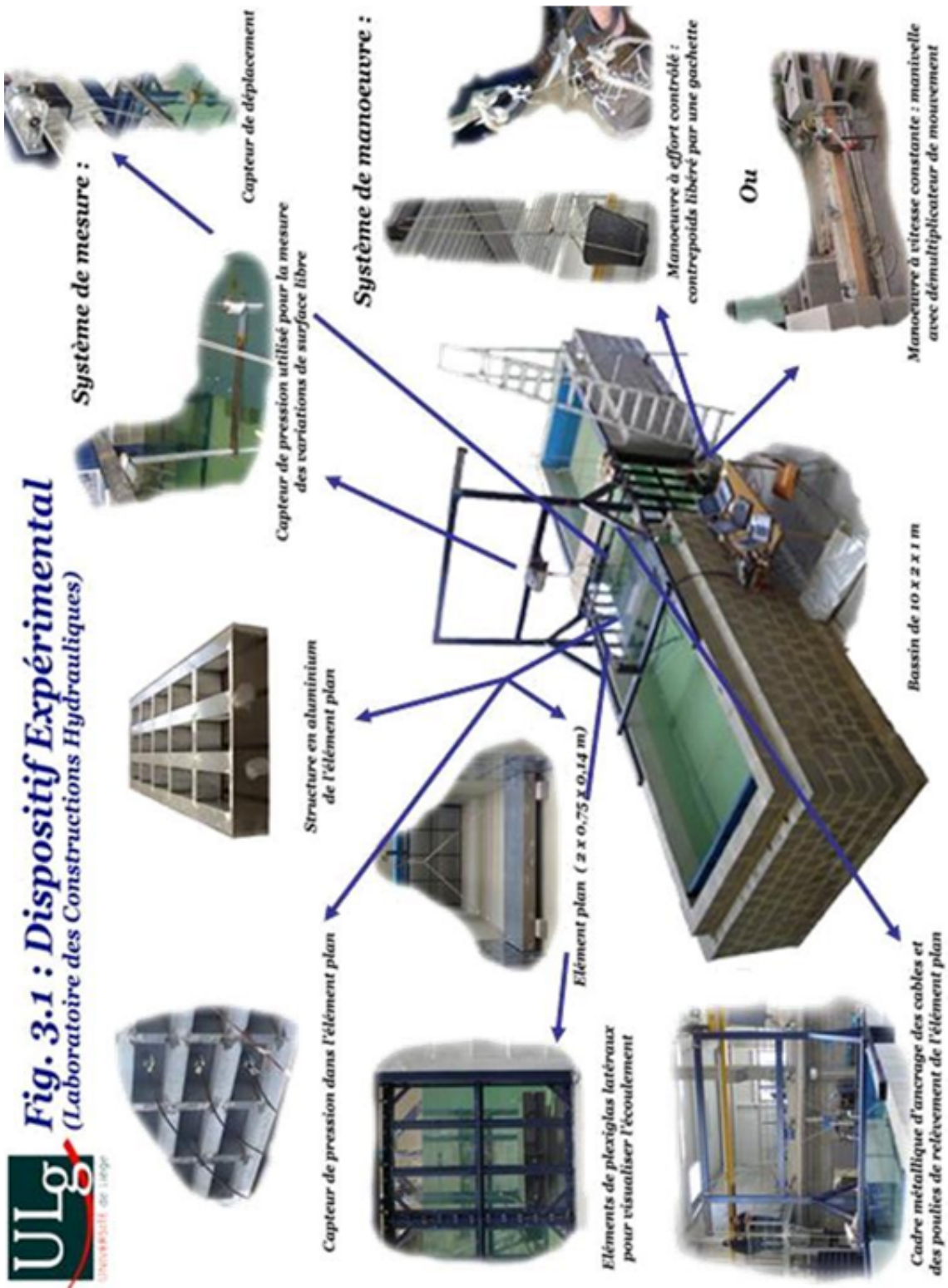


FIG. 3.1 – Dispositif expérimental

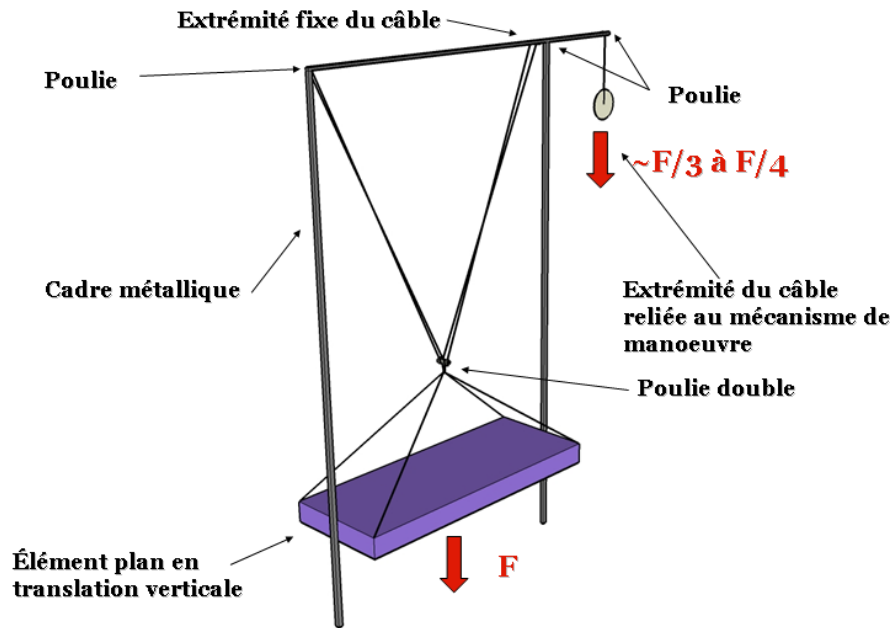


FIG. 3.2 – Cadre et système de traction

3.1.2 Systèmes de manoeuvre

Pour développer l'effort de traction nécessaire à la remontée de la porte, deux dispositifs de manoeuvre de la porte sont utilisés :

- Un simple contrepoids (figure 3.1 page 26) de masse connue est fixé à l'extrémité du câble de manière à réaliser un essai **à effort de traction contrôlé**. L'avantage de ce mécanisme est de permettre une haute reproductibilité des essais et d'apprécier la valeur de l'effort total pour un coût ridiculement faible. Le principal désavantage est lié aux effets de l'accélération sur les mesures.
- Une manivelle est actionnée manuellement pour remonter l'élément plan **à vitesse constante** (figure 3.1 page 26). Un contrepoids est inséré dans le mécanisme pour limiter la valeur de l'effort à fournir. De plus, un système de poulies (démultiplicateur de mouvement) est intercalé pour permettre d'atteindre des vitesses 8 fois supérieures à celles obtenues avec la manivelle seule.

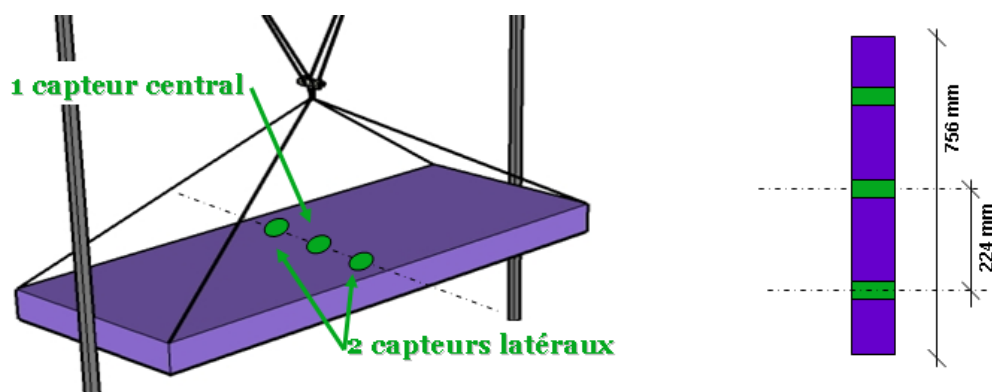


FIG. 3.3 – Position des capteurs de pression dans l'élément plan

3.1.3 Système de mesure

Le système de mesure disponible est composé de 5 sondes de pression et d'une sonde de déplacement angulaire. Les sondes de pression (figure 3.1 page 26) ont été tarées en usine de manière à fournir les valeurs des coefficients de conversion du signal électrique en hauteur d'eau. Néanmoins, suite au vieillissement des sondes et en fonction des conditions atmosphériques journalières, des corrections sont effectuées avant chaque série d'essais. Le fournisseur garantit une précision de $\pm 1 \text{ mm } H_2O$ sur les mesures de pression.

Les **sondes de pression** sont utilisées pour deux types de mesures :

- 3 sondes sont placées dans la partie médiane de l'élément plan, orientées successivement vers la face supérieure et vers la face inférieure, pour mesurer **les pressions totales agissant sur les faces de l'élément en mouvement** (figure 3.3).
- 2 sondes de pression sont placées, fixes, 20 mm sous le niveau de la surface libre au repos, au droit des capteurs centraux et latéraux se trouvant dans la porte. L'objectif de ces sondes est de mesurer **les variations de surface libre** de manière à pouvoir déterminer avec précision les composantes dynamiques des pressions mesurées par les sondes de la porte.

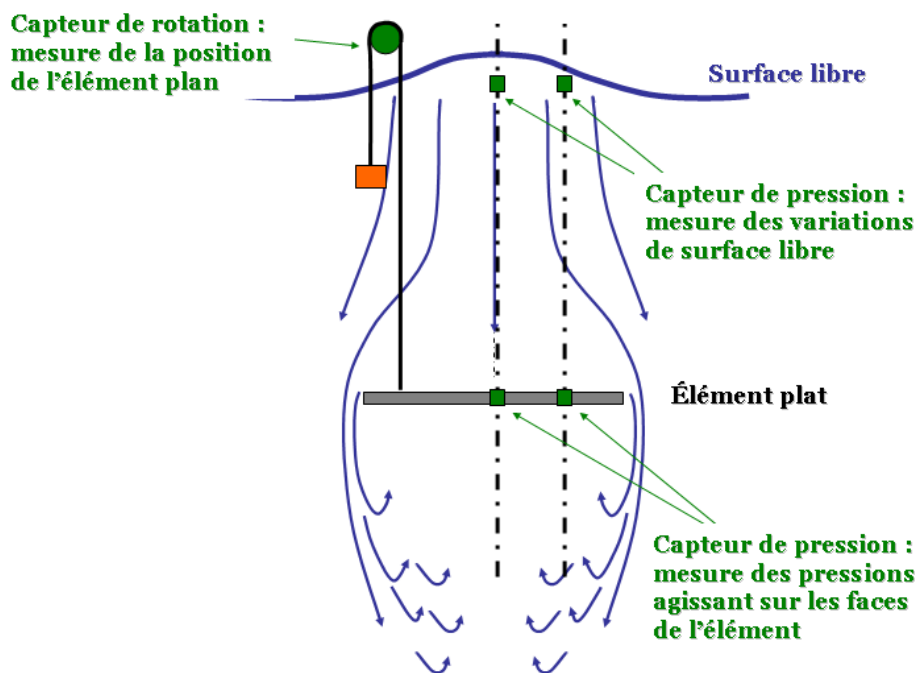


FIG. 3.4 – Système de mesure

Comme illustré sur la figure 3.1 page 26, **la position de l'élément plan est obtenue grâce à un capteur de déplacement angulaire** couplé à l'arbre de rotation d'une poulie. Une corde s'enroule autour de cette poulie, une extrémité de cette corde étant fixée à l'élément plan et l'autre à un poids en laiton qui maintient une tension dans la corde. Par des mesures manuelles, la constante de déplacement qui permet de convertir les mesures électriques en

mesures métriques a été établie en début de projet. La précision du capteur est donc de $\pm 1 \text{ mm } H_2O$.

Tarage du système de mesure

Comme il vient d'être signalé, les valeurs des coefficients de conversion valeurs électriques - valeurs de pression des capteurs de pression et de déplacement sont quotidiennement recalculées. Pour ce faire, il est procédé à une *validation hydrostatique* préalable à chaque série d'essai dynamique. La procédure de validation hydrostatique du système de mesure est la suivante :

1. stabiliser l'élément plan à une profondeur donnée et laisser l'eau du bassin atteindre son état au repos ;
2. effectuer les mesures de pression et de déplacement avec les coefficients non corrigés ;
3. effectuer une mesure manuelle de la profondeur ;
4. comparer les mesures manuelles et des capteurs ;
5. les coefficients sont corrigés selon les valeurs obtenues précédemment ;
6. des mesures sont effectuées avec les capteurs corrigés lorsque l'élément plan est fixe en 10 positions pour valider la correction. Si des erreurs apparaissent, la procédure est appliquée une nouvelle fois pour affiner les coefficients.

Cette procédure nous assure que les mesures dynamiques réalisées ne présentent pas de biais significatifs.

3.1.4 Système de visualisation de l'écoulement

La visualisation de l'écoulement constitue un problème complexe. En concertation avec les techniciens du Laboratoire des Constructions Hydrauliques de l'Université de Liège, la solution qui fut choisie consiste à placer des fils colorés à la surface de l'élément plan. Ces filaments se placeront dans le sens de l'écoulement rendant possible l'observation de l'écoulement du fluide autour du corps en translation.

3.2 Campagne d'essais

La campagne d'essais réalisée du mois de février au mois d'avril 2007 comporte trois grandes phases successives :

1. Des essais préliminaires à *effort contrôlé* et à vitesse constante pour évaluer l'intensité des phénomènes mis en jeu et établir un plan d'essais cohérent.
2. Une série d'essais avec les capteurs de pression central et latéral placés sur la face supérieure de l'élément plan. Les essais suivants sont réalisés :
 - (a) 2 séries de 15 essais à *effort contrôlé* avec des contrepoids de 20 kg et 30 kg.
 - (b) 1 série de 25 essais à vitesse constante dont sont extraits des groupes de résultats à 90 *mm/s* et 95 *mm/s* après dépouillement des données de mesures.
 - (c) 2 série de 3 essais à *effort contrôlé* sur une distance réduite de 160 mm successivement au fond du bassin puis en surface pour mettre en évidence l'influence de la surface libre.
3. Une série d'essais avec les capteurs de pression central et latéral placés sur la face inférieure de l'élément plan. Il est réalisé les essais suivants :
 - (a) 2 séries de 15 essais à *effort contrôlé* avec des contrepoids de 20 kg et 30 kg.
 - (b) 1 série de 25 essais à vitesse constante dont sont sortis des groupes de résultats à 90 *mm/s* et 95 *mm/s* après dépouillement des données de mesures.
 - (c) 2 série de 3 essais à *effort contrôlé* sur une distance réduite de 160 mm successivement au fond du bassin puis en surface pour mettre en évidence l'influence de la surface libre.
4. Une série d'essais sans capteur de pression mais avec le système de visualisation de l'écoulement :
 - (a) 2 essais à *effort contrôlé* avec des contrepoids de 20 kg et 30 kg.
 - (b) 1 essai à vitesse constante.

3.3 Essais à vitesse constante

Ce chapitre débute par la description des mesures brutes réalisées par le système de mesure présenté précédemment et se poursuit par une description de la manière dont nous utilisons ces mesures pour en déduire les variables physiques fiables et utiles à l'interprétation. Ensuite seulement, ces valeurs utiles sont commentées de manière complète et les principales interprétations sont présentées. L'essai étudié est une **translation verticale à 90 mm/s** réalisée grâce au système de manoeuvre présenté sur la figure 3.1 page 26.

3.3.1 Mesures expérimentales brutes

Grâce au système de mesure dont la présentation a été réalisée au paragraphe 3.1.3 page 28, nous obtenons l'évolution temporelle (figure 3.5) des mesures de pression totale sur la face considérée en deux points (dits *central* et *latéral*), l'évolution temporelle de la profondeur de la face considérée et l'évolution temporelle de la position de la surface libre au droit des capteurs de pression de l'élément plan. Ces valeurs de pression brutes n'ont que peu d'intérêt telles quelles car celles-ci sont largement dominées par la contribution hydrostatique. Néanmoins, il est montré dans les pages suivantes que ces mesures permettent de fournir toutes les grandeurs physiques utiles à l'interprétation du phénomène. La variation de surface libre est quant à elle directement utilisable pour l'interprétation. Néanmoins, son étude ne prend son plein sens que si on la compare avec la position du plan, sa vitesse et son accélération.

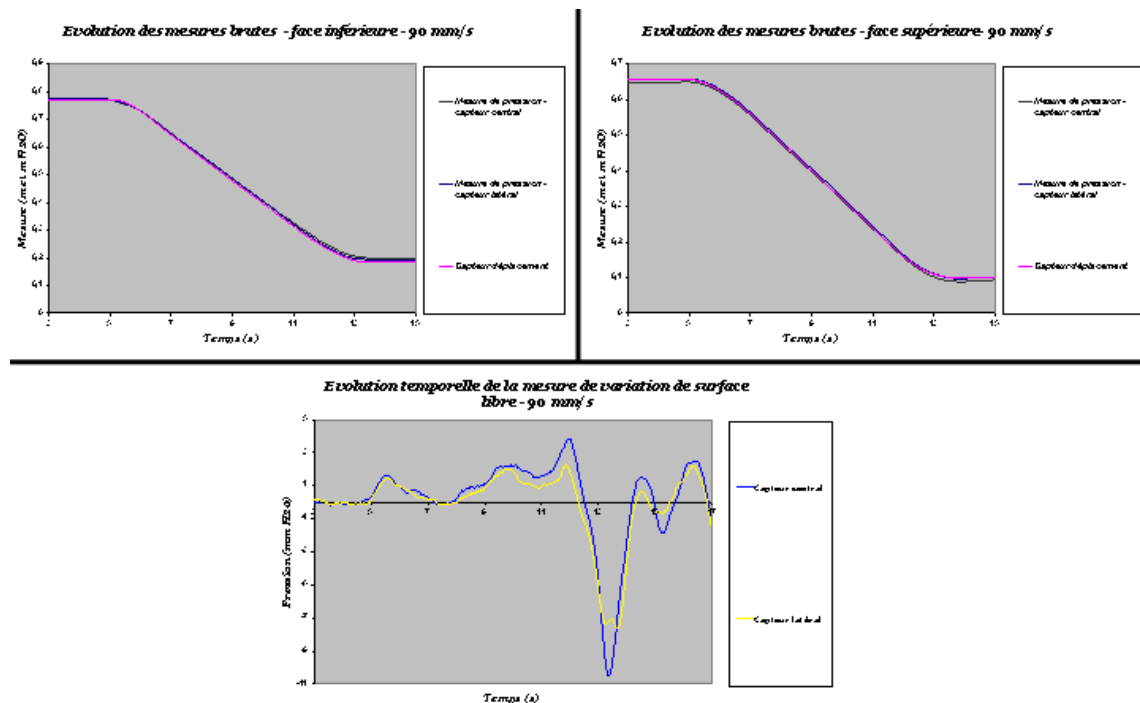


FIG. 3.5 – Évolution temporelle des mesures brutes fournies par les capteurs - essai à vitesse constante 90 mm/s

3.3.2 Exploitation statistique des mesures

Si la précision des capteurs détermine l'erreur des mesures expérimentales, il est démontrable que la variabilité dans les essais eux-mêmes (horizontalité de l'élément, vitesse,...) provoque également des erreurs dans les mesures. Puisque le dispositif expérimental disponible au laboratoire ne permet pas une répétabilité parfaite des essais, l'erreur sur les mesures risque d'être importante. Néanmoins, à défaut de pouvoir supprimer les erreurs, il est possible de trouver les bornes de cette erreur et réduire l'intervalle d'erreur par traitement statistique. C'est le sujet de l'annexe B.1 page XII. Cette théorie fournit un intervalle de certitude sur les espérances mathématiques des grandeurs physiques mesurées. On peut donc interpréter les mesures en connaissant le degré de certitude de nos conclusions.

Pour ce faire, un certain nombre d'essais sont réalisés (5 à 10). La moyenne des mesures sur plusieurs essais est calculée et l'intervalle de certitude sur la moyenne est obtenu grâce à la formule suivante :

$$\Delta [mm] = 1 + t_{\gamma}^{n-1} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{N}} \quad (3.1)$$

- où
- $\alpha = 1 - 2\gamma$ est le niveau de confiance souhaité
 - N est le nombre de mesures
 - $\hat{\sigma}^2$ est la variance empirique corrigée
 - \bar{x} est la moyenne
 - μ est l'espérance de la loi normale suivie par les variables mesurées
 - t_{γ}^{n-1} est le quantile d'ordre $1 - \gamma$ de la loi de student à $n-1$ degré de liberté

Tous les résultats donnés dans les paragraphes suivants sont donc présentés avec leur intervalle de certitude à 95 % et correspondent à la moyenne sur plusieurs essais. De ce fait, le lecteur peut se faire une idée de la validité des résultats.

3.3.3 Vitesse et accélération

Sur base de l'évolution temporelle de la profondeur, donnée par le capteur de déplacement, les évolutions temporelles de la vitesse et de l'accélération de la translation de l'élément plan (figure 3.6) sont obtenues par le biais des formules suivantes :

$$v_t = \frac{\text{profondeur}_{t-5*\Delta t} - \text{profondeur}_{t+5*\Delta t}}{10*\Delta t} \quad (3.2)$$

$$a_t = \frac{v_{t-5*\Delta t} - v_{t+5*\Delta t}}{10*\Delta t}$$

La forte variabilité de l'évolution de l'accélération est une conséquence de la grande sensibilité numérique de la formule (3.2) qui permet d'évaluer cette valeur. Une erreur de mesure faible entraîne en effet des variations fortes. Il est évident que ces variations n'ont pas de signification physique.

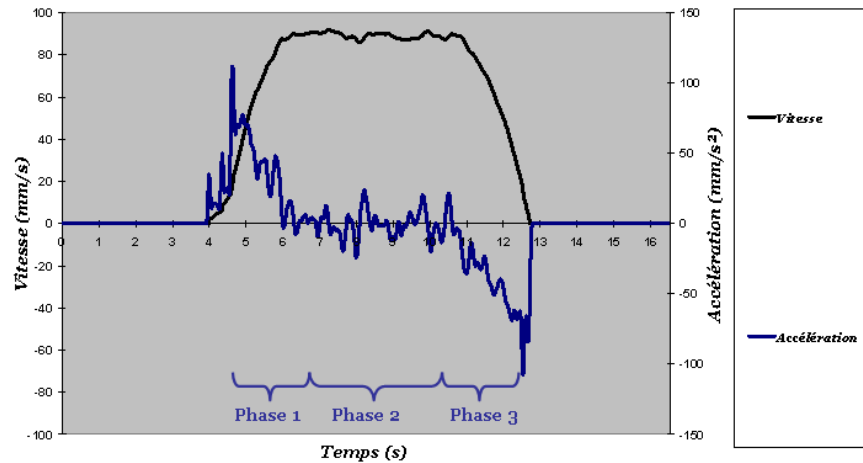


FIG. 3.6 – Évolution temporelle de la vitesse et de l'accélération - essai à vitesse constante 90 mm/s

Sur la figure 3.6, la translation se décompose clairement en trois phases successives :

- **Phase 1** Accélération depuis une vitesse nulle jusqu'à la vitesse maximale, le module de l'accélération étant décroissant.
- **Phase 2** Translation à vitesse constante, le module de l'accélération étant nul.
- **Phase 3** Décélération depuis la vitesse maximale jusqu'à une vitesse nulle, le module de l'accélération étant croissant.

3.3.4 Analyse de la variation de surface libre

Sur la figure 3.7, l'évolution de la vitesse de translation en fonction de la profondeur de la face supérieure de l'élément plan est mise en parallèle avec les variations du niveau de la surface libre. On observe une élévation sensible du niveau de surface libre suite à l'accélération initiale. Cette élévation très transitoire est rapidement modérée par propagation de l'onde de surface vers les extrémités du bassin. La surface libre revient alors à son niveau initial. L'impact de la translation à vitesse constante sur la surface libre varie avec la profondeur de l'élément plan. Pour des profondeurs importantes, la translation ne crée pas ou peu d'élévation de la surface libre. Par contre, plus la profondeur diminue, plus le niveau de la surface libre s'élève, atteignant un maximum lorsque l'élément plan affleure la surface libre. Notons que l'élévation de surface libre est légèrement perturbée par le train d'ondes de surface créées au préalable et qui se réfléchissent sur les parois avant de revenir au droit de l'élément plan en trois secondes. Enfin, la décélération crée une baisse du niveau de surface libre sous son niveau initial.

Puisque nous savons que la variation de surface libre correspond, en translation uniforme, à la charge nécessaire pour vaincre l'inertie du fluide, le graphe 3.7 correspond à la variation de la contribution de l'inertie à l'effort de traînée sur la face supérieure. La forte dépendance de ce terme à la profondeur est ainsi prouvée expérimentalement.

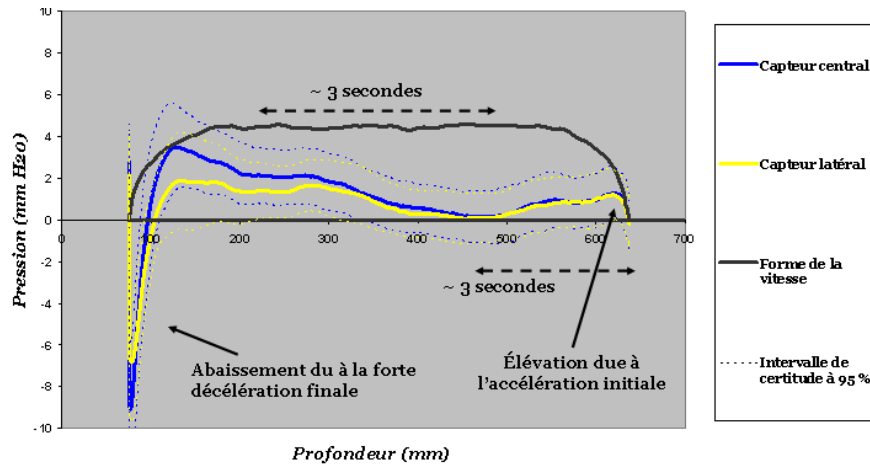


FIG. 3.7 – Évolution temporelle de la vitesse comparée à la variation de surface libre - essai à vitesse constante 90 mm/s

3.3.5 Pression de traînée et pression hydrodynamique

Sur base de l'ensemble des mesures brutes, deux grandeurs physiques utiles sont calculables. Pour cela, il suffit de décomposer comme suit la *pression totale* mesurée par les capteurs centraux et latéraux

- = la *profondeur* en mm H₂O, définie comme la différence entre le niveau du capteur et le niveau de la surface libre au repos et mesurée par le capteur déplacement.
- + la *pression de traînée* définie, sur la face inférieure et la face supérieure, comme la pression générée par l'écoulement inertiel sur les faces du corps.

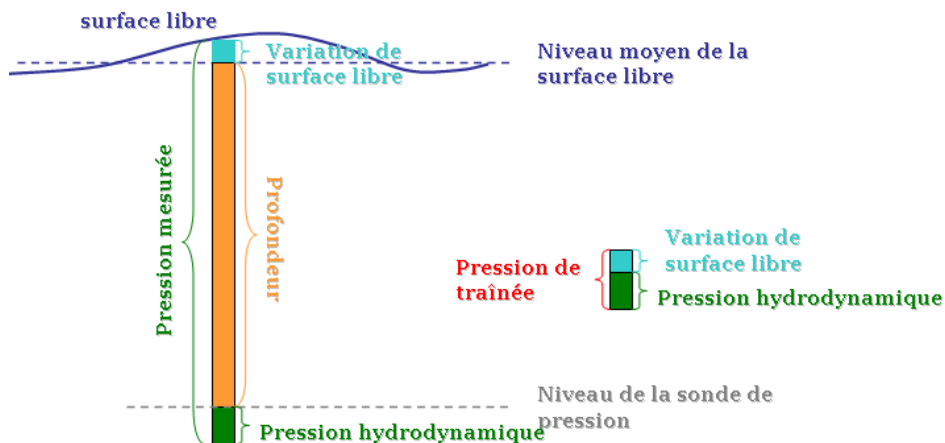


FIG. 3.8 – Contributions à la pression mesurée

La *pression de traînée* telle que définie par cette équation constitue le sujet de notre étude et mesure la somme de la contribution purement Bernouilli de la vitesse, de la contribution pour vaincre l'inertie d'éjection du fluide, de la contribution de l'accélération et enfin, uniquement pour la face supérieure, de la perte par propagation d'une onde de surface. La résultante de cette contribution de pression sur tout l'élément plan représente l'effort engendré par l'écoulement sur le corps en mouvement.

- La *pression de traînée* sur la face supérieure peut elle même être décomposée comme suit
- + la *variation de surface libre* définie comme l'incrément ou le décrétement de pression dû aux ondes de surface et mesuré par les deux capteurs de pression en surface et correspondant à la variation de la contribution de l'inertie à l'effort de traînée.
 - + la *pression hydrodynamique* définie comme la pression due aux phénomènes instationnaires non inertiels et aux pertes par propagation d'ondes de surface.

Mesure expérimentale de la *pression de traînée*

La figure 3.9 représente l'évolution temporelle des *pressions de traînée* calculée sur base des mesures d'essais à vitesse constante de 90 mm/s . Sur ce graphique sont représentées les valeurs relatives aux deux positions du capteur, centrale et latérale, pour les deux faces de l'élément plan.

Rappelons une nouvelle fois ici que la *pression de traînée* pour la face inférieure correspond à la contribution purement Bernouilli de la vitesse, la contribution pour vaincre l'inertie d'aspiration du fluide et la contribution de l'accélération. Pour la face supérieure, elle comprend en outre la perte de charge par propagation d'ondes de surface.

L'analyse qualitative des courbes relatives à la face supérieure montre que la pression augmente lors de la phase d'accélération jusqu'à une valeur de pression légèrement croissante durant la phase de translation à vitesse constante. Ensuite, une diminution relativement brusque vers une pression nulle accompagne la décélération de l'élément plan. Des pressions largement négatives apparaissent transitoirement à l'arrêt de la translation.

Les courbes de pression calculées pour la face inférieure présentent également un pic de pression atypique, mais au cours de la phase d'accélération de l'élément plan cette fois-ci. Cette pression négative intense disparaît quasi instantanément lorsque la vitesse atteint sa valeur maximum. La décélération s'accompagne d'une surpression beaucoup plus faible. Durant la phase de translation à vitesse constante, on observe une courbe de pression très agitée mais dont la valeur moyenne est légèrement négative. Un petit pic juste avant la dépression de décélération est observé sans que l'on en sache la cause.

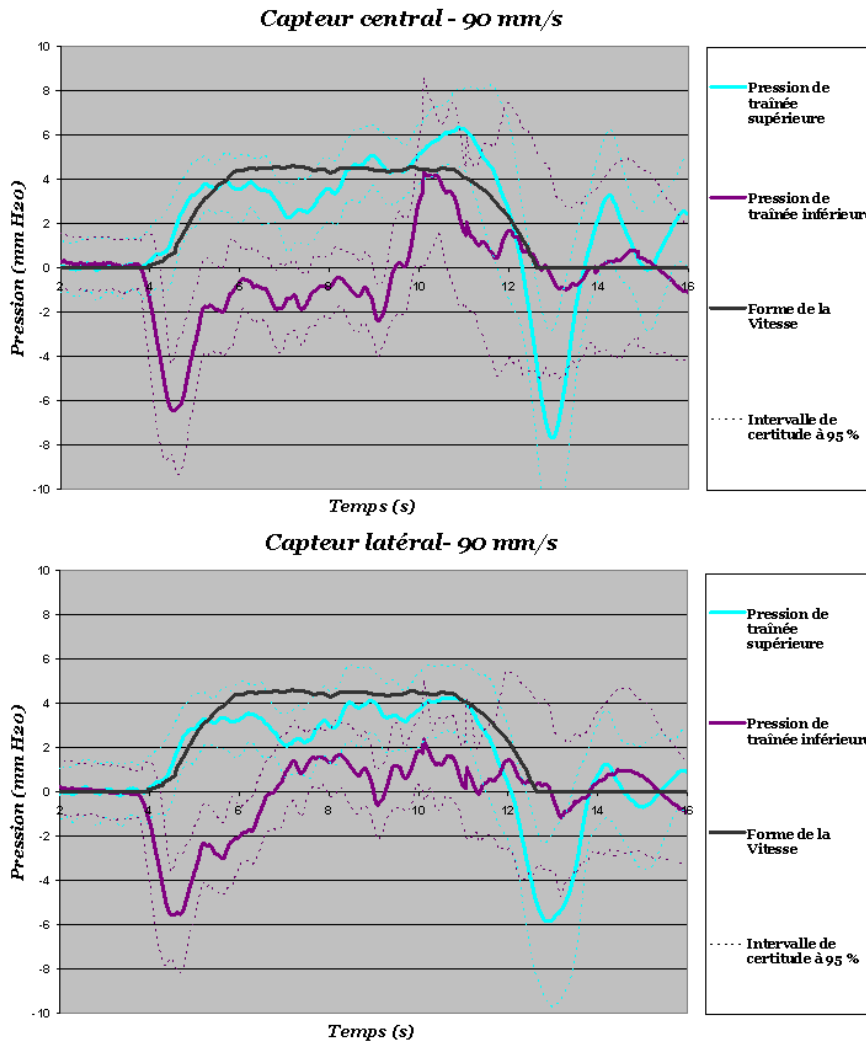


FIG. 3.9 – Évolution temporelle de la pression de traînée - essai à vitesse constante

Sur base du modèle simplifié présenté dans le chapitre 2 page 11, il est possible d'argumenter le comportement que nous observons. En effet, au démarrage du plan, l'épaisseur de fluide sous la plaque est faible. La contribution d'inertie pour aspirer le fluide est donc grande. Ce phénomène est amplifié par l'accélération de la plaque qui nécessite de créer une dépression supplémentaire pour mettre en mouvement tout le volume de traînée. Sur la face supérieure, c'est l'accélération qui constitue la contribution principale. Durant la translation à vitesse constante, la contribution d'inertie augmente progressivement pour la face supérieure et diminue pour la face inférieure. Enfin, lors de la décélération, les particules sous le plan sont arrêtées par contact avec la plaque. Au dessus du plan, la lame fluide est faible, donc la contribution d'inertie est très grande mais s'annule très vite à l'arrêt du plan. Ce phénomène est amplifié par la décélération et la possibilité qu'a le fluide de continuer à se mouvoir librement grâce à la surface libre.

Comparaison capteur central - capteur latéral

La figure 3.10 illustre l'évolution avec le temps des pressions de traînée aux deux capteurs successivement pour la face supérieure et la face inférieure. La comparaison des résultats relatifs à la face supérieure montre un comportement très proche des mesures. La forme des courbes est sensiblement identique. Néanmoins, la pression hydrodynamique mesurée au capteur latéral est très légèrement inférieure à celle du capteur central, sans que cette différence soit significative à 95 % de certitude. Il est à noter que la différence s'accroît de manière significative avec la profondeur.

Concernant la face inférieure, la différence entre les capteurs central et latéral est nettement plus sensible que pour la face supérieure. Si la forme des courbes reste analogue, l'intensité des pics de pression varie significativement. Ainsi, la valeur des extrema est moindre pour le capteur latéral que pour le capteur central.

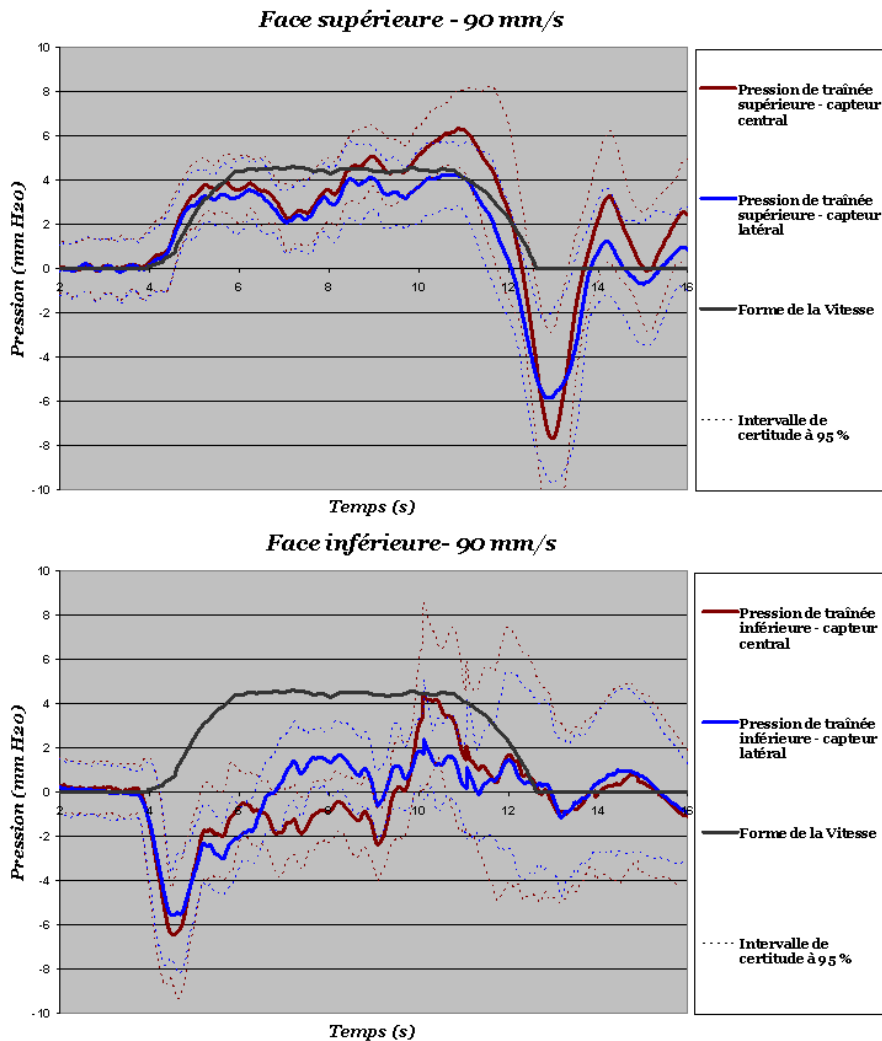


FIG. 3.10 – Comparaison de l'évolution de la pression de traînée au capteur central et latéral

Pression hydrodynamique théorique

Dans le chapitre 2 page 11 sont présentées des formules simplifiées relatives à un écoulement non inertiel. Ces formules, nous le savons, ne sont pas applicables dans le cadre de l'*hydrodynamique*. Il n'existe en effet pas d'énoncé simple du terme d'inertie, ni des pertes qu'il engendre par propagation d'ondes de surface.

Ces formules permettent néanmoins d'identifier approximativement deux contributions qui n'ont pas encore été étudiées explicitement. En effet, la différence entre les valeurs théoriques de la pression supérieure et les valeurs de la *pression hydrodynamique* réellement mesurées coïncide avec le surplus de charge que doit fournir le corps au fluide pour maintenir la surface libre au niveau de la charge inertielle. Autrement dit, cette différence correspond à la perte par propagation d'onde de surface. Pour la face inférieure, puisque le sol du bassin est fixe, la différence entre les valeurs théoriques de la pression supérieure et les valeurs de la *pression de traînée* réellement mesurées représente la charge inertielle elle-même.

Rappelons que la pression théorique est obtenue en tenant compte d'une contribution de la vitesse du corps comme en *aérodynamique* et d'une contribution de l'accélération du corps. La formulation ainsi obtenue s'écrit

$$p_{th} = c_p \rho \frac{v^2}{2} + K \rho e a \quad (3.3)$$

- où c_p $[-]$ est le coefficient de pression dont les valeurs, données par la figure A.5 page VII, sont 1 pour le capteur central et 0,8 pour le capteur latéral
- ρ $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$ est la masse volumique de l'eau
- v $\left[\frac{m}{s}\right]$ est la vitesse de translation de l'élément plan
- K $[-]$ est un coefficient de proportionnalité relatif à la notion de masse ajoutée (paragraphe 2.2.3 page 21) et valant très approximativement 1,5 pour le capteur central et 1 pour le capteur latéral
- e $[m^3]$ est l'épaisseur de l'élément plan
- a $\left[\frac{m}{s^2}\right]$ est l'accélération de translation de l'élément plan

Les valeurs obtenues sur base de cette formule sont représentées pour le capteur central sur la figure 3.11 où elles sont mises en comparaison avec les valeurs expérimentales. L'analyse de la pression sur la face supérieure montre que la contribution d'accélération à la pression est sensiblement bien représentée par la formule théorique. Par contre, dans le domaine à vitesse constante, il apparaît clairement que la pression est sous-évaluée par la formule théorique 3.11. Cet écart représente donc la pression à générer sur la face de l'élément pour alimenter la perte de charge due à la propagation d'ondes de surface.

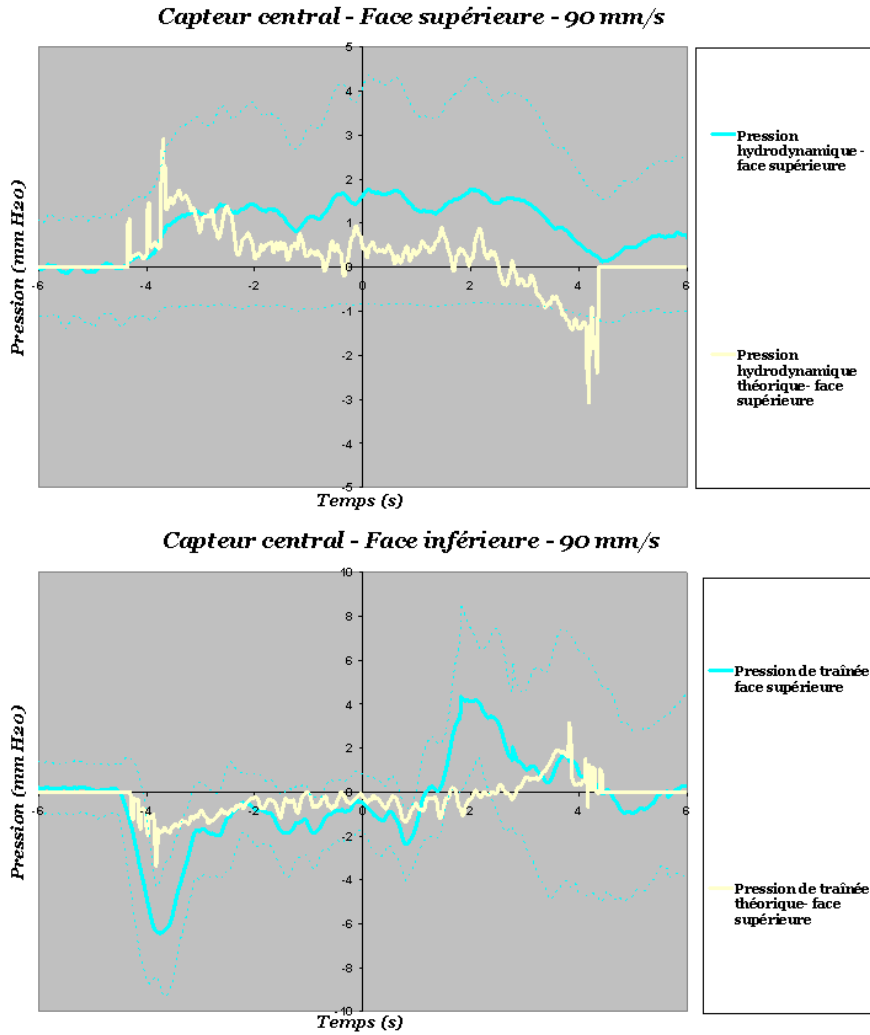


FIG. 3.11 – Évolution temporelle des valeurs de pression hydrodynamique théorique

Pour la face inférieure, nous constatons que l'extremum de pression généré lors de la phase de décélération de la translation de l'élément plan est relativement bien décrit par la formule simplifiée alors que le pic généré lors de l'accélération est largement sous-estimé. Le comportement dans la zone de mouvement uniforme est constant. Néanmoins, le petit pic de pression observé sur la mesure expérimentale n'est toujours pas expliqué et la valeur de la dépression est légèrement sous-estimée. La différence entre les deux courbes est bien évidemment la charge inertielle d'aspiration, grande au début et qui diminue avec la profondeur.

3.3.6 Coefficient de pression

La combinaison de la pression de traînée et de la vitesse de l'élément plan permet d'obtenir l'évolution du coefficient de pression $c_p = \frac{p_{traîne}}{\frac{1}{2}\rho v^2}$ (figure 3.12). En théorie (paragraphe 2.1 page 12), ce nombre adimensionnel ne dépend que des nombres de Froude et de Reynolds, ainsi que de la position sur l'élément considéré. Il est souvent élégant de mettre les résultats sous cette forme. En pratique, comme cela est représenté sur la figure 3.12, le coefficient de pression présente un comportement fortement chahuté. Les tentatives de l'auteur d'exprimer le coefficient de pression sous la forme (2.2) n'ont pas été couronnées de succès. En effet, cette formulation présuppose que le système complet se mette dans un état stable immédiatement. Autrement dit, il faut que l'information se transmette instantanément dans tout le système physique. Or, comme signalé dans le paragraphe 2.2.2 page 21, les charges transmises au fluide agissent sur l'écoulement avec parfois un retard. Le coefficient C_p représenté sur 3.12 dépend donc également de l'historique de l'écoulement !

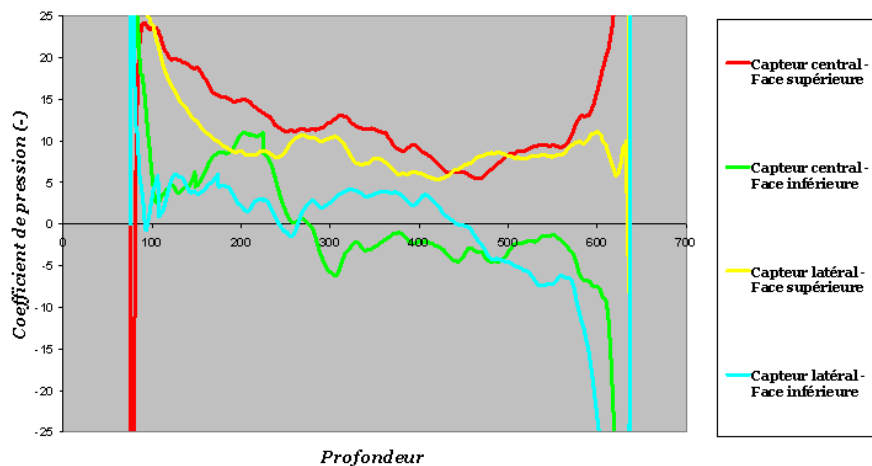


FIG. 3.12 – Évolution du coefficient de pression - essai à vitesse constante

3.3.7 Conclusion sur l'essai à vitesse constante

La réalisation des essais à vitesse constante permet de confronter, avec succès, le modèle phénoménologique présenté au chapitre 2 avec des résultats expérimentaux. Par contre, pour la grande majorité des courbes obtenues, l'intervalle de certitude reste grand vis-à-vis de l'intensité des phénomènes. Puisqu'il n'est pas possible de réduire fortement cet intervalle, il est cohérent de réaliser une série d'essais dans laquelle l'intensité des phénomènes mesurés est amplifiée. Pour ce faire, le mécanisme de manoeuvre est modifié et on utilise un contrepoids. Ce sont les *essais à effort contrôlé* qui fourniront des valeurs fiables pour la comparaison avec les résultats du modèle numérique.

3.4 Essais à *effort contrôlé*

Dans ce chapitre sont exposés les résultats de mesures relatives aux *essais à effort contrôlé*, réalisés grâce au dispositif de manoeuvre par contrepoids (paragraphe 3.1.2). L'approche statistique de traitement des résultats, exposée au paragraphe 3.3.2, est toujours appliquée. La réalisation de ces expérimentations poursuit trois objectifs majeurs :

1. Comparer les mesures de pression sur les faces de l'élément à l'effort de relèvement réellement développé par le dispositif de manoeuvre.
2. Augmenter l'intensité des pressions agissant sur les faces de l'élément en relevant le plan à vitesse élevée.
3. Diminuer la taille de l'intervalle de certitude à 95 % grâce à un dispositif expérimental présentant des bonnes caractéristiques de répétabilité.

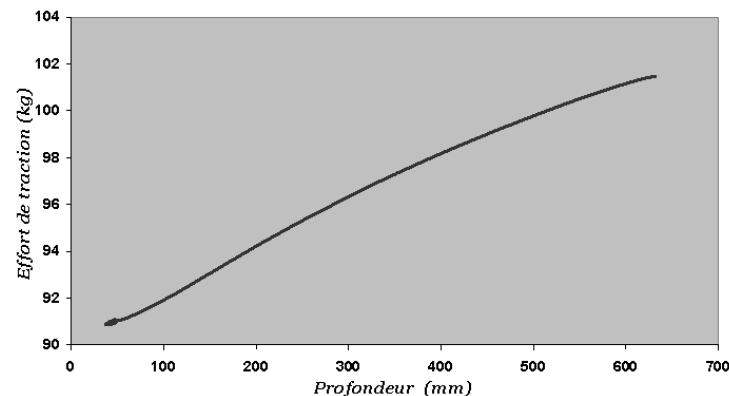


FIG. 3.13 – Evolution avec la profondeur de l'effort de traction sur l'élément plan - essai à *effort contrôlé*

L'essai étudié est une translation verticale réalisée grâce à un poids de 29,3 kg qui permet de développer l'effort de traction représenté sur la figure 3.13.

3.4.1 Vitesse et accélération

Par application de la formule (3.2) sont dérivées les évolutions temporelles de la vitesse et de l'accélération de la translation de l'élément plan (figure 3.14). Comme signalé précédemment, la forte variabilité de l'évolution de l'accélération est une conséquence de la grande sensibilité numérique de la formule (3.2). Il est évident que ces variations n'ont pas de signification physique.

Sur la figure 3.14, la translation se décompose clairement en trois phases successives :

- **Phase 1** Accélération depuis une vitesse nulle jusqu'à la vitesse maximale, le module de l'accélération atteignant rapidement un maximum avant de décroître plus lentement.
- **Phase 2** Décélération depuis la vitesse maximale jusqu'à une vitesse nulle, le module de l'accélération passant par un maximum assez intense.

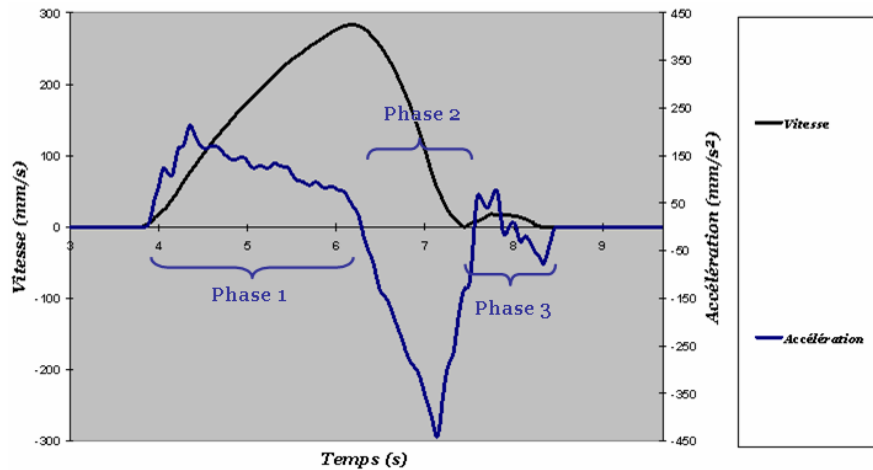


FIG. 3.14 – Évolution temporelle de la vitesse et de l'accélération - essai à *effort contrôlé*

- **Phase 3** Une zone de rebond où l'élasticité de la corde d'arrêt permet un certain mouvement de l'élément plan.

Quantitativement, la vitesse atteint l'intensité non négligeable de 285 mm/s.

3.4.2 Variation de surface libre

La figure 3.15 représente l'évolution de la variation de surface libre en fonction du temps et de la profondeur. L'étude de ces courbes montre clairement que l'intensité des phénomènes est largement supérieure aux effets générés par la translation à vitesse constante (paragraphe 3.3 page 32). L'élévation subite lors de la mise en mouvement du plan apparaît à nouveau. Ce pic atteint 5,2 mm H₂O, soit 4 fois plus que le pic observé à vitesse constante. La surface libre ne revient plus à son niveau initial après ce pic initial car l'accélération reste positive après le sursaut initial. Néanmoins, on observe une diminution du taux d'élévation de la surface libre. Ceci s'explique par la baisse de l'intensité de l'accélération (changement de courbure dans le graphe de vitesse) sans que celle-ci s'annule.

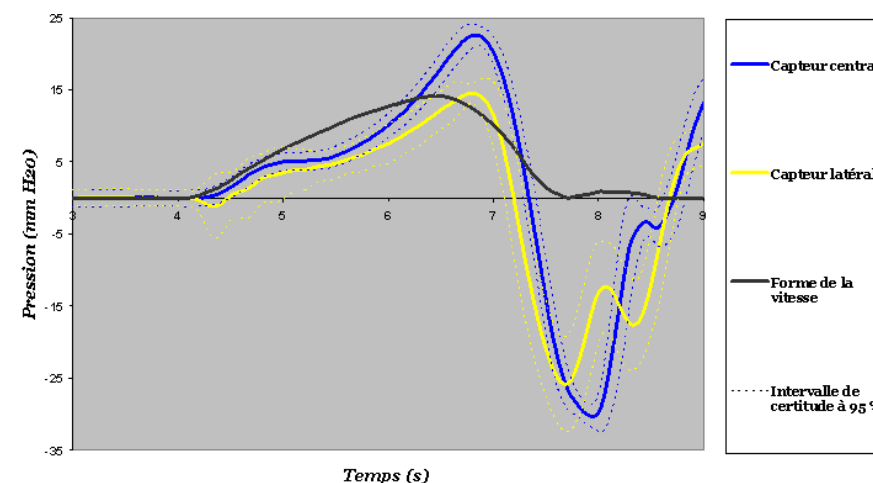


FIG. 3.15 – Evolution de la variation de surface libre - Essai à *effort contrôlé*

Le fait marquant dans l'étude de l'évolution de la surface libre est l'augmentation du niveau à un taux inversement proportionnel à la profondeur. Plus l'élément plan s'approche de la surface, plus le niveau de celle-ci augmente rapidement. D'ailleurs, l'élévation se poursuit alors même que l'accélération devient négative! Le maximum du niveau de la surface libre, ainsi observé avec un certain retard sur l'extremum de la vitesse, atteint la valeur de $22,6 \text{ mm } H_2O$ pour le capteur central et $14,5 \text{ mm } H_2O$ pour le capteur latéral. Lors de l'arrêt de l'élément plan, une diminution très intense du niveau de la surface se produit et atteint $-30,25 \text{ mm } H_2O$ pour le capteur central et $-25,827 \text{ mm } H_2O$ pour la capteur latéral. La comparaison des résultats relatifs aux capteurs centraux et latéraux montre de nouveau la grande différence des valeurs atteintes. La surface libre prend une forme de cloche au droit de l'élément plan.

L'ensemble de ces observations est expliqué à nouveau comme la manifestation de deux phénomènes. Premièrement, l'accélération du plan fournit une composante verticale à la vitesse des particules entraînant une élévation de la surface libre. Secondement, la nécessité d'augmenter la charge dans le fluide surmontant le plan pour vaincre l'inertie de l'écoulement provoque un déséquilibre des pressions au niveau de l'interface qui implique une élévation de la surface libre. De plus, il est clairement observé que, approximativement, l'inertie est inversement proportionnelle au carré de la profondeur. Enfin, le retard observé entre l'extremum de la vitesse et celui du niveau de surface libre est une nouvelle manifestation de l'*effet mémoire* et de la forte inertie de l'écoulement.

3.4.3 Pression *de traînée* et pression *hydrodynamique*

Mesures expérimentales de la pression *de traînée*

La figure 3.16 représente l'évolution temporelle des pressions *de traînée* calculées sur base des mesures d'essais à *effort contrôlé*. Sur ce graphique sont représentées les valeurs relatives aux deux positions du capteur, centrale et latérale, pour les deux faces de l'élément plan.

L'analyse qualitative des courbes relatives à la face supérieure montre que la pression *de traînée* augmente assez brutalement lors de l'accélération initiale. Cette élévation se poursuit ensuite avec un taux de croissance plus faible mais qui reste largement positif. Le maximum de pression *de traînée* est atteint avec un certain retard sur le maximum de vitesse. Ceci constitue évidemment une preuve supplémentaire de la forte inertie que présente l'écoulement induit par la translation du corps. Enfin, au cours de la décélération et de l'arrêt du plan, une dépression très intense et hautement transitoire est une nouvelle fois observée sur la face supérieure. Celle-ci correspond évidemment à la création d'une charge négative nécessaire pour ralentir le fluide en mouvement. Cette charge négative est amplifiée par la condition d'équilibre des pressions imposée au niveau de la surface libre.

Les courbes de pression *de traînée* calculées pour la face inférieure montrent deux pics de pressions caractéristiques. Au départ, une dépression importante apparaît subitement.

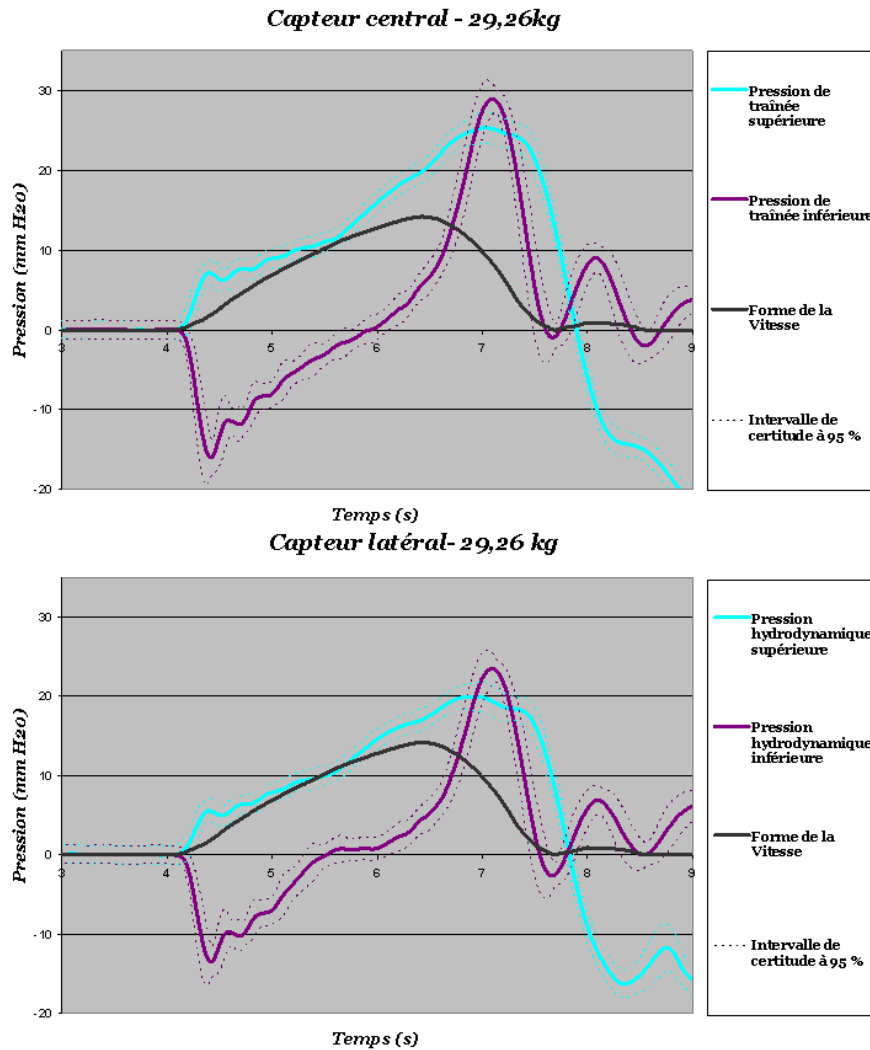


FIG. 3.16 – Évolution temporelle des pressions *de traînée* - Essai à *effort contrôlé*

Puisque cette dépression n'est pas observé dans les essais à vitesse constante, elle est imputée à l'accélération du plan amplifiée par la présence du fond du bassin. A partir de cet extremum, la courbe de pression croît plus ou moins régulièrement jusqu'à une valeur nulle un peu avant que le plan n'atteigne son maximum de vitesse. Cette croissance prouve expérimentalement que, pour la face inférieure, le terme d'inertie diminue au fur et à mesure que l'on s'éloigne du fond du bassin. Enfin, dès que le corps en translation décélère, une pression positive apparaît et augmente pour ralentir le fluide dans son mouvement d'ascension vertical.

Comparons la position des extrema atteints lors de l'arrêt de la translation sur les capteurs central et latéral. Le sommet positif observé sur la face inférieure est atteint beaucoup plus tôt que la dépression de la face supérieure. Cette observation constitue une nouvelle preuve expérimentale que le fluide présente une forte inertie, mais également que la surface libre joue un rôle de stockage temporaire de charge hydrodynamique. Enfin, l'étude quantitative de ces résultats met en évidence que l'intervalle de certitude à 95 % atteint une valeur acceptable par rapport à l'intensité des grandeurs physiques mesurées.

Comparaison capteur central-capteur latéral

La figure 3.17 illustre l'évolution avec la profondeur des pressions *de trainée* aux deux capteurs successivement pour la face supérieure et la face inférieure. La comparaison des résultats relatifs à la face supérieure montre un comportement très proche des mesures. La totalité des conclusions relatives aux essais à vitesse constante est généralisable aux essais à *effort contrôlé*. La forme des courbes est sensiblement identique. Néanmoins, en valeur absolue, la pression mesurée au capteur latéral est très légèrement inférieure à celle du capteur central et cette différence devient significative à 95 % de certitude. Il est à noter que la différence s'accroît au fur et à mesure que l'on s'approche de la surface libre pour la face supérieure et l'inverse pour la face inférieure.

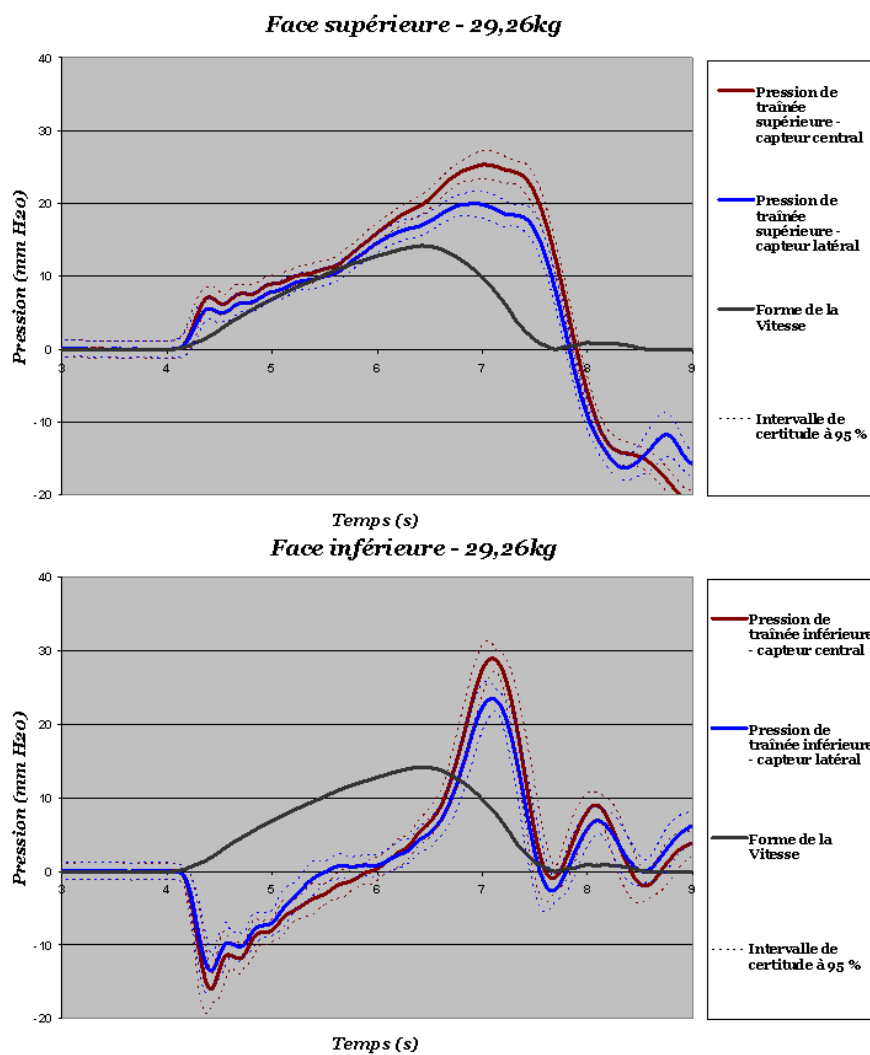


FIG. 3.17 – Comparaison de l'évolution de la pression *de trainée* aux capteurs central et latéral - essai à *effort contrôlé*

Pression hydrodynamique théorique

La formulation 3.3, établie au paragraphe 3.3.5 page 39, permet d'obtenir une approximation relative à un écoulement non inertiel. Ces formules ne sont pas applicables dans le cadre de l'*hydrodynamique* car la perte par propagation d'onde de surface n'est pas prise en compte. Il faut donc s'attendre à une différence entre la valeur théorique et la valeur mesurée !

Les valeurs théoriques ainsi obtenues sont représentées pour le capteur central sur la figure 3.11. Elles sont mises en comparaison avec les valeurs expérimentales utiles, c'est à dire *pression hydrodynamique* pour la face supérieure et la *pression de traînée* pour la face inférieure .

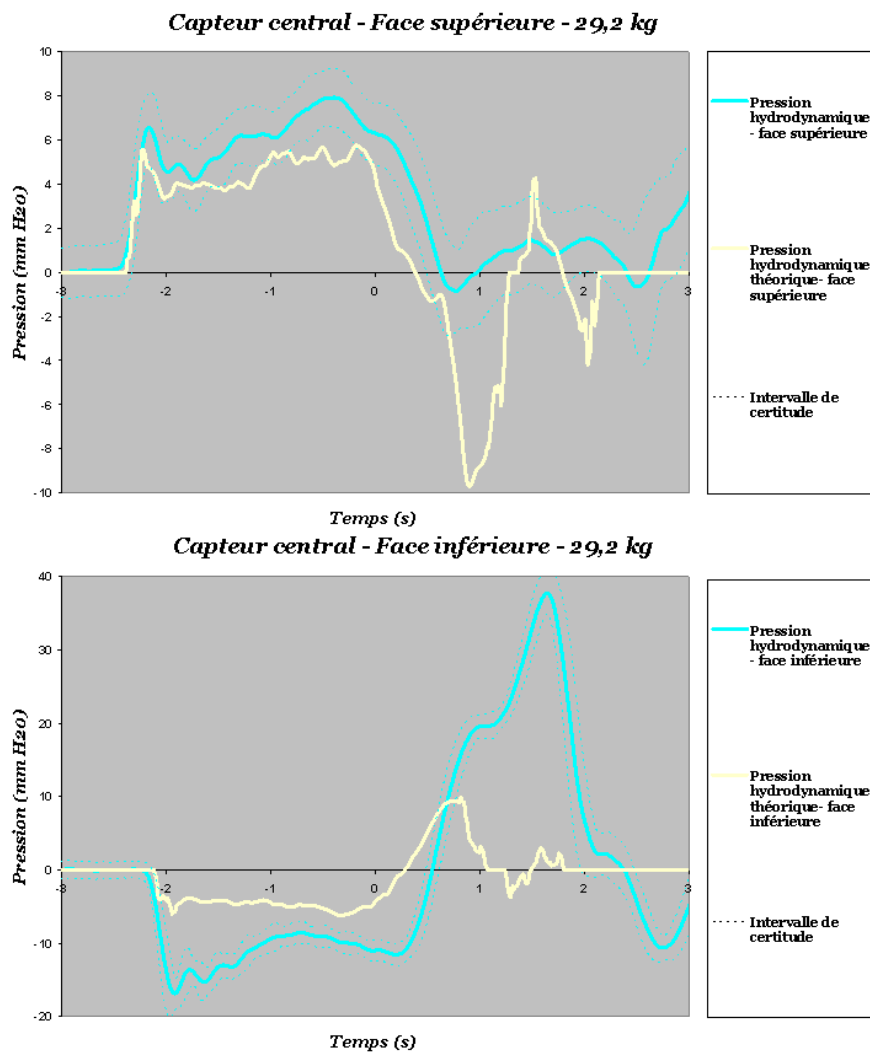


FIG. 3.18 – Évolution temporelle de la pression théorique - essai à *effort contrôlé*

L'analyse de la pression sur la face supérieure montre que la contribution d'accélération à la pression est sensiblement bien représentée par la formule théorique pour le départ mais largement surestimée lors de l'arrêt. Il est également constaté que la différence entre les deux courbes s'accroît plus la surface libre se rapproche. Cette observation est aisément expli-

cable. En effet, le rapprochement du corps en mouvement vers la surface libre s'accompagne d'une augmentation de l'élévation de la surface libre. Si les ondes générées présentent une plus grande amplitude, la perte générée par les ondes de surface augmente.

Pour la face inférieure, la différence entre les deux courbes exprime la surcharge nécessaire pour vaincre l'inertie d'aspiration du fluide. Néanmoins, puisque l'écart est maximum au départ et à l'arrêt du plan, il semble cohérent d'affirmer que le coefficient K utilisé pour calculer la contribution d'accélération est sous-estimé.

Enfin, on constate un retard du pic final mesuré vis-à-vis du pic théorique. Ce retard est à mettre en parallèle avec la remarque faite au paragraphe B.2.2 relative à la surface libre. Il y est dit que la surface libre atteint son niveau maximum avec un certain retard sur l'extremum de vitesse. La conclusion à ces deux remarques est que l'inertie du fluide et la capacité de stockage de charge de la surface libre créent un effet *mémoire* des phénomènes. Ainsi, le fluide ne réagit pas tout de suite aux changements induits sur l'élément plan.

Comparaison de l'effort de manoeuvre mesuré et généré

Un des objectifs poursuivis lors de la réalisation d'essais à *effort contrôlé* est de vérifier que l'effort appliqué par l'écoulement sur l'élément plan et mesuré par l'intermédiaire des sondes de pression reste cohérent avec l'effort de manoeuvre réellement généré. Pour ce faire, il convient d'évaluer les efforts de manoeuvre à partir des paramètres connus, à savoir la pression en des points discrets, l'évolution de la profondeur et le poids du contrepois. Il n'est pas possible et pas utile de rentrer ici dans les détails du raisonnement qui est somme toute relativement simple. C'est pourquoi le principe de calcul et les formules sont résumées sur la figure 3.19

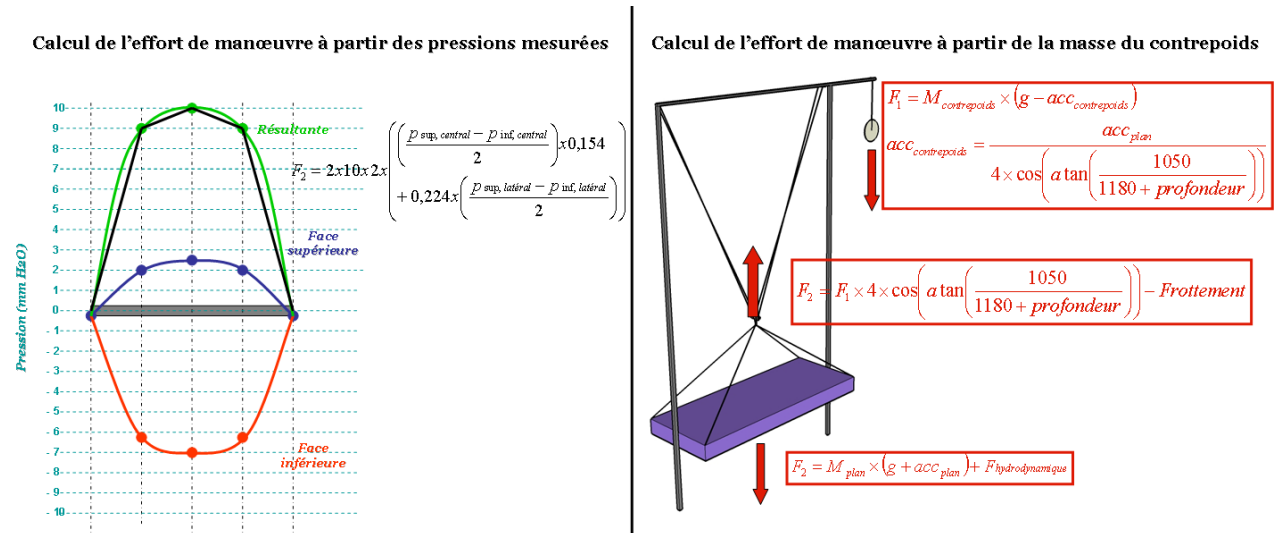


FIG. 3.19 – Principe du calcul des efforts générés

Par application de ces deux formules et en supposant que la perte par frottement est de 20 kg, il est possible de tracer les courbes de la figure 3.20. Il faut noter que les formules utilisées ne sont valables que lorsque le contrepoids est libre de tout mouvement, si bien qu'un intervalle de validité est défini sur la courbe. On constate que la forme générale est correcte. Notre approche est donc validée par cette vérification.

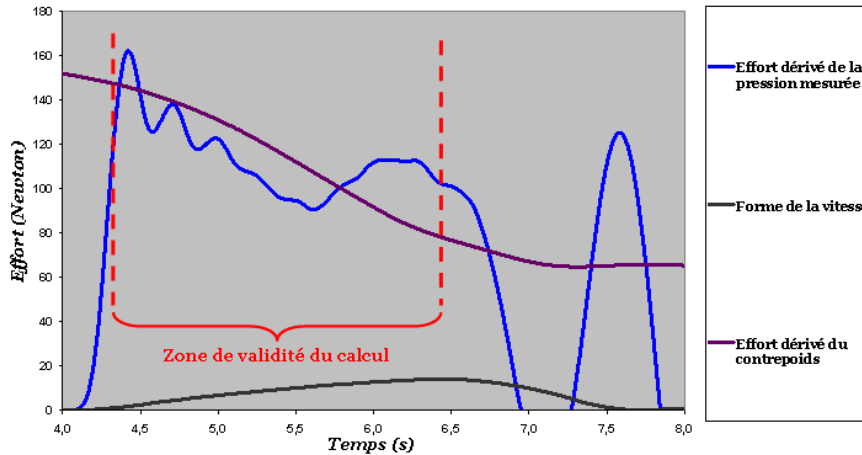


FIG. 3.20 – Comparaison de l’effort de manoeuvre généré par le contrepoids et mesuré par la sonde de pression

3.4.4 Coefficient de pression

La combinaison de la pression de traînée et de la vitesse de l’élément plan permet d’obtenir l’évolution du coefficient de pression $c_p = \frac{p_{traînée}}{\frac{1}{2}\rho v^2}$ (figure 3.12). En théorie (paragraphe 2.1 page 12), ce nombre adimensionnel ne dépend que des nombres de Froude et de Reynolds, ainsi que de la position sur l’élément considéré. Il est souvent élégant de mettre les résultats sous cette forme.

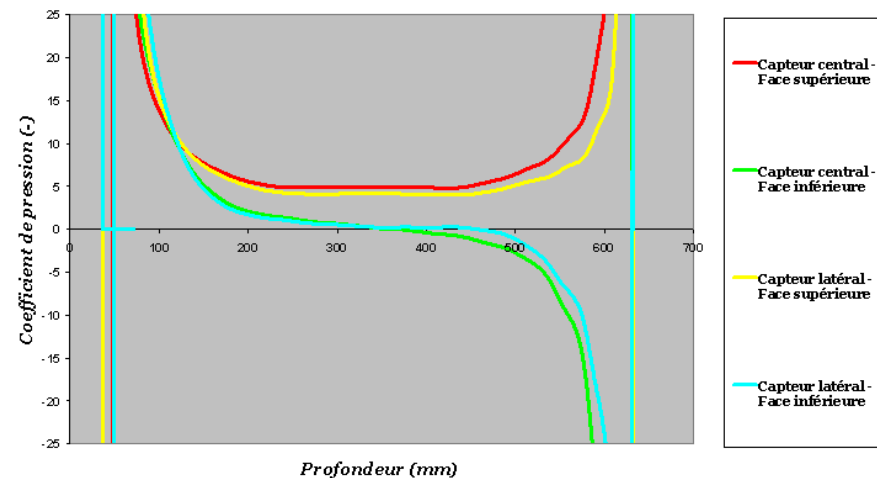


FIG. 3.21 – Evolution temporelle du coefficient de pression C_p - Essai à *effort contrôlé*

En pratique, comme cela est représenté sur la figure 3.12, le coefficient de pression présente un comportement fortement chahuté. Les tentatives de l'auteur d'exprimer le coefficient de pression sous la forme (2.2) n'ont ainsi pas été couronnées de succès. En effet, cette formulation présuppose que le système complet se mette immédiatement dans un état stable. Autrement dit, il faut que l'information se transmette instantanément dans tout le système physique. Or, comme signalé dans le paragraphe 2.2.2 page 21, les charges transmises au fluide agissent sur l'écoulement avec parfois du retard. Le coefficient C_p représenté sur 3.12 dépend donc également de l'historique de l'écoulement !

3.4.5 Conclusion sur l'essai à *effort contrôlé*

La réalisation des essais à *effort contrôlé* permet de confronter, de nouveau avec succès, le modèle phénoménologique présenté au chapitre 2 avec des résultats expérimentaux. Ceci confirme donc la validation déjà réalisée à vitesse constante.

En outre, les *essais à effort contrôlé* fournissent des valeurs fiables pour la comparaison avec les résultats du modèle numérique. Il est en effet observé sur les courbes des paragraphes précédents que l'intervalle de certitude à 95 % sur les grandeurs physiques est acceptable vis-à-vis de l'intensité des grandeurs mesurées et des hypothèses faites.

3.5 Influence de la surface libre

L'objectif de cette partie est de mettre en évidence l'influence de la surface libre sur l'effort de traînée. Pour ce faire, il a été opéré à deux séries d'essais à *effort contrôlé* de courte distance (environ 170 mm de translation verticale), l'une proche de la surface libre et l'autre le plus profondément possible. Le contreponds a été calculé de manière à ce que l'effort de traction soit très proche dans les deux séries d'essais.

3.5.1 Vitesse et accélération

La figure 3.22 montre l'évolution en fonction de la profondeur de l'effort de traction et de la vitesse atteinte par l'élément plan sous cet effort de traction. On observe clairement que l'effort est sensiblement identique pour les essais en surface et en profondeur. De même, les courbes de vitesse offrent une forme analogue. Néanmoins, on constate que la vitesse atteinte lors de l'essai en surface, à effort quasi identique, est nettement plus faible. La différence atteint, au maximum des vitesses, 25 mm/s. En conclusion, **si on exerce un effort identique sur un élément plan, sa vitesse est moindre s'il est proche de la surface libre**. Autrement dit, à vitesse et accélération identiques, l'effort de traînée sur un élément plan est moindre si la surface libre est éloignée. Cette différence constitue la principale mise en évidence du rôle actif de la surface libre sur l'effort de traînée (i.e. de la perte par propagation d'ondes de surface).

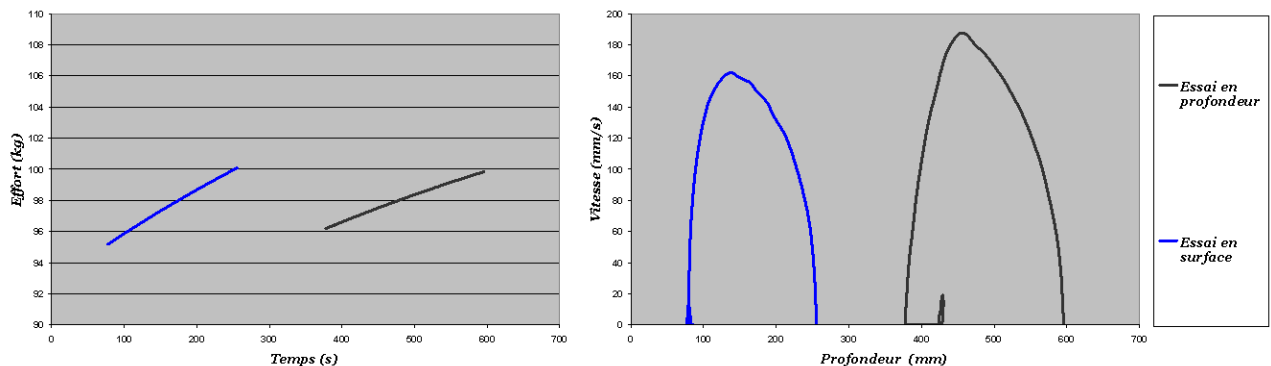


FIG. 3.22 – Comparaison de l'évolution de la vitesse et de l'effort de traction

3.5.2 Variation de surface libre

La figure 3.23 illustre l'évolution temporelle du niveau de la surface libre pour les deux séries d'essais, en surface et en profondeur. Sans grande surprise, les ondulations induites par l'essai en surface sont largement supérieures en amplitudes que celles induites par l'élément plan en profondeur. Puisque l'on sait que la variation de surface libre correspond à la charge nécessaire pour vaincre l'inertie de l'eau, le résultat théorique $inertie \div \frac{1}{profondeur^2}$ est expérimentalement mis en évidence.

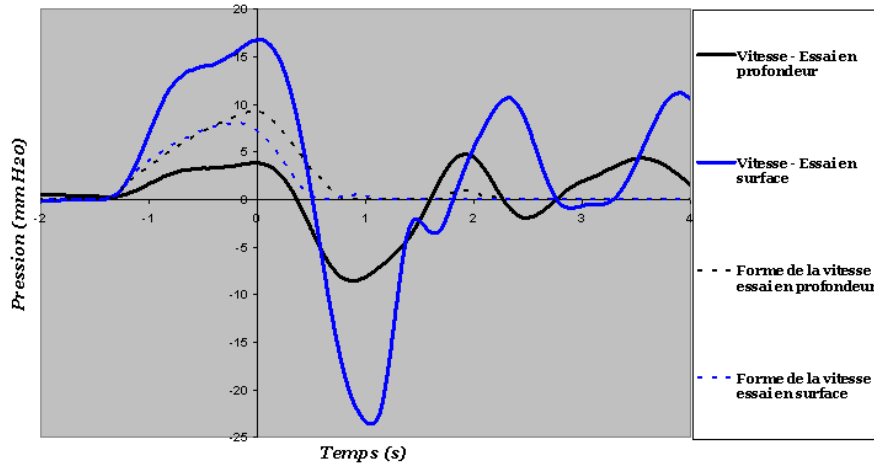


FIG. 3.23 – Comparaison des variations temporelles de surface libre - capteur central

3.5.3 Pression de traînée

L'évolution temporelle de la pression hydrodynamique totale, définie comme la différence entre la pression hydrodynamique sur la face supérieure et la pression hydrodynamique sur la face inférieure, est représentée sur la figure 3.24. Comme attendu, les deux courbes sont analogues et presque de même intensité. Cette concordance est une conséquence directe du choix de réaliser des essais à effort identique. Puisque la force développée pour la traction est identiques et le poids de l'élément identique, l'effort exercé par le fluide sur la porte doit être identique. Cependant, pour cet effort identique, la vitesse et l'accélération de la porte ne sont pas identiques. Un effort donné permet donc à l'élément plan d'atteindre une vitesse moindre s'il se trouve en surface que s'il se trouve en profondeur.

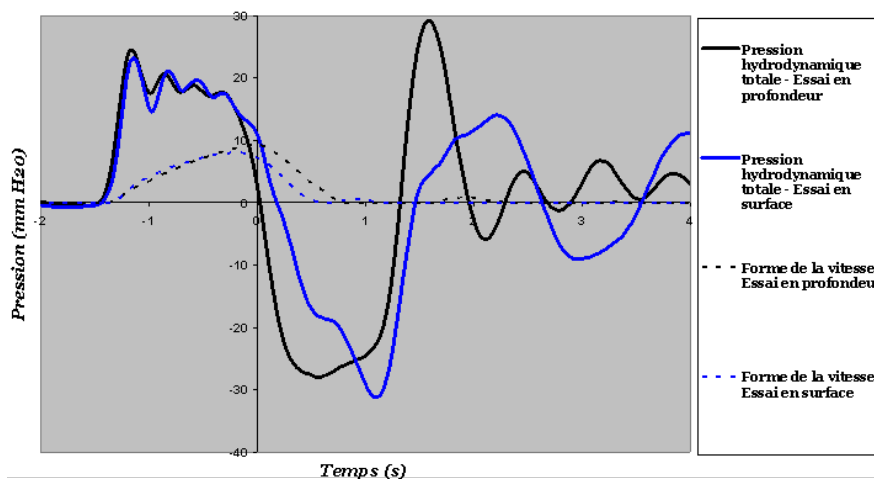


FIG. 3.24 – Comparaison de l'évolution temporelle des pressions hydrodynamiques totales - capteur central

En outre, lors de l'essai en surface, il est observé un retard dans l'apparition du pic de dépression à l'arrêt de l'élément plan. L'explication se trouve dans la capacité de stockage de charge de la surface libre

Troisième partie

Contribution mathématique à la résolution numérique des écoulements verticaux à surface libre

CHAPITRE 4

SOLVEUR NAVIER-STOKES INCOMPRESSIBLE

The pressure is a somewhat mysterious quantity in incompressible flows. It is not a thermodynamic as there is no equation of state for an incompressible fluid. It is in one sense a mathematical artefact - a Lagrange multiplier that constrains the velocity field to remain divergence-free (i.e incompressible) - yet its gradient is a relevant physical quantity : a force per unit volume.

P. M. Gresho and R. L. Sani

Sommaire

4.1	Mise en équation	55
4.2	Principes de résolution	57
4.2.1	Méthode itérative implicite	57
4.2.2	Fonction de courant et de vorticité	57
4.2.3	Méthode de la compressibilité artificielle	58
4.2.4	Méthode des projections	58
4.2.5	Méthode <i>Gauge</i>	59
4.3	Méthode des projections	60
4.3.1	Méthode des variables primitives	60
4.3.2	Méthode des variables primitives - approche <i>multistep</i>	64
4.3.3	Méthode des variables intermédiaires - approche <i>multistep</i>	68
4.4	<i>Gauge</i> methode	70
4.4.1	Principe	70
4.4.2	Résolution	71
4.4.3	Comparaison avec la méthode des projections	72
4.5	Schémas proposés	73

4.1 Mise en équation

Afin d'établir les équations régissant l'écoulement isotherme d'un fluide incompressible tel que l'eau, seuls deux principes physiques sont utilisés. Les applications successives du **principe de conservation de la masse** et du **principe de conservation de la quantité de mouvement** fournissent les équations conservatives suivantes [Piroton,2001,page 159] :

$$\begin{cases} \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0 \\ \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \left(\underline{v} \otimes \underline{v} + \frac{1}{\rho} p \underline{I} - \underline{\underline{\tau}} \right) = \underline{F} \end{cases} \quad (4.1)$$

où $\rho = 10000 \left[\frac{N}{m^2} \right]$ est la masse volumique de l'eau supposée constante
 $\underline{v} = v_i(x, y, z, t) \quad i = 1..3$ est le vecteur vitesse
 $p(x, y, z, t)$ est le scalaire représentant la pression
 $\underline{\underline{\tau}}$ représente le tenseur de tension de cisaillement visqueuse
 \underline{F} est le vecteur des forces volumiques

Dans le cadre de cette étude, diverses approximations sont nécessaires afin de traiter les équations 4.1 de manière cohérente et optimale. La première approximation consiste à utiliser les **équations moyennées de Reynolds** [Piroton,2001,page 166]. Si les tensions de Reynolds $\tau^R = -\underline{v}'' \otimes \underline{v}''$ sont supposées nulles, la forme du système 4.1 reste identique mais les variables $\underline{v}, p, \underline{F}$ représentent des variables moyennées sur un intervalle de temps $[-T/2; T/2]$. Il est bien évident que les méthodes présentées dans les pages suivantes peuvent être couplées à un modèle de turbulence¹.

Puisque l'eau est un fluide Newtonien, la tension de cisaillement visqueuse prend la forme bien connue suivante :

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad (4.2)$$

En insérant la forme 4.2 dans le système d'équations 4.1, nous obtenons la forme classique des équations de Navier-Stokes non-conservatives :

$$\begin{cases} \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0 \\ \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) \underline{v} = \frac{1}{\rho} \underline{\nabla} p + \nu \Delta \underline{v} + \underline{F} \end{cases} \quad (4.3)$$

où μ est la viscosité dynamique ou de cisaillement du fluide
 $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ est la viscosité du fluide

¹Pour plus de détails, le lecteur se référera à la littérature spécialisée sur la turbulence, et en particulier, [Piroton,2001,chapitre IV]

En introduisant les conditions aux limites et les conditions initiales, le problème bien posé devient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0 & \forall \underline{x} \in \Omega \\ \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \underline{\nabla} \cdot \underline{p} = -\underline{\nabla} \cdot (\underline{v} \otimes \underline{v} - \nu \underline{\nabla} \underline{v}) + \underline{F} & \forall \underline{x} \in \Omega \\ \underline{v} = \underline{v}_b(\underline{x}, t) & \forall \underline{x} \in \partial\Omega \\ \text{avec } \int_{\Gamma} \underline{n} \cdot \underline{v}_b = 0 & \\ \\ \underline{v}(\underline{x}, 0) = \underline{v}_0(\underline{x}) & \forall \underline{x} \in \Omega \oplus \Gamma \\ \text{avec } \underline{\nabla} \cdot \underline{v}_0 = 0 & \forall \underline{x} \in \Omega \\ \text{avec } \underline{n} \cdot \underline{v}_0 = \underline{n} \cdot \underline{v}_{b,0} & \forall \underline{x} \in \Omega \end{array} \right. \quad (4.4)$$

où Ω est le domaine de calcul

Γ est la frontière du domaine de calcul

Il apparaît assez intuitivement que la seule force volumique qu'il est nécessaire d'envisager est la force de gravité si bien que $\underline{F} = \rho \underline{g} = (0, 0, \rho g)^T$. De plus, il importe de souligner qu'il ne faut pas imposer de conditions aux limites sur la pression p pour un écoulement incompressible. Les conditions aux limites sur la vitesse permettent de déterminer à la fois le champ de vitesse et le champ de pression.

4.2 Principes de résolution

Cinq méthodes de résolution sont envisageables pour traiter le système d'équations (4.4). Dans ce paragraphe, leur principe est rapidement décrit, ainsi que leurs principaux avantages et désavantages.

4.2.1 Méthode itérative implicite

La première méthode [Studer,2006,page 2], la plus intuitive, consiste à mettre le système (4.4) sous une forme quasi-linéaire. Pour simplifier, la discrétisation sera limitée à une discrétisation du terme temporel à l'aide du schéma d'Euler semi-implicite :

$$\begin{cases} \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0 \\ \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) \underline{v} = -\frac{1}{\rho} \underline{\nabla} p + \nu \Delta \underline{v} - \rho \underline{g} \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A * (\underline{v}) = 0 \\ \frac{\underline{v}^{n+1} - \underline{v}^n}{\Delta t} + \underbrace{B(\underline{v}^n, \underline{v}^{n+1})}_{=B^n(\underline{v}^{n+1})} + A(p^{n+1}) = \underline{F}_f^{n+1} \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \text{où } A* &= \underline{\nabla} \cdot \\ A &= \underline{\nabla} \\ B(\underline{V}, \underline{W}) &= (\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) \underline{W} \end{aligned}$$

Il suffit ensuite de résoudre un système linéaire d'inconnues $(p^{n+1}, \underline{v}^{n+1})$ de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & A* \\ \Delta t A & Id + \Delta t B^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{n+1} \\ \underline{v}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{v}^n + \Delta t \underline{f}^{n+1} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

De nombreuses méthodes itératives, telle que la technique du point fixe, sont connues et applicables pour la résolution de ce système. Néanmoins, ces solutions sont très coûteuses en terme de temps de calcul et de capacité de stockage si bien qu'il est illusoire de vouloir les utiliser, en particulier pour un problème instationnaire.

4.2.2 Fonction de courant et de vorticité

En introduisant la fonction de courant \underline{F} tel que $\underline{v} = \underline{\nabla} \wedge \underline{F}$ et la fonction de vorticité $\underline{\xi}$ tel que $\underline{\xi} = \underline{\nabla} \wedge \underline{v}$ dans le système d'équation (4.4), il est possible d'obtenir une formulation simplifiée qui satisfassent automatiquement la condition d'annulation de la divergence du champ de vitesse. Dans un domaine 2D, ce changement de variable mène à un système de 2 équations à 2 inconnues. Cependant, dans un domaine 3D, il s'avère nécessaire de résoudre un système de 3 équations à 6 inconnues. L'objectif de l'étude menée ici étant de développer un code de calcul 2D vertical pour ensuite le généraliser en 3D, il est évident que cette solution n'est pas adaptée au problème posé.

4.2.3 Méthode de la compressibilité artificielle

Introduite à l'origine par A.J Chorin [Chorin,1967], cette méthode consiste à imposer une variation temporelle à la pression du fluide et à résoudre le système ainsi formé en supposant que l'état stationnaire est atteint pour la pression. Le système d'équation, qui prend un caractère hyperbolique, a la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0 \\ \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\underline{v} \otimes \underline{v} + \frac{1}{\rho} p \underline{I} - \nu \underline{\nabla} \underline{v}) = \rho \underline{F} \end{cases} \quad (4.8)$$

Dans cette équation, β a les dimensions d'une vitesse et représente une pseudo-vitesse de l'onde de pression. En réalité, ce système d'équation représente l'écoulement d'un fluide compressible avec un petit nombre de Mach. Bien évidemment, le comportement transitoire (du point de vue de la pression) du système d'équation perd tout sens physique lorsqu'il est appliqué à un fluide incompressible. La signification physique n'est recouverte qu'à l'état stationnaire.

β joue un rôle important dans la détermination du taux de convergence et de la stabilité de la méthode. Il doit être ajusté pour assurer que l'onde de pression se soit propagée dans tout le domaine de calcul en un temps inférieur au temps nécessaire à l'onde de gravité pour traverser une maille. Une rapide évaluation de la valeur de β et du nombre de Courant [Versteegh,1990,page 3.3] permet d'évaluer l'ordre de grandeur du pas de temps qu'il serait nécessaire d'adopter pour assurer la stabilité de ce schéma : $\Delta t \approx 10^{-5}$. Cette très faible valeur de Δt constitue la principale limitation de cette méthode en apparence très simple. Ceci explique qu'on lui ait préféré, dans cette étude, une méthode de type projection (paragraphe 4.5). Comme cela a été justement souligné par C. Hirsch [Hirsch,1984,b,page 656] dans sa description de la méthode AC (*Artificial Compressibility Method*), cette technique de calcul est surtout adaptée à la résolution de système stationnaire.

4.2.4 Méthode des projections

La méthode des projections, dont l'idée revient à Harlow et Welch [Harlow,1965], est basée sur l'observation que le premier terme de l'équation de conservation de la quantité de mouvement du système (4.4) constitue une décomposition de HODGE. Dès lors, les deux équations de conservation de Navier Stokes sont équivalentes à la formulation donnée par

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = \mathcal{P} [-\underline{\nabla} \cdot (\underline{v} \otimes \underline{v} - \nu \underline{\nabla} \underline{v}) + \underline{F}] \quad (4.9)$$

où \mathcal{P} est l'opérateur qui projette le champ vectoriel dans l'espace des champs vectoriels dont la divergence est nulle avec des conditions aux limites appropriées.

Mathématiquement, on obtient la définition suivante pour l'opérateur \mathcal{P}

$$\mathcal{P} : E(\Omega) \rightarrow E_0(\Omega) \quad (4.10)$$

où l'on a défini les espaces suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(\Omega) = \{ \underline{v} \in [L^2(\Omega)]^3 \mid \operatorname{div} \underline{v} \in [L^2(\Omega)] \} \\ E_0(\Omega) = \{ \underline{v} \in [L^2(\Omega)]^3 \mid \operatorname{div} \underline{v} = 0 \ ; \ \gamma_n(\underline{v}) = 0 \ (i.e \ \underline{v} \cdot \underline{n} = 0) \} \end{array} \right. \quad (4.11)$$

L'intérêt de cette projection est de faire disparaître le terme de pression lors de la projection. En effet, le gradient de pression $\nabla \cdot p$ est orthogonal à l'espace vectoriel $E_0(\Omega)$. De plus, elle permet d'atteindre des pas de temps de l'ordre de 10^{-1} . Cette méthode semble la plus adaptée à notre objectif, qui est de créer un code de calcul efficace dans une large gamme de phénomènes instationnaires 2D et 3D.

Ce principe a abouti à un nombre important de mises en oeuvre différentes par divers auteurs. Les principales applications sont présentées le plus complètement possible dans le paragraphe 4.3. Sur base des nombreuses publications disponibles sur le sujet, il a été distingué les approches aux variables primitives et intermédiaires, ainsi que les approches simultanées ou *multistep*. La principale difficulté, comme l'avait signalé A.J. Chorin [Chorin,1967], est de poser les bonnes conditions aux limites. Dès lors, dans le paragraphe 4.3, cette question est traitée avec plus grand soin. Bien que l'état actuel de la science ne permette d'y répondre complètement, une proposition de conditions aux limites est proposée par l'auteur.

4.2.5 Méthode *Gauge*

Dans le paragraphe 4.4 page 70, une méthode novatrice publiée par Weinan et Liu [Weinan,2003] en 2003 est considérée. Cette méthode a été dénommée *gauge method* par analogie avec l'électromagnétisme. Bien que très semblable en apparence avec la méthode des projections, elle permet de résoudre les principaux problèmes de cette dernière. Le point de départ de la méthode *gauge* est de remplacer la pression par une variable étalon ϕ et d'introduire un champ vectoriel $\underline{a} = \underline{u} + \nabla \phi$. Ces nouvelles variables n'ont plus aucun sens physique, mais des formules simples permettent d'en dériver la pression et la vitesse.

Bien que les chercheurs du HACH privilégient le développement de la méthode des projections, l'auteur souhaite présenter le principe de cette méthode en raison de son caractère novateur et pour fournir un état complet des connaissances en 2007.

4.3 Méthode des projections

Dans ce texte, la partie théorique est illustrée par un cas simple : une discrétisation temporelle totalement explicite et du premier ordre.

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{v}^{n+1} = 0 \\ \frac{\underline{v}^{n+1} - \underline{v}^n}{\Delta t} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \underline{p}^{n+1} = -\nabla \cdot (\underline{v}^n \otimes \underline{v}^n - \nu \nabla \underline{v}^n) + \underline{F} \end{cases} \quad (4.12)$$

L'application pratique de cette formulation est néanmoins sujette à caution. En effet, selon Weinan et Liu [Weinan,1995,a], si $Rc = Re \frac{\Delta x}{L} = O(1)$, alors il est nécessaire de traiter le terme visqueux de manière implicite. Il convient donc de vérifier si, en pratique, une formulation totalement explicite fournit des résultats satisfaisants.

4.3.1 Méthode des variables primitives

La première manière de projeter, proposée par Harlow and Welch [Harlow,1965], consiste à remplacer l'équation de continuité par la divergence de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, qui prend la forme d'une équation de Poisson pour la pression. On opère donc clairement le remplacement suivant (dans lequel on suppose que $\nabla \cdot \underline{v} = 0$) :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{v} = 0 &\Rightarrow \nabla \cdot \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \underline{p} = -\nabla \cdot (\underline{v} \otimes \underline{v} - \nu \nabla \underline{v}) + \underline{F} \right) \\ &\Rightarrow \Delta p = -\nabla \cdot (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} + \nabla \cdot \underline{F} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Cette méthode n'est applicable qu'aux discrétisations totalement explicites des équations de Navier-Stokes. Nous la citons dans ce texte pour mémoire et pour introduire la principale difficulté de la méthode des projections : les conditions aux limites. Le propos sur ces conditions est traité de manière complète dans le paragraphe 4.3.2 consacré à l'approche multistep de la méthode des projections.

Condition aux limites additionnelle

Selon William D. Henshaw [Henshaw,1994,a], **il est nécessaire d'imposer une condition aux limites supplémentaires pour la pression afin que le nouveau système soit bien posé et équivalent au système (4.4)**. Cette condition supplémentaire doit, selon lui, satisfaire à trois conditions :

1. Elle doit être choisie telle que le nouveau système (et les conditions de compatibilité) soit bien posé ;
2. Elle doit être consistante avec la formulation originale (4.4) ;
3. Elle doit être choisie telle que la nouvelle formulation soit équivalente à la formulation originale (4.4).

Ces trois conditions sont satisfaites par la condition $\nabla \cdot \underline{v} = 0$ sur la frontière, bien que celle-ci ne ressemble pas au premier coup d'oeil à une condition pour la pression.

Ainsi, en remplaçant l'équation de continuité et en imposant une condition aux limites supplémentaire, nous obtenons la formulation équivalente suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \underline{\nabla} \cdot \underline{p} = -\underline{\nabla} \cdot (\underline{v} \otimes \underline{v} - \nu \underline{\nabla} \underline{v}) + \underline{F} & \forall \underline{x} \in \Omega \\ \Delta p + \underline{\nabla} v_x \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \underline{\nabla} v_y \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \underline{\nabla} v_z \cdot \frac{\partial v}{\partial z} - \underline{\nabla} f = 0 & \forall \underline{x} \in \Omega \\ \underline{B}(\underline{v}, p) = 0 & \forall \underline{x} \in \partial\Omega \\ \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0 & \forall \underline{x} \in \partial\Omega \\ \underline{v}(\underline{x}, 0) = \underline{v}_0(\underline{x}) & \forall \underline{x} \in \Omega \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Dans ce nouveau système, l'équation de Poisson nous assure que le taux de variation de la divergence du champ de vitesse \underline{v} s'annule partout. Cette équation définit donc $\underline{\nabla} \cdot \underline{v}$ à une constante additive près. La nécessité d'imposer $\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0$ sur les frontières présente donc une certaine logique.

En appliquant cette méthode au système d'équations (4.12), on obtient les deux équations suivantes, qui sont évidemment solutionables en deux étapes successives du fait que la discrétisation temporelle est explicite :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta p^{n+1} = -\underline{\nabla} \cdot (\underline{v}^n \cdot \underline{\nabla}) \underline{v}^n + \underline{\nabla} \cdot \underline{f}^n & \text{sur } \Omega \\ \underline{v}^{n+1} = \underline{v}^n + \Delta t \left(-\frac{1}{\rho} \underline{\nabla} \cdot p^{n+1} - \underline{\nabla} \cdot (\underline{v}^n \otimes \underline{v}^n - \nu \underline{\nabla} \underline{v}^n) + \underline{f}^n \right) & \text{sur } \Omega \\ \underline{v}^{n+1}(\underline{x})|_{\partial\Omega} = \underline{v}_b^{n+1}(\underline{x}) & \text{sur } \Gamma \\ \underline{\nabla} \cdot \underline{v}^{n+1}(\underline{x})|_{\partial\Omega} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (4.15)$$

Rappelons que les conditions de compatibilité sur les conditions aux limites et les conditions initiales du système d'équations de Navier-Stokes (4.4) sont bien évidemment toujours applicables. Dans la toute grande majorité des cas, il est extrêmement difficile de générer des conditions qui satisfassent à ces relations de compatibilité. C'est pourquoi on définit souvent \underline{v}_0 par une décomposition de Hodge :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{v}_0 = \underline{v}_I + \underline{\nabla} \psi & \forall \underline{x} \in \Omega \\ \underline{n} \cdot \underline{v}_0 = \underline{n} \cdot \underline{v}_{\partial\Omega} & \forall \underline{x} \in \partial\Omega \\ \int_{\partial\Omega} \underline{n} \cdot \underline{v} ds = 0 & \end{array} \right. \quad (4.16)$$

Conditions aux limites en pratique

Le problème des conditions aux limites de pression n'est pas encore totalement résolu. En effet, il est clair que pour résoudre l'équation (4.15) de Poisson pour la pression, il est nécessaire de disposer de valeurs pour la pression p sur les frontières. Cette nécessité ne remet aucunement en cause nos conclusions précédentes. **Physiquement, il ne faut pas imposer de conditions aux limites sur p . Numériquement, c'est une nécessité pratique.** La question est donc de dériver une expression de la pression p sans introduire d'informations supplémentaires et en restant cohérent avec les équations (4.14).

De nombreux auteurs se sont attachés à dériver une condition sur la pression, avec plus ou moins de succès. La philosophie de la démarche a été énoncée par Gustafson et Halasi [Gustafson]. **Pour obtenir les conditions aux limites de l'équation de pression de Poisson, il faut appliquer l'équation de conservation de la quantité de mouvement et de l'équation de continuité sur les frontières du domaine.** Néanmoins, chaque auteur y va de sa méthode et de nombreux résultats sont disponibles dans la littérature.

William D. Henshaw [Henshaw,1994,b] propose une méthode relativement générale pour dériver des conditions aux limites pour atteindre le quatrième ordre de précision. Pour ce faire, il crée deux rangées de mailles fictives (la frontière est donc composée de trois rangées de mailles) et résout un système non linéaire de 12 équations à douze inconnues ($U_{i,j}, P_j$) pour chaque maille de la frontière. En créant un tel nombre de conditions aux limites, il peut s'assurer que toutes les équations de Navier-Stokes et toutes leurs conditions aux limites sont vérifiées sur les frontières.

Dans la plupart des cas néanmoins, on veut s'éviter d'imposer autant de conditions aux frontières. Il faut donc faire un choix dans les équations que l'on applique aux frontières. Ainsi, une méthode pour exprimer une condition aux limites sur la pression p , proposée par Gresho et Sani [Gresho,1994], consiste à appliquer les équations initiales de Navier-Stokes sur les frontières et ensuite les projeter selon la normale (\underline{n}) ou selon la tangente ($\underline{\tau}$). Ce faisant, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial \underline{n}} = \left(\nu \Delta - \frac{\partial}{\partial t} - \underline{v} \cdot \nabla \right) (\underline{n} \cdot \underline{v}) + \underline{g} \cdot \underline{n} & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial p}{\partial \underline{\tau}} = \left(\nu \Delta - \frac{\partial}{\partial t} - \underline{v} \cdot \nabla \right) (\underline{\tau} \cdot \underline{v}) + \underline{g} \cdot \underline{\tau} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.17)$$

Nous constatons donc que, à la fois, des conditions aux limites de Neumann et de Dirichlet sont acceptables pour la pression dans l'équation de Poisson. De nombreux articles ont été écrits sur le sujet et leurs propos divergent de manière notable. Les récents travaux de Weinan et Liu [Weinan,1995,a] et de Gresho et Sani [Gresho,1994] semblent confirmer que le comportement numérique² des solutions est meilleur avec des conditions aux limites de Neumann.

²par comportement numérique, il faut comprendre l'importance des erreurs introduites aux frontières et la

En particulier, Gresho et Sani montrent que

1. Pour résoudre l'équation de Poisson, seules les conditions aux limites de Neumann sont toujours appropriées et fournissent une solution unique pour $t \geq 0$.
2. La solution numérique du problème de Neumann bien posé satisfait les conditions de Dirichlet mais en général seulement pour $t > 0$

Il importe de bien comprendre que, selon ces auteurs, **la manifestation de la condition aux limites $\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0$ sur Γ correspond en pratique aux conditions de Neumann sur la pression et à la relation $\underline{v} \cdot \underline{n} = \underline{v}_0 \cdot \underline{n}$.**

En pratique, comme il est expliqué au paragraphe 4.3.2, ces conditions aux limites partielles, même appropriées, introduisent des erreurs aux frontières ce qui limite fortement la précision du schéma. Le lecteur se référera au paragraphe précité pour plus de détails.

Equivalence des systèmes

Afin de vérifier l'équivalence entre le système (4.4) des équations de Navier-Stokes avec la nouvelle formulation (4.14), il est intéressant de reprendre le problème inverse. *Peut-on dériver les équations (4.4) du système (4.14)?*

Gresho and Sani [Gresho,1994] ont montré que la réponse est *non, pas toujours!* Par contre, si, lorsque l'on dérive l'équation de Poisson des équations de Navier-Stokes, on suppose que $\underline{\nabla} \cdot \underline{v} \neq 0$ dans le terme visqueux, l'équation de Poisson devient

$$\begin{cases} \Delta P^{n+1} = \nu \Delta D^n - \underline{\nabla} \cdot (\underline{v}^n \cdot \underline{\nabla}) \underline{v}^n \\ D^n = \underline{\nabla} \cdot \underline{v}^n \end{cases} \quad (4.18)$$

Gresho et Sani ont montré que cette formulation de l'équation de Poisson permet de retrouver les équations (4.4) de Navier-Stokes, pour autant que le problème (4.14) avec la nouvelle équation de Poisson soit bien posé, ce qui est le cas.

Cette conclusion est pour le moins paradoxale et montre tout le soin que l'on doit apporter dans cette méthode : l'équation de Poisson simplifiée est obtenue en supposant que $D^n = 0$. Cependant, dans ce cas, le système obtenu ne nous assure plus automatiquement que $D^n = 0$. Si, par contre, on suppose que $D^n \neq 0$, l'équation de Poisson consistante que l'on obtient nous assure que $D^n = 0$.

Sur base de cette constatation, C. Hirsch [Hirsch,1984,b,page 660] propose des formulations améliorées de l'équation de Poisson pour la pression dans lesquelles il n'est pas supposé que la divergence du champ de vitesse soit nulle au pas de temps précédent. En effet, cette divergence ne s'annule pas dans tous les cas (erreurs de troncatures, convergence vers une

manière dont elles sont propagées dans le domaine

solution stationnaire).

$$\begin{cases} \Delta P^{n+1} = \frac{D^n}{\Delta t} + \nu \Delta D^n - D^{2n} - (\underline{v}^n \cdot \underline{\nabla}) D^n - \underline{\nabla} \cdot (\underline{v}^n \cdot \underline{\nabla}) \underline{v}^n \\ D^n = \underline{\nabla} \cdot \underline{v}^n \end{cases} \quad (4.19)$$

Bien évidemment, cette relation se simplifie si on suppose que $D^n = 0$. Néanmoins, dans la méthode des projections, puisque la relation $D^n = 0$ n'est pas toujours totalement vérifiée à l'issue de l'itération temporelle n , utiliser la relation précédente permet de corriger cette approximation au pas de temps suivant. Le schéma résultant est donc plus robuste.

Conclusions

La méthode des projections avec les variables primitives constitue donc une solution pour résoudre les équations de Navier-Stokes en découplant (partiellement) le calcul du champ de vitesse du calcul du champ de pression. Elle est cependant loin d'être parfaite. En effet, le découplage entre la pression et la vitesse n'est effectif que dans le cadre d'une formulation totalement explicite. Si l'on souhaite traiter implicitement certains termes, on doit se reporter à l'approche multistep. En outre, la gestion des conditions aux limites s'avère difficile, comme nous le verrons dans le paragraphe 4.3.2.

4.3.2 Méthode des variables primitives - approche *multistep*

Principe et analyse de l'erreur

L'idée de l'approche *multistep* pour la résolution du système (4.14) revient à A.J. Chorin [Chorin,1968,a] et permet de traiter, par la méthode des projections, les discrétisations temporelles explicites et implicites. Le principe de la méthode est d'évaluer un champ de vitesse approximé u^* à partir duquel est calculée la pression p^{n+1} . Ensuite, le champ de vitesse est corrigé. Avec discrétisation arrière d'Euler (4.12), le schéma du premier ordre s'écrit :

- Pas 1 : Résolution du champ de vitesse intermédiaire \underline{v}^* .

$$\begin{cases} \frac{\underline{v}^* - \underline{v}^n}{\Delta t} = -\underline{\nabla} \cdot ((\underline{v} \otimes \underline{v})^n - \nu \underline{\nabla} \underline{v}^n) + \rho \underline{g} \\ \underline{B}(\underline{v}^*) = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

- Pas 2 : Réalisation de la projection en résolvant l'équation de Poisson (en utilisant des conditions aux limites consistantes avec $\underline{B}(\underline{v}^*) = 0$ et $\underline{v}^{n+1}|_{\partial\Omega} = \underline{v}_b^{n+1}$).

$$\begin{cases} \underline{v}^* = \underline{v}^{n+1} + \Delta t \underline{\nabla} p^{n+1} \\ \underline{\nabla} \cdot \underline{v}^{n+1} = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

Pour un premier ordre de précision, la condition aux limites sur \underline{v}^* est naturellement posée $\underline{v}^* = \underline{v}_b^{n+1}$. Choisir la condition aux limites de pression s'avère une question plus difficile. Si l'on s'en réfère au paragraphe 4.3.1, il semble que les conditions de Neumann soient les

mieux adaptées. De plus, pour s'assurer que l'espace des champs vectoriels de divergence nulle soit orthogonal à l'espace des champs vectoriels irrotationnels, il est nécessaire d'imposer la condition aux limites $\underline{v}^{n+1} \cdot \underline{n}$ sur $\partial\Omega$. Grâce à (4.17), le second pas (4.21) de la méthode devient :

$$\begin{cases} \Delta t \nabla^2 p^{n+1} = \underline{\nabla} \cdot \underline{v}^* & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial p}{\partial \underline{n}} = \underline{g} \cdot \underline{n} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.22)$$

Ces résultats sont à considérer avec soin car, dans la plupart des cas, de larges erreurs sont introduites aux frontières, aussi bien sur la pression que sur la vitesse, en raison de l'inconsistance des conditions aux limites. Il est quasi impossible de pouvoir évaluer a priori ces erreurs (de nombreux mathématiciens travaillent toujours sur le sujet) de même qu'il est difficile d'évaluer la manière dont ces erreurs vont se propager dans le domaine intérieur.

Weinan et Liu consacrent 3 articles ([Weinan,1995,a], [Weinan,1995,b] et [Weinan,1995,c]) à cette question de la forme de l'erreur introduite aux frontières par approximation des vitesses et pressions et la manière dont celle-ci se propage au sein du domaine de calcul. Leurs conclusions sont les suivantes : l'effet des frontières solides ne se limite pas à créer des couches limites numériques. En effet, elles introduisent des modes numériques additionnels dans le problème (i.e. la méthode des projections est une perturbation singulière du système d'équations différentielles d'origine) et ces modes ont la structure d'une couche limite numérique. Weinan et Liu apportent une preuve de ce fait par une analyse spectrale d'un cas simple. Une analyse de Godunov-Ryabenki permet également de montrer que les frontières solides peuvent détériorer la solution d'un quart d'ordre de précision.

De plus, Weinan et Liu constatent que l'équation de Poisson obtenue dans la méthode des projections doit être résolue avec des schémas de discrétisation très spéciaux afin de ne pas créer de modes parasites. Pour comprendre ce fait, reprenons les équations (4.21) du second pas de l'approche *multistep*. Lors de la discrétisation spatiale de ces équations, il faudra définir les formes discrètes, notées G_h et D_h des deux opérateurs $\underline{\nabla}$.

$$\begin{cases} \underline{v}^{n+1} = \underline{v}^* + G_h \Delta t p^{n+1} \\ D_h \underline{v}^{n+1} = 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

Le champ de pression est alors obtenu en résolvant

$$\begin{cases} D_h \underline{v}^* = \tilde{\Delta} \Delta t p^{n+1} \\ \frac{\partial p^{n+1}}{\partial \underline{n}} = 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

où $\tilde{\Delta} = D_h * G_h$ et $u^{n+1} = u^* - G_h \Delta t p^{n+1}$.

Dès lors, D_h et G_h (ou D_h et $\tilde{\Delta}$) ne peuvent pas être choisis indépendamment l'un de l'autre sinon des modes parasites apparaissent. Par exemple, si une différence finie centrée du second ordre est utilisée, l'opérateur laplacien qui en résulte présente en son sein des modes parasites en damier.

Il est donc très difficile d'élaborer un schéma simple pour obtenir un second ordre de précision avec cette méthode. A l'heure actuelle, la littérature ne présente que trois schémas de résolution *multistep* dits du second ordre de précision. Ces trois méthodes diffèrent essentiellement par le choix du terme pour lequel un effort d'amélioration de la précision est consenti.

Méthode des projections basée sur une condition aux limites précises pour le champ de vitesse intermédiaire

Le jeu d'équations résolues dans cette méthode, proposée par Kim and Moin [Kim,1985], sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\underline{v}^* - \underline{v}^n}{\Delta t} + \left(\underline{v}^{n+1/2} \cdot \underline{\nabla} \right) \underline{v}^{n+1/2} = \Delta \frac{\underline{v}^n + \underline{v}^*}{2} & \forall \underline{x} \in \Omega \\ \underline{v}^n + \underline{v}^* = \Delta t \underline{\nabla} p^{n-1/2} & \forall \underline{x} \in \partial\Omega \\ \underline{v}^* = \underline{v}^{n+1} + \Delta t \underline{\nabla} p^{n+1/2} & \forall \underline{x} \in \Omega \\ \underline{\nabla} \cdot \underline{v}^{n+1} = 0 & \forall \underline{x} \in \Omega \\ \underline{n} \cdot \underline{v}^{n+1} = \underline{n} \cdot \underline{v}_b^{n+1} & \forall \underline{x} \in \partial\Omega \end{array} \right. \quad (4.25)$$

Dans cette formulation, Kim et Moin retiennent donc une condition de Neumann homogène pour la pression et une condition aux limites non homogènes pour le champ de vitesse \underline{v}^* de telle sorte que \underline{v}^{n+1} soit d'ordre Δt^2 sur la frontière.

Méthode des projections basée sur une condition aux limites précises pour le champ de pression

Le jeu d'équations résolues dans cette méthode, proposée par Orszag et al. [Orszag,1986], sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\underline{v}^* - \underline{v}^n}{\Delta t} + \left(\underline{v}^{n+1/2} \cdot \underline{\nabla} \right) \underline{v}^{n+1/2} = \Delta \frac{\underline{v}^n + \underline{v}^*}{2} \quad \forall \underline{x} \in \Omega \\ \underline{v}^* = \underline{v}_b^{n+1} \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega \\ \underline{v}^* = \underline{v}^{n+1} + \Delta t \underline{\nabla} p^{n+1/2} \quad \forall \underline{x} \in \Omega \\ \underline{\nabla} \cdot \underline{v}^{n+1} = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Omega \\ \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial n} = \underline{n} \cdot \left[\underline{\nabla} \times \left(\underline{\nabla} \times \underline{v}^* \right) \right] \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega \end{array} \right. \quad (4.26)$$

Dans cette formulation, Orszag retient donc une condition de Dirichlet homogène pour le champ de vitesse \underline{v}^* et une condition de Neumann non homogène pour la pression de telle sorte que \underline{v}^{n+1} soit d'ordre Δt^2 sur la frontière.

Méthode des projections basée sur une formule d'incrément de pression

Le jeu d'équations résolues dans cette méthode, proposée par de nombreux auteurs dont Bell et al. [Bell,1988], J. Van Kan [Van Kan,1986], sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\underline{v}^* - \underline{v}^n}{\Delta t} + \left(\underline{v}^{n+1/2} \cdot \underline{\nabla} \right) \underline{v}^{n+1/2} = \Delta \frac{\underline{v}^n + \underline{v}^*}{2} \quad \forall \underline{x} \in \Omega \\ \underline{v}^* = \underline{v}_b^{n+1} \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega \\ \underline{v}^* = \underline{v}^{n+1} + \Delta t \underline{\nabla} p^{n+1/2} \quad \forall \underline{x} \in \Omega \\ \underline{\nabla} \cdot \underline{v}^{n+1} = 0 \quad \forall \underline{x} \in \Omega \\ \underline{n} \cdot \underline{v}^{n+1} = \underline{n} \cdot \underline{v}_b^{n+1} \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega \end{array} \right. \quad (4.27)$$

Dans cette formulation, les auteurs retiennent donc des conditions de Dirichlet homogènes pour le champ de vitesse \underline{v}^* et pour la pression et améliore la précision du calcul du champ de vitesse \underline{v}^{n+1} de telle sorte que celui-ci soit d'ordre Δt^2 sur la frontière.

Conclusions

Dans les paragraphes précédents, diverses formulations de projections et de conditions aux limites qui sont utilisées avec succès en pratique ont été présentées. L'auteur insiste sur le fait que, si ces méthodes sont performantes en pratique, elles constituent encore des énigmes théoriques pour les mathématiciens. En particulier, Weinan and Liu [Weinan,2003] affirment que ces méthodes sont faussement dites du second ordre. En effet, ils montrent que l'ordre de précision de ces trois schémas pour la pression et le champ de vitesse est au mieux du premier ordre pour les champs de vitesse et de pression. Seule l'erreur de la divergence du champ de vitesse obtenue est du second ordre.

4.3.3 Méthode des variables intermédiaires - approche *multistep*

Une amélioration de la méthode précédente, proposée par Chorin [Chorin,1968,b], consiste à remplacer la pression par une autre variable purement numérique et d'en déduire une nouvelle équation de Poisson. Pour ce faire, Chorin propose d'effectuer une décomposition de Hodge du champ de vitesse et de ce fait opérer la projection $\mathcal{P} : E(\Omega) \rightarrow E_0(\Omega)$:

$$\underline{v}^* = \underline{v} + \underline{\nabla} \psi \quad \Rightarrow \quad \Delta \psi - \underline{\nabla} \cdot \underline{v}^* = 0 \quad (4.28)$$

Une fois que cette décomposition est introduite dans les équations de Navier Stokes et que celles-ci sont discrétisées, elles sont résolubles par l'approche *multistep* :

- Pas 1 : Résoudre le champ de vitesse intermédiaire \underline{v}^* en utilisant un champ de pression approximé p^* .

$$\frac{\partial \underline{v}^*}{\partial t} = -\underline{\nabla} \cdot \left((\underline{v} \otimes \underline{v})^n + \frac{1}{\rho} p^* \underline{I} - \nu \underline{\nabla} \underline{v}^n \right) + \rho \underline{g} \quad (4.29)$$

$$\underline{B}(\underline{v}^*) = 0 \quad (4.30)$$

- Pas 2 : Réaliser la projection en résolvant l'équation de Poisson (en utilisant des conditions aux limites consistantes avec $\underline{B}(\underline{v}^*) = 0$ et $\underline{v}^{n+1}|_{\partial\Omega} = \underline{v}_b^{n+1}$).

$$\Delta \psi - \underline{\nabla} \cdot \underline{v}^* = 0 \quad (4.31)$$

- Pas 3 : Reconstruire les variables primaires \underline{v} et p .

$$\underline{v} = \underline{v}^* - \underline{\nabla} \psi \quad (4.32)$$

$$p^{n+1} = p^* + \mathcal{L}(\psi^{n+1})$$

Nous constatons que, dans cette nouvelle méthode, un champ de pression a été introduit. C'est une seconde innovation apportée par Chorin. Celui peut prendre une valeur quelconque, et en particulier $p^* = 0$. Le lecteur gardera à l'esprit que l'objectif de la méthode des projections est de découpler le calcul du champ de pression et de vitesse. Chorin réintroduit cependant un champ de pression approché p^* car il importe que le champ de vitesse approché u^* soit le plus proche possible du champ de vitesse solution u^{n+1} pour obtenir un ordre de précision élevée. Classiquement, si $p^* = 0$, seul un premier ordre de précision est atteignable, alors que si $p^* = p^n$, un second ordre de précision devrait être atteignable. En pratique, selon [Weinan,2003], ce second ordre n'est jamais atteint.

Dans cette méthode, il reste deux choix à opérer pour définir complètement la méthode de résolution : les conditions aux limites $\underline{B}(\underline{v}^*) = 0$ et la fonction $\mathcal{L}(\psi^{n+1})$ qui exprime la dépendance de p^{n+1} en ψ^{n+1} . Le point crucial de la méthode est de choisir correctement ces deux fonctions, alors qu'il a été montré dans [Brown,2001,b] qu'il existe des couplages multiples entre le choix de p^* et ces deux fonctions. Ces couplages doivent être considérés avec soins pour s'assurer un ordre de précision suffisant. En particulier, le choix des conditions aux limites pour \underline{v}^* doit être consistant avec l'équation (4.31) de Poisson, alors qu'à ce moment

les conditions aux limites qui sont appliquées sur la fonction ψ^{n+1} ne sont pas encore connues.

Il importe de comprendre que l'utilisation de cette méthode impose de définir de nouvelles conditions aux limites, dites numériques car elles n'ont aucun sens physique. Elles permettent uniquement de résoudre les équations dépendant des variables dites intermédiaires (p^* , \underline{v}^* , ψ).

Si on reprend les conditions de Dirichlet proposées précédemment :

$$\underline{v}(\underline{x})|_{\partial\Omega} = \underline{v}_b(\underline{x}) \quad (4.33)$$

on peut définir les choix de la méthode de résolution

1. on montre³ aisément que $p^{n+1} = p^* + \frac{\partial\psi^{n+1}}{\partial t}$.
2. pour résoudre l'équation (4.31), il est nécessaire d'imposer des conditions aux limites purement numériques sur ψ . Par définition de ψ et en projetant selon la normale à la frontière pour obtenir une condition de Neuman, on obtient

$$\underline{n} \cdot \underline{\nabla}\psi^{n+1}|_{\partial\Omega} = \underline{n} \cdot (\underline{v}^* - \underline{v}^{n+1})|_{\partial\Omega} \quad (4.34)$$

3. Pour autant que le champ intermédiaire u^* soit suffisamment proche du champ u^{n+1} , on peut poser

$$\underline{v}^*|_{\partial\Omega} = \underline{v}^{n+1}|_{\partial\Omega} \quad (4.35)$$

Il est montré dans les paragraphes 4.3.1 et 4.3.2 que l'ordre de précision de la méthode est fortement influencé par l'erreur introduite aux frontières. Dans le cas présent, l'erreur sur les frontières est donc lié à l'ordre de précision avec lequel on définit les conditions aux limites numériques (u^* et ψ^*) à partir des conditions aux limites physiques (\underline{u}^{n+1} et $\underline{\nabla} \cdot \underline{u}^{n+1}$) où la pression p n'intervient pas. Il semble, selon les résultats rencontrés dans la littérature, que cette méthode nous assure un premier ordre de précision. Le second ordre ne semble pas atteignable dans l'état actuel des choses

Évidemment, les conditions initiales doivent également satisfaire certaines conditions de compatibilité. Notons qu'il n'est pas nécessaire de définir des conditions initiales pour les variables intermédiaires u^* et ψ^* , mais que c'est indispensable pour p^* s'il n'est pas choisi identiquement nul. Pour les variables primaires, on a :

$$\begin{cases} \underline{\nabla} \cdot \underline{v}_0 = 0 & \forall \underline{x} \in \Omega \\ \underline{n} \cdot \underline{v}_0 = \underline{n} \cdot \underline{v}_{\partial\Omega} & \forall \underline{x} \in \partial\Omega \\ \int_{\partial\Omega} \underline{n} \cdot \underline{v} ds = 0 \end{cases} \quad (4.36)$$

³Si l'équation à résoudre n'était pas implicite, il faudrait ajouter des termes visqueux, voire convectifs dans cette équation

4.4 Gauge methode

Comme il est exposé au paragraphe 4.3, la méthode des projections, quelle que soit sa formulation, présente des difficultés qu'il est nécessaire de prendre en considération :

- la méthode des variables primitives nécessite de forcer l'incompressibilité du fluide près des frontières du domaine, ce qui s'avère très difficile à réaliser avec précision et en conservant la consistance du problème de Neumann lors de la discrétisation ;
- la reformulation des conditions aux limites en fonction de la pression p introduit dans le problème des modes numériques additionnels en augmentant l'ordre de l'équation différentielle partielle initiale (i.e. la méthode *multistep* est une perturbation singulière de l'équation différentielle partielle initiale) et ces modes numériques ont la structure de couches limites numériques ;
- les deux pas de la méthode *multistep* ne sont pas indépendants si bien que l'équation de Poisson doit être résolue par des schémas spéciaux pour ne pas introduire de modes parasites ;
- au final, nous ne pouvons guère nous attendre à un ordre de précision supérieur à 1 pour la pression et le champ de vitesse.

Pour passer outre ces difficultés, je propose, essentiellement à titre d'information, d'envisager une méthode novatrice publiée par Weinan et Liu [Weinan,2003] en 2003 et qui semble tout à fait robuste et libre de telles liaisons sous-jacentes. Cette méthode a été dénommée *gauge method* par analogie avec l'électromagnétisme.

4.4.1 Principe

Le point de départ de la méthode *gauge* est de remplacer la pression par une variable étalon ϕ et d'introduire un champ vectoriel $\underline{a} = \underline{u} + \underline{\nabla}\phi$. Le nouveau système à résoudre s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{a}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} = \frac{1}{Re} \Delta \underline{a} \\ \Delta \phi = \underline{\nabla} \cdot \underline{a} \end{cases} \quad (4.37)$$

Il est aisé de démontrer, par comparaison avec les équations (4.4) de Navier-Stokes, que la pression est liée à l'étalon ϕ par la relation suivante :

$$p = \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{Re} \Delta \phi \quad (4.38)$$

Le principal avantage de cette nouvelle formulation est que la liberté due à l'étalon permet d'assigner des conditions aux limites non ambiguës sur \underline{a} et ϕ . Il est possible de montrer [Brown,2001,b] que l'on dispose d'un degré de liberté sur le choix des conditions aux limites.

Supposons que l'on pose arbitrairement $\underline{a}^{n+1} = \underline{a}_b^{n+1}$. Il est ensuite nécessaire de poser des conditions aux limites en ϕ^{n+1} de tel sorte que $\underline{\nabla}\phi^{n+1}|_\Gamma = \underline{a}_b^{n+1} - \underline{v}_b^{n+1}$. Malheureusement, pour le problème elliptique, une seule condition aux limites peut être imposée et ϕ^{n+1} n'est pas connu au moment où on pose \underline{a}_b^{n+1} . Il est donc nécessaire d'extrapoler ϕ^{n+1} et plusieurs solutions sont possibles.

Si l'on souhaite imposer des conditions de Neumann sur l'étalon ϕ , nous pouvons écrire les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi^{n+1}}{\partial\underline{n}} = 0 & \Rightarrow \underline{a}_b \cdot \underline{n} = \underline{n} \cdot (\underline{v}_b^{n+1} + \underline{\nabla} \cdot \phi^{n+1}) = \underline{n} \cdot \underline{v}_b^{n+1} \\ & \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{\tau} = \underline{\tau} \cdot (\underline{v}_b^{n+1} + \underline{\nabla} \cdot \phi^{n+1}) = \underline{\tau} \cdot \underline{v}_b^{n+1} + \frac{\partial\phi^{n+1}}{\partial\underline{\tau}} \end{cases} \quad (4.39)$$

Si l'on souhaite imposer des conditions de Dirichlet (peu intéressant) sur l'étalon ϕ , nous pouvons écrire les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \phi^{n+1} = 0 & \Rightarrow \underline{a}_b \cdot \underline{n} = \underline{n} \cdot (\underline{v}_b^{n+1} + \underline{\nabla} \cdot \phi^{n+1}) = \underline{v}_b^{n+1} \cdot \underline{n} + \frac{\partial\phi^{n+1}}{\partial\underline{n}} \\ & \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{\tau} = \underline{\tau} \cdot (\underline{v}_b^{n+1} + \underline{\nabla} \cdot \phi^{n+1}) = \underline{\tau} \cdot \underline{v}_b^{n+1} \end{cases} \quad (4.40)$$

Pour extrapoler ϕ^{n+1} dans le calcul des conditions aux limites de \underline{a}^{n+1} , Brown propose $\phi^{n+1} = 2\phi^n - \phi^{n-1}$.

Bien que cette formulation semble très proche de la méthode des projections avec variables auxiliaires, la théorie mathématique sous-jacente est fondamentalement différente. Pour une mise en évidence des différences entre les deux méthodes, le lecteur se référera au paragraphe 4.4.3. Selon ses concepteurs, cette méthode permet de résoudre les équations de Navier-Stokes d'une manière qui n'est pas plus compliquée que de résoudre des équations classiques séparément. L'ordre de précision obtenu est donc celui des schémas de discrétisation utilisés pour les équations séparées. Weinan et Liu montrent ainsi [Weinan,2003] que les premier et second ordres de précision sont facilement atteignables avec des discrétisations temporelles et spatiales adéquates. Wang et Liu ont également prouvé [Wang,2000] mathématiquement la convergence de leur méthode.

4.4.2 Résolution

La résolution de cette nouvelle formulation nécessite un schéma de discrétisation temporelle. Nous prendrons, pour l'illustration, la discrétisation arrière d'Euler, tous les autres schémas étant applicables. L'approche *multistep* de la méthode des projections est applicable également à cette nouvelle formulation :

- Pas 1 : résolution du champ \underline{a}^{n+1} .

$$\begin{cases} \frac{\underline{a}^{n+1} - \underline{a}^n}{\Delta t} + (\underline{v}^n \cdot \underline{\nabla}_h) \underline{v}^n = \frac{1}{Re} \Delta_h \underline{a}^n & sur \Omega \\ \underline{a}^{n+1} \cdot \underline{n} = 0 & \underline{a}^{n+1} \cdot \underline{\tau} = \frac{D}{D\underline{\tau}} \phi^n & sur \Gamma \end{cases} \quad (4.41)$$

- Pas 2 : résolution du champ ϕ^{n+1}

$$\begin{cases} \Delta_h \phi^{n+1} = \nabla_h \cdot \underline{a}^{n+1} & \text{sur } \Omega \\ \frac{D}{Dn} \phi^{n+1} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (4.42)$$

- Pas 3 : reconstruction des variables \underline{v}^{n+1} et p^{n+1}

$$\begin{cases} \underline{v}^{n+1} = \underline{a}^{n+1} - \nabla_h \phi^{n+1} & \text{sur } \Omega \\ \underline{v}^{n+1} = \underline{v}_b^{n+1} & \text{sur } \Gamma \\ p^{n+1} = \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} - \frac{1}{Re} \Delta_h \phi^{n+1} & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (4.43)$$

4.4.3 Comparaison avec la méthode des projections

La différence entre la formulation de la méthode *gauge* et la méthode des projections est très petite. Principalement, on remplace le champ de vitesse \underline{u}^n dans la dérivée temporelle et dans le terme visqueux. Néanmoins, il importe de comprendre que, ce faisant, on découple complètement l'équation de conservation de la quantité de mouvement de la contrainte cinématique d'incompressibilité. La nouvelle méthode n'est donc pas une méthode à pas fractionné, mais bien une décomposition consistante du système d'équations différentielles initiales en 2 équations différentielles.

Dans la méthode des projections, le champ \underline{u}^* ne dévie jamais très fort de l'espace des champs de divergence nulle, alors que dans la méthode *gauge*, le champ \underline{a} est $O(1)$ de cette espace.

Cette différence à deux conséquences importantes :

- la méthode *gauge* n'introduit pas de modes numériques additionnels aux frontières ;
- l'équation de Poisson dans la méthode *gauge* ne doit pas être traitée par des schémas spéciaux.

4.5 Schémas proposés

Méthode des projections

- Pas 1 : résolution du champ de vitesse intermédiaire \underline{v}^* .

$$\begin{cases} \frac{\underline{v}^* - \underline{v}^n}{\Delta t} + (\underline{v}^n \cdot \nabla_h) \underline{v}^n = \frac{1}{Re} \Delta_h \underline{v}^n & sur \Omega \\ \underline{v}^* = \underline{v}^{n+1} & sur \Gamma \end{cases} \quad (4.44)$$

- Pas 2 : résolution du champ de pression p^{n+1}

$$\begin{cases} \Delta_h \psi^{n+1} = \nabla_h \cdot \underline{v}^* & sur \Omega \\ \frac{D}{D\underline{n}} \psi^{n+1} = 0 & sur \Gamma \end{cases} \quad (4.45)$$

- Pas 3 : reconstruction des variables \underline{v}^{n+1} et p^{n+1}

$$\begin{cases} \underline{v}^{n+1} = \underline{v}^* - \nabla_h \psi^{n+1} & sur \Omega \\ \underline{v}^{n+1} = \underline{v}_b^{n+1} & sur \Gamma \\ p^{n+1} = \frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\Delta t} & sur \Omega \end{cases} \quad (4.46)$$

Méthode *Gauge*

- Pas 1 : résolution du champ \underline{a}^{n+1} .

$$\begin{cases} \frac{\underline{a}^{n+1} - \underline{a}^n}{\Delta t} + (\underline{v}^n \cdot \nabla_h) \underline{v}^n = \frac{1}{Re} \Delta_h \underline{a}^n & sur \Omega \\ \underline{a}^{n+1} \cdot \underline{n} = 0 \quad \underline{a}^{n+1} \cdot \underline{\tau} = \frac{D}{D\underline{\tau}} \phi^n & sur \Gamma \end{cases} \quad (4.47)$$

- Pas 2 : résolution du champ ϕ^{n+1}

$$\begin{cases} \Delta_h \phi^{n+1} = \nabla_h \cdot \underline{a}^{n+1} & sur \Omega \\ \frac{D}{D\underline{n}} \phi^{n+1} = 0 & sur \Gamma \end{cases} \quad (4.48)$$

- Pas 3 : reconstruction des variables \underline{v}^{n+1} et p^{n+1}

$$\begin{cases} \underline{v}^{n+1} = \underline{a}^{n+1} - \nabla_h \phi^{n+1} & sur \Omega \\ \underline{v}^{n+1} = \underline{v}_b^{n+1} & sur \Gamma \\ p^{n+1} = \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} - \frac{1}{Re} \Delta_h \phi^{n+1} & sur \Omega \end{cases} \quad (4.49)$$

CHAPITRE 5

MÉTHODE LEVEL SET

According to Hermann Weyl, the introduction of a coordinate system to geometry is an act of violence. Level Set Methods commit this violence, and, doing so, provide mathematical and computational tools for tracking evolving interfaces with sharp corners and cusps, topological changes, and three dimensional complications.

J.A. Sethian

Sommaire

5.1	Méthodes de suivi d'interface	75
5.1.1	Introduction	75
5.1.2	Principe de la méthode <i>Level Set</i>	75
5.2	Équation d'évolution de la fonction <i>Level Set</i>	78
5.2.1	Formulation	78
5.2.2	Choix de l'équation d'évolution	78
5.2.3	Nature mathématique	79
5.2.4	Schéma du premier ordre de précision	84
5.2.5	Schéma d'ordre de précision deux et supérieure	86
5.3	Méthode <i>Fast Marching</i>	91
5.3.1	Problème eikonale	91
5.3.2	Lien avec les problèmes de suivi d'interface	92
5.3.3	Equation eikonale approchée	92
5.3.4	Algorithme de la méthode <i>Fast Marching</i>	93
5.4	Opérations complémentaires à la méthode <i>Level Set</i>	95
5.4.1	Construction de la <i>vitesse étendue</i>	95
5.4.2	Initialisation de la fonction <i>Level Set</i>	96
5.4.3	Algorithmes de (ré)initialisation	97
5.4.4	Méthode de visualisation	101
5.5	Algorithmes améliorés	103
5.5.1	Méthode <i>Narrow Band Level Set</i>	103
5.5.2	Conservation des volumes	104
5.5.3	<i>Level Set</i> à haut ordre de précision sans réinitialisation	105
5.6	Synthèse sur la méthode <i>Level Set</i>	106

5.1 Méthodes de suivi d'interface

Caractériser une interface mobile est un problème auquel des réponses ont été proposées depuis la naissance des mathématiques. Que ce soit du point de vue de la géométrie (euclidienne ou analytique), de la théorie des niveaux ou de l'analyse mathématique, ces réponses sont valables et ont donné naissance à des méthodes applicables et efficaces en *computational fluid mechanics*. L'application de ces méthodes va permettre, dans le cadre de ce travail, de **suivre la position de la surface libre des écoulements**.

5.1.1 Introduction

Historiquement, les méthodes *lagrangienne* ont tenu une place importante et ont permis de résoudre de nombreux problèmes. Ce sont essentiellement les méthodes *Marker and Cell*, publiée dans [Harlow,1965], et les méthodes sur grille mobile publiée dans [Magnaudet,2003]. D'autres approches, eulériennes, ont également été utilisées avec succès. Nous pouvons citer à cet égard la méthode *Volume Of Fluid* spécialement conçue pour la modélisation des écoulements diphasiques et présentée dans [Lafaurie,1994].

Dans ce texte, nous proposons d'étudier l'approche eulérienne de suivi des interfaces proposée par le professeur J.A Sethian¹ de Berkeley. Au lieu de se focaliser sur la frontière mobile elle-même, il considère une **reformulation des équations de mouvement de cette frontière comme une loi de conservation hyperbolique et visqueuse** et s'applique à résoudre ces équations grâce aux nombreuses techniques développées en dynamique des fluides. Cette idée a abouti à **deux méthodes complémentaires** : la méthode *Level Set* extrêmement générale et la méthode *Fast Marching* spécifique aux problèmes à vitesse de signe constant. L'algorithme de cette méthode est également partiellement utilisé pour accélérer la méthode *Level Set*. Cette approche a été appliquée avec succès dans une large gamme de modélisation en mécanique des fluides, météorologie, biotechnologie, sismique,....

5.1.2 Principe de la méthode *Level Set*

Plutôt que de suivre l'interface elle-même dans un espace de dimension n , l'approche *Level Set* considère l'interface Γ à modéliser dans un espace de dimension supérieur $n + 1$. Autrement dit, une surface est construite sur base de la courbe d'interface (pour un problème 2D). Cette surface, représentée sur la figure 5.1, possède une propriété majeure : elle intersecte le plan XY exactement au niveau de la courbe d'interface original. Ensuite, pour suivre la propagation de l'interface, l'idée consiste à **faire bouger la surface conique créée sur base de l'interface initiale et calculer l'évolution de son intersection avec le plan de hauteur nulle**.

¹Cette approche a été présentée et améliorée dans une cinquantaine d'articles et ouvrages de référence. Les principales idées qui seront exposées dans ce texte sont résumées dans l'ouvrage [Sethian,1999,a], ainsi que dans l'article de référence [Sethian,2001]

Mathématiquement, une fonction *Level Set* ϕ est définie et attribue une hauteur $z = \phi(x, y, t = 0)$ à chaque point de l'espace de départ. Le **choix de la fonction *Level Set*** n'est pas unique. Toute fonction continue sur le domaine de calcul et dont l'iso-courbe nulle définit l'interface peut être utilisée. Sethian, dans [Sethian,1999,a], propose d'utiliser la fonction distance à l'interface, qui vérifie bien évidemment ces deux conditions. Dans un article de fin 2006 [Olsson,2005], Olsson et Kreiss, propose d'utiliser une fonction caractéristique attribuant la valeur zéro à la zone sèche, la valeur 1 à la zone humide, et prenant des valeurs intermédiaires autour de l'interface sur une certaine épaisseur liée à la taille du maillage. Bien que mathématiquement séduisante, cette méthode mène à des difficultés numériques qui nous poussent à lui préférer une fonction distance. Selon cette dernière définition, l'interface correspond évidemment au niveau zéro de la fonction *Level Set*. Dans le paragraphe 5.2.1, la loi d'évolution de la fonction ϕ est dérivée de manière à assurer que le niveau zéro de la fonction corresponde à la position de l'interface à tout temps t . Ainsi, pour connaître la position à un temps quelconque t , il suffit de résoudre une équation différentielle dont les conditions initiales sont données par la position de l'interface au temps $t = 0$ et chercher la courbe de valeur nulle $\phi = 0$ de la fonction *Level Set* ainsi trouvée.

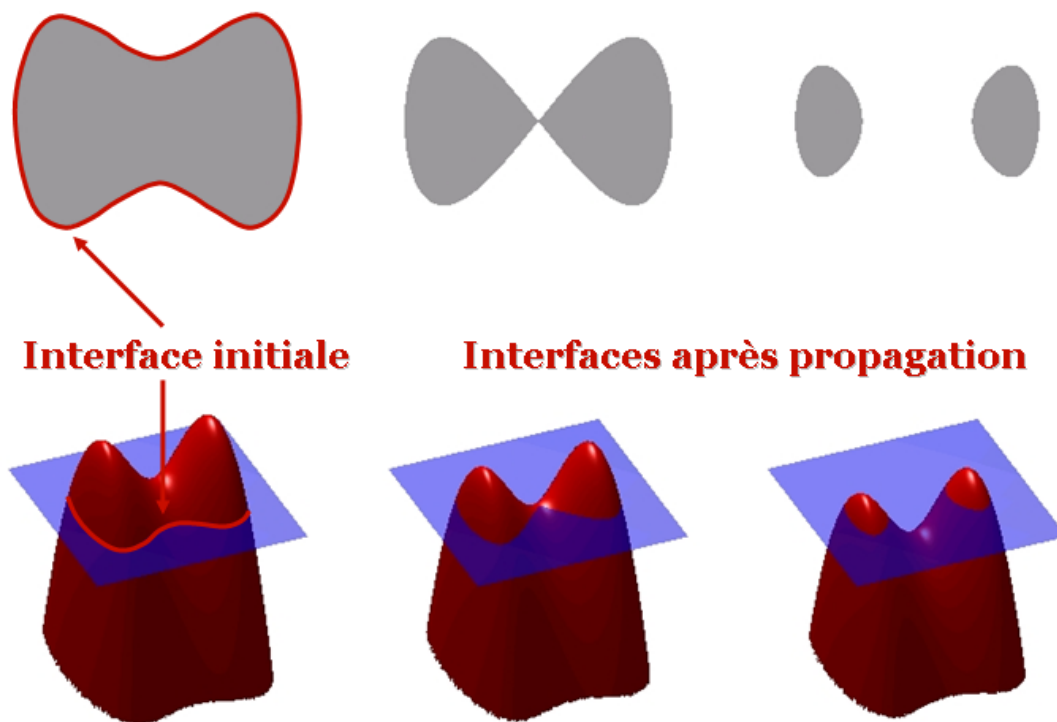


FIG. 5.1 – Évolution temporelle de la fonction Level Set [www.wikipeda.fr]

Pour résumer, l'approche *Level Set* transforme un problème géométrique à coordonnées mobiles (la propagation d'une courbe) en un problème à coordonnées fixes basé sur une fonction ϕ . A priori, cette approche semble complexifier le problème puisque le nombre de dimensions du problème est augmenté. Pourtant, les avantages de la méthode compensent totalement cette faiblesse :

1. la méthode reste inchangée si le nombre de dimensions augmente (il suffit de considérer, en toute généralité, l'interface comme une hypersurface) ;
2. la méthode traite les changements topologiques de l'interface (jonction ou séparation en plusieurs éléments) de manière tout à fait naturelle vu le choix de la valeur 0 pour caractériser l'interface (voir le diagramme 5.1) ;
3. les propriétés géométriques (normale \underline{n} et courbure κ) de l'interface sont aisément calculables :

$$\underline{n} = \frac{\nabla\phi}{\|\phi\|} \quad \kappa = \nabla \cdot \frac{\nabla\phi}{\|\phi\|} \quad (5.1)$$

4. les méthodes développées en dynamique de fluides sont applicables aux équations traitées.

5.2 Équation d'évolution de la fonction *Level Set*

5.2.1 Formulation

Étant donnée une interface Γ , la méthode *Level Set* consiste à introduire une fonction continue $\phi(\underline{x}, t)$ dont la courbe de niveau zéro représente l'interface :

$$\Gamma = \{\underline{x} | \phi(\underline{x}, t) = 0\} \quad (5.2)$$

Par extension, cette relation peut être généralisée à l'ensemble des lignes de niveaux définies par :

$$\Gamma_k = \{\underline{x} | \phi(\underline{x}, t) = C_k\} \quad (5.3)$$

Nous obtenons alors l'équation exacte qui doit être respectée pour que l'interface se propage à la bonne vitesse :

$$\frac{d\phi(\underline{x}, t)}{dt} = 0 \quad (5.4)$$

Grâce à quelques manipulations et en introduisant les conditions initiales, le **problème aux valeurs initiales** suivant est obtenu :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + (\underline{V} \cdot \underline{\nabla}) \phi = 0 \\ \phi(\underline{x}, t = 0) \text{ donné par } \Gamma \end{cases} \quad (5.5)$$

En introduisant la notion de vitesse normale à l'interface $F = \underline{V} \cdot \underline{n}$, il vient

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + F |\underline{\nabla} \phi| = 0 \\ \phi(\underline{x}, t = 0) \text{ donné par } \Gamma \end{cases} \quad (5.6)$$

Enfin, signalons une formulation conservative développée pour les fluides incompressibles par E. Marchandise et J.F. Remacle dans [Marchandise,2006] :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\underline{V} \phi) = 0 \\ \phi(\underline{x}, t = 0) \text{ donné par } \Gamma \end{cases} \quad (5.7)$$

Grâce à cette équation, il n'est plus nécessaire d'évaluer $\underline{\nabla} \phi$ qui mène à des instabilités en l'absence de réinitialisation de la fonction *Level Set*.

5.2.2 Choix de l'équation d'évolution

Le choix entre les 3 équations d'évolution (5.5) à (5.7) n'est pas aisé. Comme E. Marchandise et al. l'ont mis en évidence dans [Marchandise,2006], la forme conservative offre des performances supérieures aux autres. Néanmoins, cette formulation nécessite de connaître le champ de vitesse réel du fluide sur tout le domaine de calcul. Dans notre cas, contrairement aux écoulements diphasiques, ce champ n'est pas connu au-dessus de la surface libre.

La littérature scientifique ne propose pas de méthodologie pour reconstruire un champ de vitesse vectoriel \underline{v} sur tout le domaine de calcul, si bien que la formulation (5.7) n'est pas utilisable dans notre cas. Par contre, une démarche de calcul de *vitesses normales étendues* F a été développée avec succès et permet d'utiliser l'équation (5.5) en ne connaissant que la vitesse de l'interface. Cette démarche est présentée au paragraphe 5.4.1.

5.2.3 Nature mathématique

L'équation (5.5) d'évolution est une équation d'Hamilton-Jacobi. Cette équation correspond à une interrogation classique de la physique théorique et des mathématiques. Cet énoncé est en effet une reformulation de la mécanique classique et, ainsi, équivalente à d'autres formulations comme les lois de Newton, les mécaniques Lagrangienne ou Hamiltonienne. En particulier, l'équation d'Hamilton-Jacobi est la seule formulation de la mécanique dans laquelle le mouvement d'une particule peut être représenté comme une onde. La forme canonique de cette équation différentielle partielle non-linéaire du premier ordre pour une fonction $S(q_1, q_2, \dots, q_N, t)$ est la suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, q_2, \dots, q_N; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_N}; t\right) = 0 \\ S(q_1, q_2, \dots, q_N, t = 0) = S_0(q_1, q_2, \dots, q_N) \end{cases} \quad (5.8)$$

où q_1, q_2, \dots, q_N sont les variables du problème, H est un Hamiltonien localement Lipschitz continu² et S_0 est une condition initiale localement Lipschitz continu. Sous ce formalisme, l'équation d'évolution en 2D s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial t} + H\left(x, y, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}; t\right) = 0 \\ \phi(x, y, t = 0) = \phi_0(x, y) \end{cases} \quad (5.9)$$

où $H = F(x, y, t) \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2}$.

Solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi

Il a été montré, dans [Crandall,1983] notamment, que les solutions³ de (5.9) sont Lipschitz continues mais peuvent avoir des dérivées discontinues quelle que soit la régularité de ϕ_0 . En outre, comme il est démontré au paragraphe 5.2.3, la solution généralisée de (5.9) n'est pas unique. Ces deux difficultés ont amenés Crandall et Lions, dans [Crandall,1983], à introduire une généralisation du concept classique de ce que nous appelons une *solution* des équations différentielles partielles. Ils montrent en effet que pour de nombreuses équations différentielles partielles, dont l'équation d'Hamilton-Jacobi, la *solution de viscosité* est le concept naturel de solution !

²voir l'annexe C.4.3 page XLVIII

³Contrairement aux solutions des équations de conservation hyperboliques qui peuvent être discontinues.

Le concept classique de la solution stipule que l'équation $Q(x, u, du) = 0$ sur un domaine $x \in \Omega$ a une solution si nous pouvons trouver une fonction $u(x)$ continue et différentiable sur tout le domaine tel que x, u et Du satisfassent l'équation précédente en tout point.

Du point de vue du concept de solution de viscosité, u n'a pas besoin d'être différentiable partout (i.e. il peut y avoir des points où Du n'existe pas). En effet, une fonction continue $u(x)$ est solution de viscosité de $Q(x, u, du) = 0$ si elle est à la fois supersolution et suprasolution ⁴ de $Q(x, u, du) = 0$.

Lien avec les lois de conservation hyperbolique

On peut montrer qu'il existe un lien fort entre l'équation d'Hamilton-Jacobi et les lois de conservation hyperboliques. En effet, si nous posons $\underline{\nabla} \cdot \phi = \underline{u} = (u_x; u_y)$, la divergence de l'équation (5.5) devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot H(x, y; u_x; u_y; t) = 0 \\ \underline{u}(x, y, t = 0) = \underline{u}_0(x, y) \end{cases} \quad (5.12)$$

qui présente la forme d'une équation de conservation hyperbolique. En toute rigueur, il devrait être possible **de dériver des schémas de discrétisation fiables de l'équation d'Hamilton-Jacobi à partir des schémas relatifs aux lois de conservations hyperboliques**. Le traitement des lois de conservation hyperboliques est en effet un domaine relativement bien connu de la *computational fluid mechanics*. Ceci explique qu'il soit souvent dit que la méthode *Level Set* exploite un lien fort entre les interfaces mobiles et la mécanique des fluides numérique.

Ce lien explique qu'un résumé relativement complet sur les équations de conservation hyperbolique soit présenté dans l'annexe C page XXV. Nous supposons en effet que ces résultats sont applicables aux équations d'Hamilton-Jacobi moyennant quelques modifications ou remarques. Il n'existe pas encore de preuve mathématique indiscutable qui légitime cette généralisation. Néanmoins, le succès des nombreux essais pratiques, présentés dans [Crandall,1983], [Osher,1988], [Shu,1997],.... légitime l'utilisation de cette analogie.

⁴Si Du ne doit pas exister en certain point, le *superdifférentiel* D^+u et le *supradifférentiel* D^-u , définis par (5.10) et (5.11), doivent être utilisés en lieu et place de du

$$D^+u(x_0) = \left\{ p : \lim_{x \rightarrow x_0} \sup \frac{u(x_1) - u(x_0) - p(x_1 - x_0)}{|x_1 - x_0|} \leq 0 \right\} \quad (5.10)$$

$$D^-u(x_0) = \left\{ p : \lim_{x \rightarrow x_0} \inf \frac{u(x_1) - u(x_0) - p(x_1 - x_0)}{|x_1 - x_0|} \geq 0 \right\} \quad (5.11)$$

La notion de supersolution et suprasolution de viscosité de $Q(x, u, du) = 0$ peut être alors défini comme suit. Une fonction continue u est dite supersolution de viscosité si $Q(x, u, p) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega, \forall p \in D^+u$. Une fonction continue u est dite suprasolution de viscosité si $Q(x, u, p) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega, \forall p \in D^-u$.

Caractéristiques de l'équation

La mise sous forme caractéristique de la version 1D⁵ de l'équation (5.9) montre, assez trivialement, que

$$\frac{d\phi}{dt} = 0 \quad \text{le long de} \quad \frac{dx}{dt} = F(x,t) \quad (5.13)$$

La caractéristique (5.13) montre que la quantité conservée ϕ se propage avec la vitesse F sur tout le domaine. L'utilisation d'un schéma centré pour résoudre ces équations essentiellement convectives, réalisé dans les années 70 par de nombreux auteurs, a mis en évidence l'instabilité fondamentale de ce type de schémas. Courant a alors proposé d'introduire le sens de propagation des quantités conservées dans les schémas de discrétisation numérique. C'est ainsi que sont nés les schémas *upwind* ou *décentré amont*⁶, dont le décentrement est indispensable dans le cas de (5.9) et peut être réalisé de multiples manières.

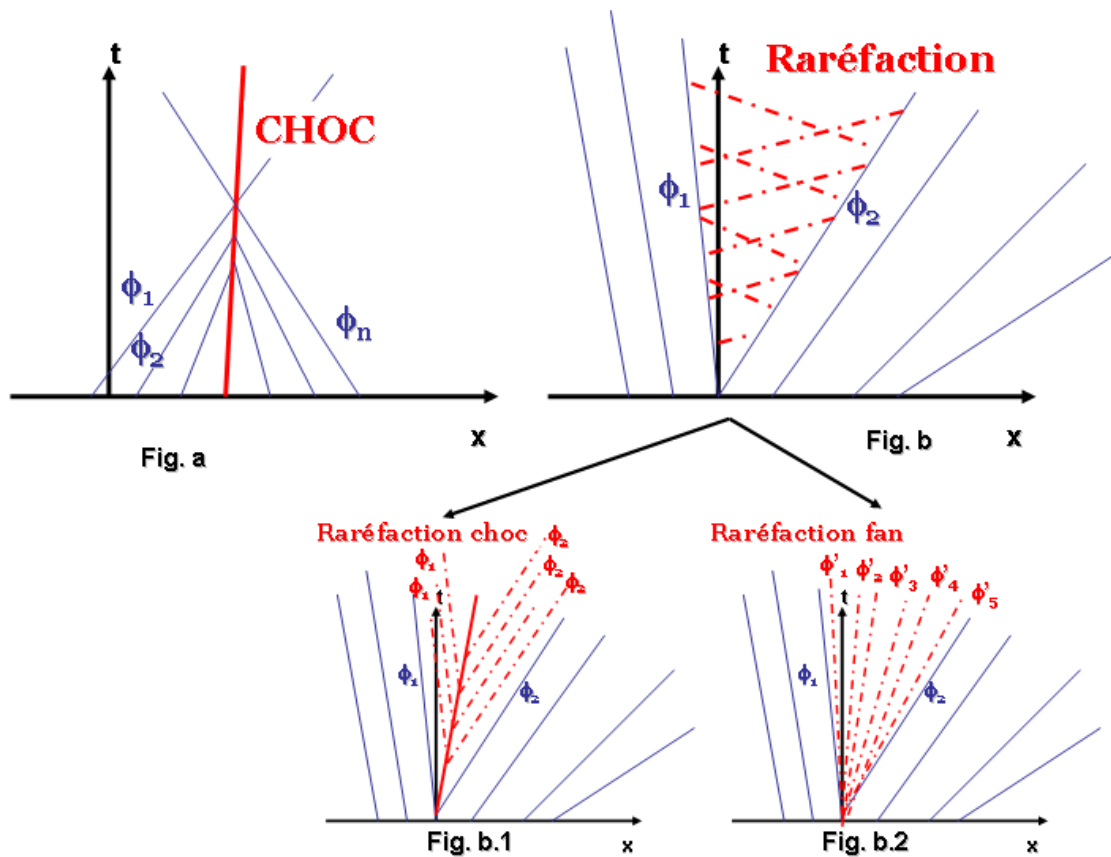


FIG. 5.2 – Forme des caractéristiques de l'équation d'évolution - choc et raréfaction

En outre, l'étude de la caractéristique permet de voir le problème de la non-unicité des solutions, présenté au paragraphe 5.2.3, sous un jour nouveau. En effet, si la valeur de ϕ reste

⁵Le lecteur notera que en 1D, l'équation d'Hamilton-Jacobi dégénère en équation de conservation hyperbolique si bien que les solutions peuvent devenir discontinues

⁶La nécessité de décentrer le schéma numérique peut également s'expliquer sur base du critère de Friedrich-Levy-Courant : le domaine de dépendance physique de ϕ doit être inclus dans le domaine de dépendance numérique utilisé dans le schéma.

constante le long d'une caractéristique, la pente de celle-ci varie avec le temps t et la position x . Cela donne lieu à deux situations singulières :

1. Les caractéristiques s'entrecroisent, forçant la fonction ϕ à prendre simultanément deux valeurs en un point unique (figure 5.2 a.). Cette ambiguïté sur la valeur de ϕ est appelée un *choc*. Le long de la ligne qui marque le *choc*, la solution est discontinue, sautant de la valeur à droite à la valeur à gauche.
2. Les caractéristiques divergent, laissant une zone non définie (figure 5.2 b.). Cette indétermination sur la valeur de ϕ est appelée une *raréfaction* ou *onde de propagation*. Cette zone correspond en réalité à la zone des *solutions faibles* de l'équation (i.e. solutions de l'équation intégrale). En général, les *solutions faibles* de l'équation ne sont pas uniques. La question qui se pose alors est de trouver comment générer la *solution faible* correcte. Deux solutions extrêmes sont envisageables :
 - (a) Le *raréfaction choc* caractérisé par un choc dans la zone de *raréfaction*, donc une discontinuité (figure 5.2 b.1).
 - (b) Le *raréfaction fan* caractérisé par une transition progressive entre les deux valeurs extrêmes de la zone de *raréfaction* (figure 5.2 b.2).

La solution qui est observée dans la nature est la seconde solution. Notons que cette solution correspond à la limite de la solution de l'équation

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + F \left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right| = v \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

lorsque $v \rightarrow 0$. Cette solution correspond donc bien à la notion de solution de viscosité introduite au paragraphe 5.2.3.

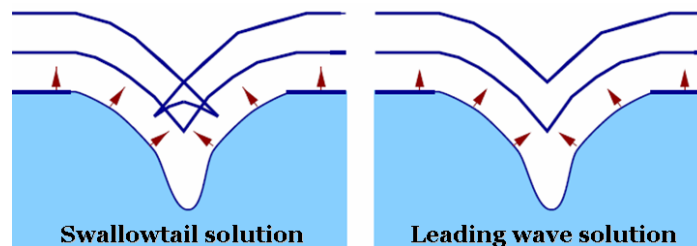


FIG. 5.3 – *Solutions faibles* du problème intégral [Sethian,1996,a]

Pour illustrer physiquement ces singularités, considérons la propagation d'une interface sinusoïdale à une vitesse $F = 1$ identique sur toute la longueur de l'interface. Il apparaît clairement (figure 5.3) que deux solutions se dégagent : la solution *swallowtail* dans laquelle la fonction ϕ prend deux valeurs en certains points et la solution *leading wave* qui correspond à une situation physiquement correcte. Il est donc indispensable de définir des schémas numériques qui fournissent des *solutions faibles* de l'équation de conservation. En outre, il convient donc de trouver une condition mathématique, dite d'*entropie*, pour savoir laquelle de ces solutions décrit le comportement physique souhaité. En pratique, cette condition d'*entropie* doit lisser numériquement les angles susceptibles de se former. Pour ce faire, il suffit de se baser sur

le second principe de la thermodynamique et ne sélectionner que les résultats correspondant à une variation négative d'entropie. L'expression de la condition d'entropie pour les lois de conservation hyperboliques est présentée dans l'annexe C.1.3 page XXVIII. Il est également montré dans cette annexe que la condition d'entropie est automatiquement vérifiée par les *schémas numériques upwind monotones*.

Phénomène de Gibbs

Les différences finies sont basées sur des interpolations de données discrètes utilisant des fonctions simples type polynôme. Pourvu que la fonction interpolée soit lisse dans le domaine d'interpolation, l'ordre de précision de l'approximation augmente avec la taille du domaine d'interpolation (i.e. avec le nombre de points utilisés dans l'interpolation).

Cependant, il a été mis en évidence que l'utilisation d'un schéma centré du premier ordre pour résoudre des équations essentiellement convectives génèrent des oscillations au voisinage des discontinuités de la solution. Ces oscillations, appelées *phénomène de Gibbs*, ne diminuent pas lorsque le maillage est raffiné. L'étude des caractéristiques, qui montre que l'information ne provient jamais des chocs, ainsi que celle du critère Friedrichs-Levy-Courant, qui assure la stabilité numérique du schéma lorsque le domaine de dépendance physique est inclu dans le domaine d'interpolation numérique, nous conduit à utiliser des schémas *décentrés amont* pour résoudre ce problème. En conclusion, l'introduction du sens de propagation des quantités conservées dans les schémas de discrétisation numérique doit nous prévenir de telles oscillations. C'est le cas pour les schémas du premier ordre.

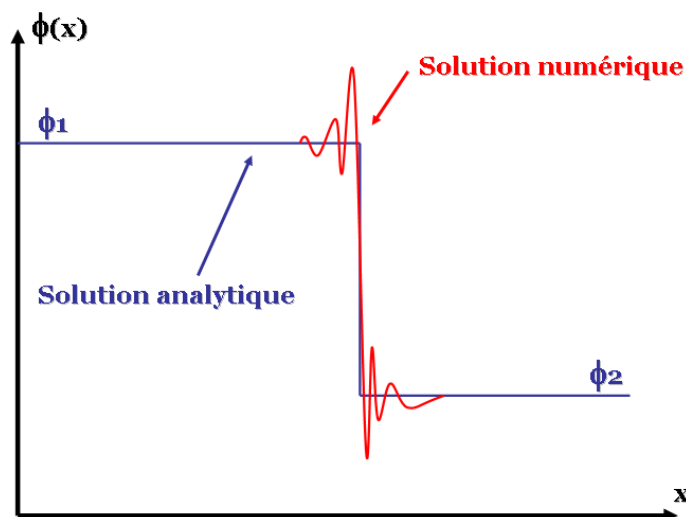


FIG. 5.4 – Phénomène de Gibbs

Malheureusement, nous observons que l'interpolation du second ordre ou d'ordre supérieur est nécessairement oscillatoire près des discontinuités, même si elle est décentrée amont. Les schémas numériques d'ordre élevé que nous élaborons doivent donc tenir compte de ce phénomène et permettre de le supprimer ou du moins le garder dans des limites acceptables. Nous verrons que cela est réalisé en utilisant des schémas *TVD*, *ENO* ou *WENO*.

5.2.4 Schéma du premier ordre de précision

La compréhension de cette partie nécessite d'être familier avec la théorie classique en *computational fluid dynamics* de la résolution des lois de conservation hyperboliques. Dans le cas contraire, j'invite le lecteur à se référer à l'annexe C page XXV résumant cette théorie fondamentale.

Schéma semi-discret conservatif

La formulation conservative semi-discrète (*method of lines*) sur un maillage carré uniforme de l'équation d'Hamilton-Jacobi (5.9) s'écrit sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\phi_{i,j}(t) = -\hat{H}\left(D_+^x\phi_{i,j}(t); D_-^x\phi_{i,j}(t); D_+^y\phi_{i,j}(t); D_-^y\phi_{i,j}(t)\right) \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \text{où } D_+^x\phi_{i,j}(t) &= \frac{\phi_{i+1,j}(t) - \phi_{i,j}(t)}{\Delta x} \\ D_-^x\phi_{i,j}(t) &= \frac{\phi_{i,j}(t) - \phi_{i-1,j}(t)}{\Delta x} \end{aligned}$$

où \hat{H} est l'Hamilton numérique supposé

1. localement Lipschitz continu
2. consistant avec l'équation continue $H : \hat{H}(u, u, v, v) = H(u, v)$
3. \hat{H} est monotone (i.e est non-croissant dans son premier et troisième argument et non-décroissant dans son deuxième et dernier argument) symboliquement noté $\hat{H}(\downarrow, \uparrow, \downarrow, \uparrow)$

Nous avons montré dans l'annexe C que la discrétisation sous forme d'un schéma numérique conservatif assure, par application du théorème de Lax-Wendroff, la convergence vers une *solution faible* du problème continu. Il reste alors à s'assurer que la *solution faible* obtenue est la solution physiquement la plus probable. L'utilisation d'un Hamiltonien monotone décentré amont assure que le schéma numérique vérifie la condition d'entropie et donc converge vers la solution correcte. Ce schéma est limité à 5 points car la théorie des lois de conservation hyperboliques montre que les schémas monotones sont intrinsèquement limités au premier ordre de précision.

Formulation des flux monotones

Par analogie avec les lois de conservation hyperboliques, les 2 flux monotones \hat{H} que nous proposons d'utiliser dans (5.14) sont :

1. Le flux de **Osher-Sethian** [Osher,1988] :

Pour le cas particulier $H(u, v) = f(u^2, v^2)$ où u est une fonction monotone des deux arguments, le flux d'Osher-Sethian, purement décentré amont, s'écrit

$$H^{OS}(u^+, u^-, v^+, v^-) = f(u^2, v^2) \quad (5.15)$$

où $u^2 = (\min(u^-, 0))^2 + (\max(u^+, 0))^2$ si $f'(u) \leq 0$

et $u^2 = (\min(u^+, 0))^2 + (\max(u^-, 0))^2$ si $f'(u) \geq 0$.

2. Le flux de **Osher-Engquist** [Osher,1989] :

Valable pour un Hamiltonien général, ce flux correspond à une reformulation du **flux de Godunov**, qui est un flux décentré amont, et s'écrit

$$H^{OE}(u^+, u^-, v^+, v^-) = \text{ext}_{u \in I(u^-, u^+)} \quad \text{ext}_{v \in I(v^-, v^+)} \quad H(u, v) \quad (5.16)$$

où $I(a, b) = [\min(a, b), \max(a, b)]$

et la fonction ext est définie par

$$\text{ext}_{u \in I(a, b)} = \begin{cases} \min_{a \leq u \leq b} & \text{si } a \leq b \\ \max_{b \leq u \leq a} & \text{si } a > b \end{cases}$$

Pour rappel, l'hamiltonien de Godunov est obtenu en résolvant exactement le problème de Riemann au niveau des interfaces du maillage et en supposant que la fonction u est constante par partie sur le maillage. La formulation Osher-Sethian est basée sur une solution approximée du problème de Riemann. Ce schéma est le moins dissipatif des flux monotones disponibles.

3. Il existe d'autres flux tout à fait utilisables en pratique mais que nous n'envisageons pas ici : le flux de **Lax-Friedrichs** [Crandall,1984], le flux de **Lax-Friedrichs local** [Shu,1989], le flux de **Roe** avec correction d'entropie [Shu,1989].

Schéma discret du premier ordre de précision

Dans [Sethian,1999,a], un schéma conservatif du premier ordre de précision décentré amont et monotone est introduit. Temporellement, une simple discrétisation d'Euler est utilisée. Spatialement, ce schéma repose sur le flux monotone d'Osher-Sethian. Puisque le signe de $f'(u)$ est le même que celui de F , le cas du flux non-décroissant $F > 0$ est séparé du cas du flux non-croissant $F < 0$ grâce à une formulation compact min-max :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^n - \Delta t [\max(F_{i,j}, 0) \nabla^+ \phi^n + \min(F_{i,j}, 0) \nabla^- \phi^n] \\ \text{où} \quad \nabla^+ = \left[\begin{array}{l} \max(D_{i,j}^{-x}, 0)^2 + \min(D_{i,j}^{+x}, 0)^2 \\ + \max(D_{i,j}^{-y}, 0)^2 + \min(D_{i,j}^{+y}, 0)^2 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \text{où} \quad \nabla^- = \left[\begin{array}{l} \max(D_{i,j}^{+x}, 0)^2 + \min(D_{i,j}^{-x}, 0)^2 \\ + \max(D_{i,j}^{+y}, 0)^2 + \min(D_{i,j}^{-y}, 0)^2 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}} \end{array} \right. \quad (5.17)$$

Il est ainsi obtenu un schéma du premier ordre en temps et espace. La monotonie du flux nous assure simultanément de converger vers la *solution faible* physiquement acceptable et l'absence d'oscillations. Nous proposons maintenant de créer des schémas d'ordres supérieurs toujours en se basant sur les résultats de la *computational fluid dynamics*.

Les valeurs ∇^+ et ∇^- sont construites sur base des schémas ENO où la procédure est simplifiée par application de la fonction $m(x, y)$ qui correspond au *limitateur minmod* bien connu pour les schémas TVD. En effet, les valeurs $\frac{\partial\phi^+}{\partial x}$ et $\frac{\partial\phi^-}{\partial x}$ sont obtenues par une interpolation au second ordre. Pour $\frac{\partial\phi^+}{\partial x}$, les domaines d'interpolation possibles sont $\{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}$ ou $\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$. La fonction minmod permet de choisir le domaine qui fournit la valeur de $\frac{\partial\phi^+}{\partial x}$ la plus faible. Autrement dit, on utilise la dérivée seconde de ϕ comme mesure de la variation de la solution numérique.

Schéma discret ENO du troisième ordre de précision

Nous pouvons résumer l'algorithme, présenté initialement dans [Osher,1991], par la procédure suivante basée sur une discrétisation spatiale de type ENO itérative et une discrétisation temporelle de type Runge-Kutta TVD à trois pas :

1. En chaque point (i, j) , fixer j et calculer le long de l'axe x l'expression de $P_{i+1/2,j}^{\phi,3}(x)$ par la procédure inductive suivante :

- (a) Connaissant $\phi(x_{i,j})$ en chaque point discret $x_{i,j}$, on pose

$$P_{i+1/2,j}^{\phi,1}(x) = \phi[x_{i,j}] + \phi[x_{i,j}, x_{i+1,j}](x - x_{i,j})$$

$$k_{min} = i$$

- (b) Si k_{min}^{l-1} et $P_{i+1/2,j}^{\phi,l-1}(x)$ sont tous deux définis, alors poser⁷

$$a^{(l)} = \phi[x_{k_{min}^{l-1},j}, x_{k_{min}^{l-1}+l,j}]$$

$$b^{(l)} = \phi[x_{k_{min}^{l-1}-1,j}, x_{k_{min}^{l-1}+l-1,j}]$$

- (c) Si $|a^{(l)}| \geq |b^{(l)}|$, alors $c^{(l)} = b^{(l)}$ et $k_{min}^l = k_{min}^{l-1} - 1$
 Si $|b^{(l)}| \geq |a^{(l)}|$, alors $c^{(l)} = a^{(l)}$ et $k_{min}^l = k_{min}^{l-1}$

- (d) $P_{i+1/2,j}^{\phi,l}(x) = P_{i+1/2,j}^{\phi,l-1}(x) + c^{(l)} \prod_{i=k_{min}^{l-1}}^{k_{min}^{l-1}+l-1} (x - x_i)$

- (e) Retourner à l'étape (b) tant que $l < 3$ pour un troisième ordre de précision souhaité.

La procédure est identique pour $P_{i-1/2,j}^{\phi,3}(x)$, $P_{i,j+1/2}^{\phi,3}(y)$ et $P_{i,j-1/2}^{\phi,3}(y)$.

2. Calculer les valeurs

$$u_{i,j}^{\pm} = \frac{d}{dx} P_{i\pm 1/2,j}^{\phi,3}(x_i)$$

$$v_{i,j}^{\pm} = \frac{d}{dy} P_{i,j\pm 1/2}^{\phi,3}(y_j)$$

⁷ $\phi[\dots, \dots, \dots]$ est la classique différence divisée de Newton définie dans l'annexe C

3. Poser $L_{i,j} = -\Delta t [\max(F_{i,j}, 0) \nabla^+ + \min(F_{i,j}, 0) \nabla^-]$

$$\text{où } \nabla^+ = \left[\begin{array}{c} \max(u_{i,j}^-, 0)^2 + \min(u_{i,j}^+, 0)^2 \\ + \max(v_{i,j}^-, 0)^2 + \min(v_{i,j}^+, 0)^2 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{et } \nabla^- = \left[\begin{array}{c} \max(u_{i,j}^+, 0)^2 + \min(u_{i,j}^-, 0)^2 \\ + \max(u_{i,j}^+, 0)^2 + \min(v_{i,j}^-, 0)^2 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}}$$

4. Calculer ϕ^{n+1} à partir de ϕ^n par la procédure de Runge-Kutta suivante

$$\begin{aligned} \phi_{i,j}^{(1)} &= \phi_{i,j}^n + L_{i,j}^n \\ \phi_{i,j}^{(2)} &= \frac{3}{4}\phi_{i,j}^n + \frac{1}{4}\phi_{i,j}^{(1)} + \frac{1}{4}L_{i,j}^{(1)} \\ \phi_{i,j}^{n+1} &= \frac{1}{3}\phi_{i,j}^n + \frac{2}{3}\phi_{i,j}^{(2)} + \frac{2}{3}L_{i,j}^{(1)} \end{aligned} \quad (5.20)$$

5. Si le schéma d'Euler décentré amont est TVD sous le critère CFL $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \lambda_0$, alors le schéma de Runge-Kutta est TVD sous le critère CFL $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \lambda_0$.

Schéma discret WENO du cinquième ordre de précision

Présenté initialement dans [Shu,1990], les schémas *Weighted Essentially Non-Oscillatory* fournissent une méthode simple pour doubler l'ordre de précision des schémas ENO présentés ci-dessus sans complexifier notablement la discrétisation. Nous présentons ici le schéma WENO du cinquième ordre de précision en espace introduit dans [Jiang,2000] :

$$\frac{d\phi_{i,j}}{dt} = L(\phi)_{i,j} = -\hat{H}(x_i, y_j, t, D_+^x \phi_{i,j}, D_-^x \phi_{i,j}, D_+^y \phi_{i,j}, D_-^y \phi_{i,j}) \quad (5.21)$$

où $D_{\pm}^x \phi_{i,j}$ sont les approximations WENO de $\frac{\partial \phi}{\partial x}(x_i, y_j)$ définies par la formule d'interpolation 1D :

$$\begin{aligned} D_{\pm}^x \phi_{i,j} &= \frac{1}{12} \left(-\frac{\Delta_x^+ \phi_{i-2,j}}{\Delta x} + 7\frac{\Delta_x^+ \phi_{i-1,j}}{\Delta x} + 7\frac{\Delta_x^+ \phi_{i,j}}{\Delta x} - \frac{\Delta_x^+ \phi_{i+1,j}}{\Delta x} \right) \\ &\pm \Phi^{WENO} \left(\frac{\Delta_x^- \Delta_x^+ \phi_{i\pm 2,j}}{\Delta x}, \frac{\Delta_x^- \Delta_x^+ \phi_{i\pm 1,j}}{\Delta x}, \frac{\Delta_x^- \Delta_x^+ \phi_{i,j}}{\Delta x}, \frac{\Delta_x^- \Delta_x^+ \phi_{i\mp 1,j}}{\Delta x} \right) \end{aligned} \quad (5.22)$$

et $D_{\pm}^y \phi_{i,j}$ sont les approximations WENO de $\frac{\partial \phi}{\partial y}(x_i, y_j)$ définies par la formule d'interpolation 1D :

$$\begin{aligned} D_{\pm}^y \phi_{i,j} &= \frac{1}{12} \left(-\frac{\Delta_y^+ \phi_{i-2,j}}{\Delta y} + 7\frac{\Delta_y^+ \phi_{i-1,j}}{\Delta y} + 7\frac{\Delta_y^+ \phi_{i,j}}{\Delta y} - \frac{\Delta_y^+ \phi_{i+1,j}}{\Delta y} \right) \\ &\pm \Phi^{WENO} \left(\frac{\Delta_y^- \Delta_y^+ \phi_{i\pm 2,j}}{\Delta y}, \frac{\Delta_y^- \Delta_y^+ \phi_{i\pm 1,j}}{\Delta y}, \frac{\Delta_y^- \Delta_y^+ \phi_{i,j}}{\Delta y}, \frac{\Delta_y^- \Delta_y^+ \phi_{i\mp 1,j}}{\Delta y} \right) \end{aligned} \quad (5.23)$$

où la fonction Φ^{WENO} est définie par

$$\Phi^{WENO}(a, b, c, d) = \frac{1}{3}w_0(a - 2b + c) + \frac{1}{6} \left(w_2 - \frac{1}{2} \right) (b - 2c + d) \quad (5.24)$$

et les poids w_0, w_2 et les *indicateurs de régularités* $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ sont définis par

$$w_0 = \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2} \quad w_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2} \quad (5.25)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{(\epsilon + \beta_0)^2} \quad \alpha_1 = \frac{6}{(\epsilon + \beta_1)^2} \quad \alpha_2 = \frac{3}{(\epsilon + \beta_2)^2} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 13(a-b)^2 + 3(a-3b)^2 \\ \beta_0 &= 13(b-c)^2 + 3(b+c)^2 \\ \beta_0 &= 13(c-d)^2 + 3(3c-d)^2 \end{aligned} \quad (5.27)$$

Ici, ϵ est utilisé pour éviter que le dénominateur ne s'annule et est pris égal à 10^{-6} .

La définition (5.26) des poids résulte de deux principes généraux :

1. Si ϕ est lisse sur l'entièreté du domaine d'interpolation, alors nous imposons que

- (a) $w_0 = 0.1 + 0(\Delta x^2)$,
- (b) $w_1 = 0.6 + 0(\Delta x^2)$,
- (c) $w_2 = 0.3 + 0(\Delta x^2)$,

ce qui revient à s'assurer que (5.21) est une approximation du cinquième ordre de précision. Le choix $w_0 = 0.1, w_1 = 0.6$ et $w_2 = 0.3$ permet d'atteindre la plus petite erreur de troncature.

2. Si le domaine d'interpolation *WENO* contient une singularité de ϕ , les poids tendent vers 0 ou 1 de manière à ce que le domaine d'interpolation *WENO* tende vers un domaine *ENO* qui ne contient pas la discontinuité.

Le flux numérique monotone \hat{H} Lipschitz continue peut être choisi parmi les flux classiques présentés dans l'annexe C. Dans ce texte, nous proposons de se focaliser sur le flux de *Osher-Sethian* déjà utilisé dans les schémas précédents

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\phi_{i,j}}{dt} = -\Delta t [\max(F_{i,j}, 0) \nabla^+ \phi^n + \min(F_{i,j}, 0) \nabla^- \phi^n] = L(\phi^n) \\ \text{où} \quad \nabla^+ = \left[\begin{array}{l} \max(D_{i,j}^{-x}, 0)^2 + \min(D_{i,j}^{+x}, 0)^2 \\ + \max(D_{i,j}^{-y}, 0)^2 + \min(D_{i,j}^{+y}, 0)^2 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \text{où} \quad \nabla^- = \left[\begin{array}{l} \max(D_{i,j}^{+x}, 0)^2 + \min(D_{i,j}^{-x}, 0)^2 \\ + \max(D_{i,j}^{+y}, 0)^2 + \min(D_{i,j}^{-y}, 0)^2 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}} \end{array} \right. \quad (5.28)$$

Concernant la discrétisation temporelle, il est prouvé dans [Gottlieb,1998] qu'aucun schéma de Runge-Kutta à 4 pas ou plus n'est TVD pour des coefficients $\alpha_{i,k}$ et $\beta_{i,k}$ non-négatifs. Pour pouvoir utiliser des valeurs de $\beta_{i,k}$ ($\alpha_{i,k} \geq 0$), nous savons que l'opérateur adjoint \tilde{L} doit être défini et qu'il faut prouver la stabilité du schéma d'Euler décentré aval (annexe C). Comme il ne semble pas possible de faire une telle preuve de stabilité, nous considérons ici un schéma de Runge-Kutta non TVD à 5 pas :

$$\begin{aligned}
 \phi_{i,j}^{(1)} &= \phi_{i,j}^n + \frac{1}{2}\Delta t L(\phi^n) \\
 \phi_{i,j}^{(2)} &= \frac{3}{4}\phi_{i,j}^n + \frac{1}{4}\phi_{i,j}^{(1)} + \frac{1}{8}\Delta t L(\phi^{(1)}) \\
 \phi_{i,j}^{(3)} &= \frac{3}{8}\phi_{i,j}^n - \frac{1}{8}\Delta t L(\phi^n) + \frac{1}{8}\phi_{i,j}^{(1)} - \frac{1}{16}\Delta t L(\phi^{(1)}) + \frac{1}{2}\phi_{i,j}^{(2)} + \frac{1}{2}\Delta t L(\phi^{(2)}) \\
 \phi_{i,j}^{(4)} &= \frac{1}{4}\phi_{i,j}^n - \frac{5}{64}\Delta t L(\phi^n) + \frac{1}{8}\phi_{i,j}^{(1)} - \frac{13}{64}\Delta t L(\phi^{(1)}) + \frac{1}{8}\phi_{i,j}^{(2)} + \frac{1}{8}\Delta t L(\phi^{(2)}) \\
 &\quad + \frac{1}{2}\phi_{i,j}^{(3)} + \frac{9}{16}\Delta t L(\phi^{(3)}) \\
 \phi_{i,j}^{(5)} &= \frac{89537}{2880000}\phi_{i,j}^n + \frac{2276219}{40320000}\Delta t L(\phi^n) + \frac{407023}{2880000}\phi_{i,j}^{(1)} + \frac{407023}{672000}\Delta t L(\phi^{(1)}) + \frac{1511}{12000}\phi_{i,j}^{(2)} \\
 &\quad + \frac{1511}{2800}\Delta t L(\phi^{(2)}) + \frac{87}{200}\phi_{i,j}^{(3)} - \frac{261}{140}\Delta t L(\phi^{(3)}) + \frac{4}{15}\phi_{i,j}^{(4)} + \frac{8}{7}\Delta t L(\phi^{(4)}) \\
 \phi_{i,j}^{n+1} &= \frac{4}{9}\phi_{i,j}^n + \frac{1}{15}\phi_{i,j}^{(1)} - \frac{8}{45}\Delta t L(\phi^{(1)}) + \frac{8}{45}\phi_{i,j}^{(3)} + \frac{2}{3}\Delta t L(\phi^{(3)}) + \frac{14}{15}\phi_{i,j}^{(5)} + \frac{7}{90}\Delta t L(\phi^{(5)})
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

5.3 Méthode *Fast Marching*

5.3.1 Problème eikonale

La méthode *Fast Marching*, proposée par Sethian dans [Sethian,1996,b] est une technique de différence finie pour résoudre l'équation eikonale :

$$\begin{cases} |\nabla T| F(x, y, z) = 1 \\ T = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad (5.30)$$

Cette équation est un problème bien connu en physique, en particulier en mécanique ondulatoire. L'équation peut en effet être vue comme un problème de propagation de front d'onde pour un front initialement situé en Γ et se propageant à une vitesse $F(x, y, z) > 0$. Notons que ce problème est une équation différentielle partielle aux valeurs frontières, par opposition à la méthode *Level Set* qui repose sur une équation différentielle partielle aux valeurs initiales.

On peut exposer le principe de la méthode de manière simple. Considérons un maillage uniforme du domaine de calcul. Supposons qu'un observateur se place sur chaque noeud et note le temps T auquel le front l'atteint. La distribution des valeurs de $T(x, y)$ constitue une fonction sur le domaine de calcul. Si l'interface initiale est un cercle et la vitesse de propagation constante, la fonction $T(x, y)$ prend la forme d'un cône (figure 5.5). Cette surface possède à nouveau la propriété majeure de couper le plan (x, y) exactement où la courbe se trouve initialement. Autrement dit, à chaque ligne de niveau de hauteur T correspond l'interface atteinte au temps $t = T$.

L'idée de base de la méthode *Fast Marching* consiste à **construire la surface conique** $T(x, y)$ en ne passant qu'une fois par chaque maille du domaine de calcul. Pour ce faire, l'algorithme identifie la maille *la plus proche* (en tenant compte de la vitesse $F(x, y)$) de l'interface déjà construite et calcule la valeur de T dans cette maille. **De proche en proche**, tout le domaine est couvert assez rapidement.

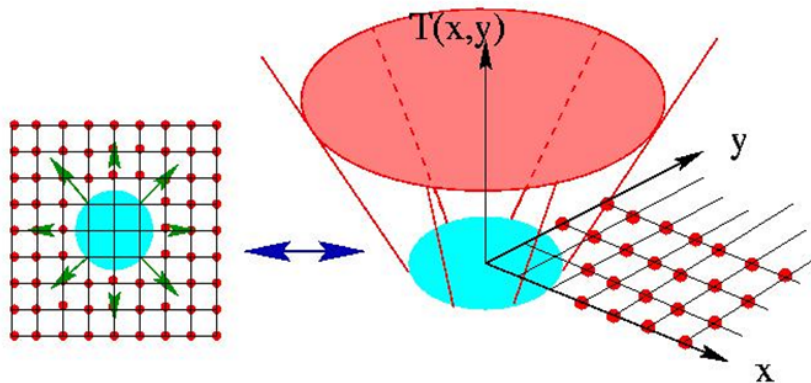


FIG. 5.5 – Principe de la méthode *Fast Marching* [Sethian,1999,a]

Le grand avantage de la méthode est de traiter une fonction $T(x, y)$ restant régulière et de comportement adapté même si le front évolue. De plus, cette méthode est incroyablement rapide car elle ne passe qu'une fois par chaque maille du domaine de calcul.

5.3.2 Lien avec les problèmes de suivi d'interface

Application au suivi d'interface

La méthode *Fast Marching* constitue une méthode rapide de suivi d'interface, remplaçant la méthode *Level Set*, applicable aux problèmes dans lesquels la vitesse F est variable mais ne change pas de signe sur le domaine de calcul. Dans ce cas, le problème instationnaire (*Level Set*) est remplaçable par un problème stationnaire (*Fast Marching*).

En effet, connaissant l'interface initiale et le champ de vitesse, il est possible de construire, de proche en proche, selon la démarche présentée au paragraphe 5.3.4, la fonction $T(x, y)$ sur tout le domaine de calcul. Ensuite, pour un temps $t = T$ quelconque, **la forme de l'interface est construite en positionnant la courbe de niveau $t(x, y) = T$ grâce aux algorithmes de visualisation** présentés au paragraphe 5.4.4.

Malheureusement, dans le cadre de notre étude, le champ de vitesse étendue F n'est pas de signe constant et n'est pas connu à priori si bien que l'application de la méthode *Fast Marching* en remplacement de la méthode *Level Set* n'est pas possible. Néanmoins, cette méthode peut être utilisée pour accélérer la méthode *Level Set*.

Utilisation dans la méthode *Level Set*

Notre intérêt dans le cadre de la modélisation d'un écoulement instationnaire se limite à utiliser la méthode *Fast Marching* pour construire un **schéma efficace de (ré)initialisation de la fonction *Level Set* et pour assurer la construction des vitesses étendues**. Ces deux problèmes doivent en effet être résolus à chaque itération de la méthode *Level Set* et il est donc vital de créer un schéma efficace. Ces deux applications sont traitées en détail dans le paragraphe 5.4 page 95.

5.3.3 Equation eikonale approchée

Considérons un schéma de différence finie décentré amont du premier ordre de précision pour la résolution de l'équation eikonale 2D :

$$\sqrt{\max(D_{i,j}^{-x}T, 0)^2 + \min(D_{i,j}^{+x}T, 0)^2 + \max(D_{i,j}^{-y}T, 0)^2 + \min(D_{i,j}^{+y}T, 0)^2} = \frac{1}{F_{i,j}} \quad (5.31)$$

où $D^{-x}T = \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x}$

Dans [Sethian,1996,a], Sethian suggère néanmoins fortement d'utiliser des schémas discrétisés d'ordre de précision plus élevé. Ainsi, on peut écrire un schéma de différence finie décentré amont du second ordre de précision :

$$\sqrt{\max(A, 0)^2 + \min(B, 0)^2 + \max(C, 0)^2 + \min(D, 0)^2} = \frac{1}{F_{i,j}} \quad (5.32)$$

où A, B, C et D ont été définis au paragraphe 5.2.5 page 86.

5.3.4 Algorithme de la méthode *Fast Marching*

La méthode *Fast Marching* est liée au principe de Huygens pour la propagation des ondes lumineuses : des fronts d'ondes circulaires sont tracés en chaque point de l'interface de départ, avec un rayon proportionnel à la valeur $F(\underline{x})$ en ce point. L'enveloppe de ces fronts d'ondes est alors construite et définit une nouvelle interface. La procédure est ensuite répétée.

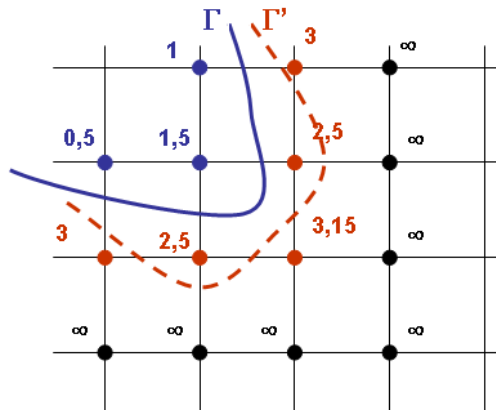


FIG. 5.6 – Principe de la méthode *Fast Marching*

La méthode *Fast Marching* imite cette construction :

- Initialisation :
 - supposons que l'on connaisse la solution du problème de eikonale au temps $t = 0$ (Points bleu) ;
 - attribuons l'état *accepted* à ces points ;
 - attribuons l'état *considered* à tous les points voisins des points *accepted* qui ne sont pas *accepted* (Points rouge) ;
 - attribuons l'état *far* à tous les autres points ;
 - calculons les valeurs de T aux points *considered* grâce à la relation (5.31) en supposant que les points *far* et *considered* ont la valeur ∞ ;
- Boucle :
 - attribuons l'état *trial* aux points *considered* avec la plus petite valeur de T ;
 - attribuons l'état *considered* à tous les voisins des points *trial* qui ne soient pas *accepted* ;
 - calculons les valeurs de T aux points *considered* voisins des points *trial* grâce à la relation (5.31) en supposant que les points *far* et *considered* ont la valeur ∞ ;

- puisque les valeurs minimales obtenues sont les valeurs correctes de T , attribuons l'état *accepted* aux points *trial* ;
- recommencer jusqu'à ce que tous les points soient *accepted*.

Le point clé de cet algorithme est d'implémenter une méthode efficace pour trouver les points de valeur minimum dans la bande étroite des valeurs *considered*. Pour ce faire, Sethian, dans [Sethian,1996,a], propose d'utiliser **une structure de données *min-heap*** avec des pointeurs arrières pour stocker les valeurs de T calculées. La structure *Min-heap* n'est rien d'autre qu'un arbre binaire complet avec la propriété que la valeur en un noeud est inférieure ou égale à celle de ses enfants. Ce faisant, la méthode *fast marching* nécessite $O(N \log N)$ opérations.

5.4 Opérations complémentaires à la méthode *Level Set*

5.4.1 Construction de la *vitesse étendue*

Utilité

La construction de l'équation différentielle partielle (5.5) signifie que la vitesse F est maintenant définie pour tous les niveaux de la fonction *Level Set*, pas uniquement pour le niveau zéro correspondant à l'interface. Pour spécifier ce nouveau champ de vitesse, dit *vitesse étendue*, la notation F^{ext} est utilisée. Il est donc indispensable de trouver une méthode générale de construction du champ de vitesse étendue, car celui-ci ne possède souvent pas de signification physique.

Pour ce faire, la liberté laissée par la méthode *Level Set* est relativement grande. Il est seulement nécessaire que $F^{ext} = F$ sur l'interface Γ . Dans la publication originale de la méthode *Level Set* [Osher,1988], la vitesse était directement liée à la courbure si bien que les vitesses étendues étaient construites en utilisant la géométrie de chaque ligne de niveau. En mécanique des fluides, selon [Rhee,1995], il est possible de choisir directement la vitesse du fluide comme la vitesse étendue. Néanmoins, comme signalé au paragraphe 5.2.2, le champ de vitesse n'est pas connu au-dessus de la surface libre dans notre application, rendant ce choix impossible.

Si le choix de ces vitesses est laissé à l'appréciation de chacun, il est cependant souhaitable que le champ de vitesse étendue entraîne le mouvement des niveaux au voisinage de l'interface de telle manière que l'écartement des lignes de niveau soit préservé. Autrement dit, il est intéressant de s'assurer que **la fonction *Level Set* garde la structure d'une fonction distance signée lors de son évolution**. Dans [Sethian,2001], Sethian a montré que cette condition est assurée si les champs F^{ext} et ϕ vérifient l'équation suivante :

$$\underline{\nabla} F^{ext} \cdot \underline{\nabla} \phi = 0 \quad (5.33)$$

L'application de cette formule à un très haut ordre de précision couplée à une résolution numérique de très haute précision de l'équation d'évolution doit permettre, en théorie du moins, de se passer de la phase de réinitialisation présentée dans le paragraphe 5.4.3.

Mise en oeuvre

Dans la grande majorité des publications relatives aux écoulements incompressibles, le champ de vitesse réel \underline{v} est utilisé. La seule stratégie de construction d'une *vitesse étendue* ne possédant pas de sens physique qui soit proposée dans la littérature est attribuable à Adalsteinsson et Sethian dans [Adalsteinsson,1999]. Elle consiste à intégrer la construction du champ de vitesse étendue selon la formule (5.33) dans la phase de réinitialisation de la fonction *Level Set* (voir le paragraphe 5.4.3). En pratique, connaissant ϕ^n à l'instant n , **la stratégie revient à déterminer simultanément une fonction de distance signée correcte $\tilde{\phi}^n$ et**

une vitesse étendue F^{ext} . A l'issue de cette opération, la fonction ϕ^n sera ou non remplacée par $\tilde{\phi}^n$ suivant la précision avec laquelle $\tilde{\phi}^n$ a été évalué. Pour ce faire, ils résolvent le *problème d'eikonale* grâce à une application de la méthode *Fast Marching*. Les détails de cette méthode sont présentés dans le paragraphe 5.4.3.

5.4.2 Initialisation de la fonction *Level Set*

La méthode *Level Set* est un problème aux valeurs initiales. Il est donc indispensable d'initialiser la méthode en construisant la fonction distance signée qui sert de valeurs initiales pour ϕ . Pour ce faire, on peut utiliser une méthode de mesure directe de la distance d'une maille quelconque à l'interface. Néanmoins, ces méthodes sont peu efficaces et on leur préférera un **algorithme basé sur la méthode *Fast Marching***, présentée au paragraphe 5.3. En effet, il suffit de résoudre l'équation eikonale (5.31) en supposant que $F_{i,j} = 1$. L'algorithme proposé au paragraphe 5.3.4 est alors applicable tel quel en remplaçant T par ϕ .

Néanmoins, cette méthode, pour être appliquée, nécessite de connaître initialement la valeur de ϕ sur un certain nombre de mailles autour de l'interface. Les autres valeurs sont alors déduites par application de la méthode *fast marching*. On parle d'**initialisation de la méthode *fast marching***. Ce calcul des distances de l'interface aux mailles d'initialisation est une des difficultés principales de la méthode. Dans ce texte, nous étudions une méthode, proposée par Sethian dans [Sethian,1999,a,page 134], qui utilise seulement l'intersection du front d'onde avec les lignes de noeuds.

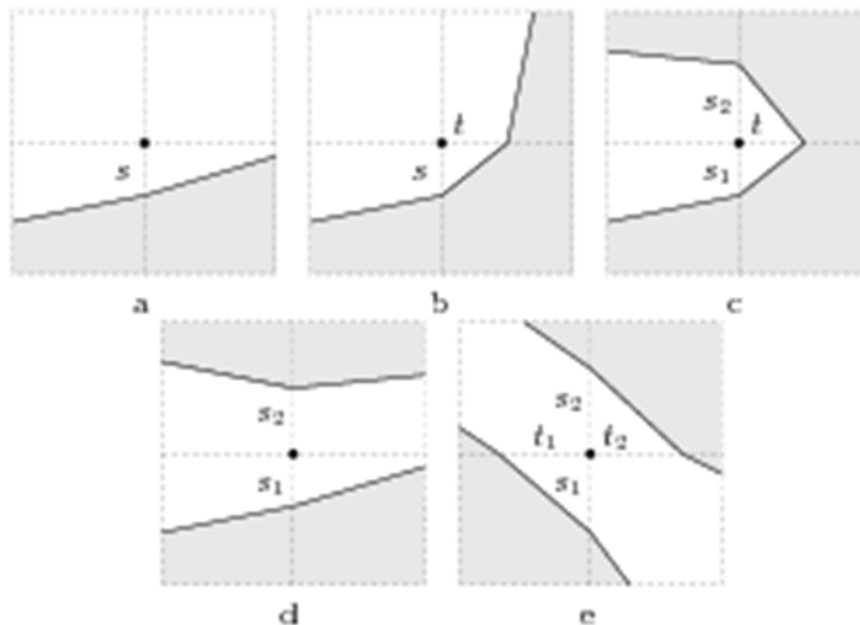


FIG. 5.7 – Configurations possibles pour le calcul des distances à l'interface

Grâce aux diverses symétries, il n'existe que cinq cas possibles qu'il est nécessaires de considérer (voir la figure 5.7) :

- a. Seul un des points voisins est de l'autre côté du front : la distance s est définie comme la distance entre le noeud et l'intersection de l'interface avec la ligne de noeuds. Cette valeur est plus grande que la valeur réelle, mais la plupart du temps, la valeur au noeud de l'autre côté de la surface est la distance au même point si bien que la ligne de niveau zéro ne sera affectée par cette erreur.

$$d = s$$

- b. Deux des points voisins sont de l'autre côté du front : si s et t sont les distances du noeud aux points d'intersections de l'interface avec les lignes de noeuds, la distance exacte vérifie :

$$\left(\frac{d}{s}\right)^2 + \left(\frac{d}{t}\right)^2 = 1$$

- c. La distance exacte est la solution positive de

$$\left(\frac{d}{\min(s_1, s_2)}\right)^2 + \left(\frac{d}{t}\right)^2 = 1$$

- d. La distance approximative est la solution de

$$d = \min(s_1, s_2)$$

- e. La distance exacte est la solution de

$$\left(\frac{d}{\min(s_1, s_2)}\right)^2 + \left(\frac{d}{\min(t_1, t_2)}\right)^2 = 1$$

Notons que la distance n'est pas exacte mais approchée dans les seuls cas 1 et 3.

5.4.3 Algorithmes de (ré)initialisation

Utilité

Selon [Tanguy,2004], il a été constaté, dans les premières applications de la méthode Level Set, que **l'entre-distance des lignes de niveau de la fonction *Level Set* n'est pas toujours conservée lors de l'évolution temporelle de cette fonction**. Autrement dit, la solution de l'équation d'évolution temporelle n'est plus nécessairement une fonction distance. Ces imprécisions peuvent même mener à des instabilités de la méthode.

Pour pallier cette dégradation de la fonction *Level Set*, une étape de réinitialisation de celle-ci est nécessaire. Sethian propose dans [Sethian,2001] d'appliquer la méthode *Fast Marching* en résolvant un problème d'eikonale. En outre, grâce à cet algorithme, il est possible de calculer simultanément le vitesse étendue. Sussmann, Osher et Smereka proposent quant à eux, dans [Sussman,2000], une méthode itérative qui présente l'avantage de ne pas nécessiter

le positionnement explicite de l'interface. En outre, des adaptations légères de ces algorithmes permettent d'initialiser la fonction *Level Set* sur base de la position précise de l'interface au temps initial.

Pour être complet, notons que E. Marchandise et J.F. Remacle ont montré dans [Marchandise,2006] que les instabilités sont essentiellement dûes aux mauvaises approximations de $\underline{\nabla}\phi$. Ils montrent alors que l'utilisation de la formulation conservative (5.7) page 78 permet de résoudre ces instabilités et donc de se passer de l'étape de réinitialisation. Néanmoins, l'utilisation d'un algorithme de réinitialisation de ϕ permet d'améliorer la précision du positionnement de l'interface.

Réinitialisation par la méthode *Fast Marching*

La technique proposée dans [Adalsteinsson,1999] exploite la méthode *fast marching* et permet, **simultanément, de construire le champ de vitesse étendue et réinitialiser la fonction *Level Set* tel que**

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\nabla}F^{ext} \cdot \underline{\nabla}\phi^{temp} = 0 & \text{sur } \Omega \\ \phi^{temp} = \phi^n & \text{sur } \Gamma \\ F^{ext} = F & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (5.34)$$

La méthode prévoit, dans un premier temps, de calculer la distance signée ϕ^{temp} en utilisant la méthode *fast marching* pour résoudre l'équation de eikonale $|\underline{\nabla}T| = 1$ de chaque côté de l'interface avec la condition que $T = 0$ sur l'interface. La méthode *fast marching* est menée séparément de part et d'autre de l'interface.

Dans l'approche de Adalsteinsson et Sethian, les valeurs nécessaires à initialiser la structure *min-heap* sont calculées en positionnant le front grâce à un algorithme de visualisation des iso-surfaces, tel que présenté au paragraphe 5.4.4 et ensuite en calculant les valeurs de T proches de l'interface selon la méthode présentée au paragraphe 5.4.2 sur l'initialisation de la fonction *Level Set*. Ces valeurs sont désignées ϕ^{temp} .

Une fois que ϕ^{temp} est trouvé, l'étape suivante consiste à construire le champ de vitesse étendue à partir du champ de vitesse de l'interface. Cette reconstruction doit étendre la vitesse d'une manière continue et éviter, si possible, l'introduction de discontinuités dans le champ de vitesse proche de l'interface.

L'utilisation de la méthode *fast marching* permet de réaliser ces deux étapes en ne passant qu'une fois en chaque noeud. En effet, nous construisons le champ ϕ^{temp} comme expliqué précédemment. Cependant, dès que cette valeur a été calculée en un point et acceptée, le champ de vitesse étendue est construit en ce point en résolvant l'équation (5.34). Si on utilise

une discrétisation décentrée amont, l'approche *fast marching* nous assure de connaître les valeurs de ϕ^{temp} et F^{ext} utilisées dans le calcul :

$$\left(\frac{\phi_{i+1,j}^{temp} - \phi_{i,j}^{temp}}{\Delta x}, \frac{\phi_{i,j}^{temp} - \phi_{i,j-1}^{temp}}{\Delta y} \right) \cdot \left(\frac{F_{i+1,j}^{ext} - F_{i,j}^{ext}}{\Delta x}, \frac{F_{i,j}^{ext} - F_{i,j-1}^{ext}}{\Delta y} \right) = 0 \quad (5.35)$$

Similairement à la construction de la distance signée, il est ici nécessaire de trouver les **valeurs de la vitesse dans les mailles initiales de la méthode *fast marching***. Dans [Sethian,1999,a], Sethian propose une nouvelle fois d'approximer la vitesse F à l'interface sur base des valeurs de \underline{v} aux mailles adjacentes à l'interface. Sethian ne donne aucun détail sur la manière de faire cette approximation. Ensuite, connaissant la vitesse à l'interface, il propose de calculer la vitesse dans les mailles à initialiser en utilisant une extension de la méthode présentée au paragraphe 5.4.2. Il considère la vitesse aux points de l'interface intersectant les lignes de noeuds, points que nous avons utilisés pour calculer le distance signée, et suppose que la vitesse est une moyenne pondérée de ces vitesses. Le poids de chaque vitesse est proportionnel au carré de la distance de ce point au noeud. Reprenant les 5 cas de la figure 5.7 page 96, on obtient

- a. $F_{i,j} = F_{i,j-s}$
- b. $F_{i,j} = \frac{\frac{1}{t^2} F_{i+t,j} + \frac{1}{s^2} F_{i,j-s}}{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{s^2}}$
- c. $F_{i,j} = \frac{\frac{1}{t^2} F_{i+t,j} + \frac{1}{s^2} F_{i,j+s}}{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{s^2}}$
- d. $F_{i,j} = F_{i,j+s}$
- e. $F_{i,j} = \frac{\frac{1}{t^2} F_{i+t,j} + \frac{1}{s^2} F_{i,j+s}}{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{s^2}}$

La méthodologie qui vient d'être présentée souffre d'un grave inconvénient. En effet, il est nécessaire, pour initialiser la méthode en ϕ et F de reconstruire explicitement l'interface par une méthode classique de visualisation présentée au paragraphe 5.4.4 et d'extrapoler les valeurs de ϕ et F à partir de l'interface. Cette approche est contraire à la philosophie même de la méthode *Level Set* dont le but est de ne pas suivre explicitement l'interface.

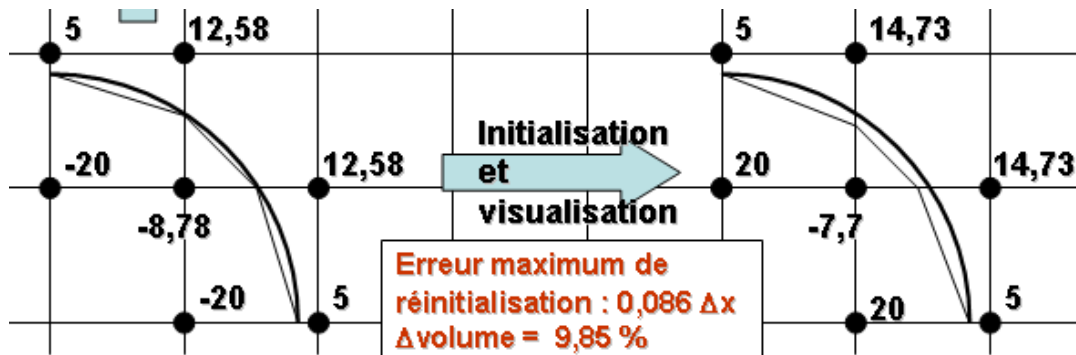


FIG. 5.8 – Erreur introduite lors du positionnement de l'interface

En pratique, des erreurs très importantes sont introduites lors du positionnement de l'interface, même avec les méthodes de visualisation les plus performantes. Considérons l'exemple suivant : Un cercle de rayon 45 mm sur un maillage de 25 mm x 25 mm. Calculons, par la méthode présentée au paragraphe 5.4.2, les valeurs de ϕ dans les mailles adjacentes à l'interface. Ensuite, grâce à la méthode des *Marching squares*, reconstruisons l'interface. Dans cet exemple, aucune équation d'évolution ni de réinitialisation n'a été résolue. Pourtant, on constate que le cercle a perdu 1/10 de sa surface. Il importe que le lecteur comprenne que cette erreur est inévitable. En effet, puisqu'on connaît au maximum quatre valeurs de ϕ par maille, la reconstruction de l'interface sera, au maximum, linéaire.

Réinitialisation par la méthode itérative

L'algorithme proposé par Sussman et al. dans [Sussman,2000] se présente sous la forme d'une équation aux dérivées partielles instationnaire à résoudre de manière itérative pour atteindre un **état stationnaire qui correspond à la réinitialisation complète de la fonction ϕ dans l'ensemble du domaine** :

$$\begin{cases} \frac{\partial d}{\partial \tau} + \underline{w} \cdot \underline{\nabla} d = \text{sign}(\phi) \\ d(\underline{x}, t, \tau = 0) = \phi(\underline{x}, t) \end{cases} \quad (5.36)$$

où $d(\underline{x}, t, \tau)$ est une fonction distance fictive
 $\underline{w} = \text{sign}(\phi) \frac{\underline{\nabla} d}{|\underline{\nabla} d|}$ est la vitesse fictive de propagation de l'onde d .
 $\text{sign}_{dx}(\phi)$ est une fonction signe approximée numériquement

$$= \begin{cases} -1 & \phi < -dx \\ \frac{\phi}{\sqrt{\phi^2 + dx^2}} & |\phi| \leq dx \\ 1 & \phi > dx \end{cases}$$

Nous reconnaissons aisément une équation hyperbolique non-linéaire qui ressemble beaucoup à l'équation (5.6) d'évolution de la fonction *Level Set*. Il est donc facile d'étendre les schémas de résolution développés pour (5.6) à cette nouvelle équation. Nous remarquons aussi que l'information se propage des points les plus proches de l'interface vers les points les plus éloignés car les caractéristiques sont normales à l'interface et orientées vers l'extérieur. Puisque la fonction ϕ doit vérifier la propriété de distance essentiellement près de l'interface, S. Tanguy a montré dans [Tanguy,2004] que deux itérations de l'algorithme sont suffisantes pour réinitialiser correctement ϕ pour autant que ϕ soit une fonction distance algébrique au début du pas de temps considéré.

L'algorithme précédent présente le grand avantage d'éviter de trouver explicitement la position de l'interface. Il s'est avéré très efficace en pratique. Néanmoins, la position de l'interface peut être légèrement modifiée par application de cet algorithme, sans atteindre des erreurs de l'ordre de grandeur de la méthode *Fast Marching* présentée au paragraphe 5.4.3.

5.4.4 Méthode de visualisation

Comparaison des algorithmes

Connaissant la distribution de la fonction *Level Set* sur le maillage du domaine de calcul, la position exacte de l'interface doit être reconstruite pour la visualisation. Ce problème trouve de nombreuses réponses en infographie. Dans ce domaine, il est en effet fréquent de vouloir déterminer un **modèle polygonal d'un iso-contour (2D) ou d'une iso-surface (3D) à partir de la donnée des valeurs d'une fonction $G(\underline{x})$ sur un maillage structuré et uniforme**. A ce sujet, Elvins propose dans [Elvins,1992] une étude comparative des principales méthodes utilisées en infographie pour ce type de problèmes :

1. *Contour Connecting Method* ;
2. *Marching Cubes (Squares) Method* ;
3. *Marching Tetrahédra Method* ;
4. *Dividing Cubes Method* ;
5. *Opaques Cubes Method*.

La comparaison de ces cinq algorithmes est menée selon les critères suivants : temps et espace mémoire requis, facilité d'implémentation, types de données utilisables. En confrontant les qualités et les défauts de chaque méthode avec l'application spécifique du suivi de la surface libre de l'écoulement, nous proposons d'utiliser l'algorithme *Marching squares*. Il permet en effet d'approcher, en des temps faibles, l'ordre de précision maximum avec 4 noeuds par maille.

Insistons sur le fait que **l'ordre de précision de l'outil de visualisation est mathématiquement limité par le nombre de points de la maille où la valeur de la fonction *Level Set* est connue**. Dans notre cas, cette valeur étant fixée aux seuls noeuds du maillage volume fini, la fonction ϕ est, au mieux, représentable par un plan. Cette contrainte mathématique limite fortement l'ordre de précision atteignable. A titre de comparaison, dans les codes éléments finis, utilisant des éléments riches en noeuds (8 à 10 noeuds par maille), des méthodes de visualisation d'ordres plus élevés sont utilisables, comme cela est montré dans [Remacle,2007].

Méthode *Marching squares*

L'algorithme *Marching squares*, qui constitue l'application 2D de l'algorithme *Marching cubes*, fut proposé par Bill Lorensen et Harvey Cline⁸. Son principe est de calculer les différentes configurations que peut prendre l'iso-courbe dans un élément carré en fonction du signe des valeurs de la fonction aux 4 sommets du carré. En effet, selon le signe des sommets, il n'existe que 16 configurations possibles (voir la figure 5.9). Vu le faible nombre de configurations possibles, il est facile d'encoder une comparaison systématique des cellules du maillage avec les cas de référence.

⁸La méthode a été présentée en 1987 lors de la conférence Sysgraph après que ceux-ci aient déposé l'algorithme au Bureau des Brevets Américains le 5 juin 1985

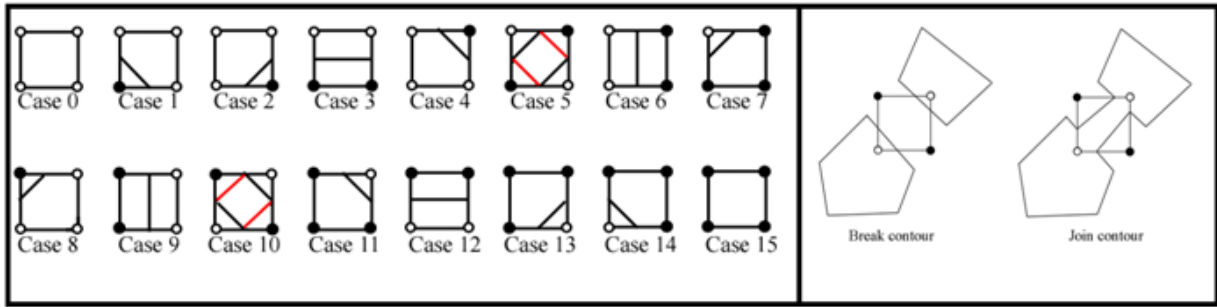


FIG. 5.9 – Configurations de base de la méthode *Marching Squares* et mise en évidence des ambiguïtés

Sur la figure 5.9, le lecteur constate qu'il existe deux situations ambiguës où la connaissance des signes aux sommets ne permet pas de savoir avec certitude la forme de l'iso-courbe. D. Eberly, dans [Eberly,2002], propose, pour lever cette incertitude, de calculer le paramètre $\Delta = G_{i,j} * G_{i+1,j+1} - G_{i+1,j} * G_{i,j+1}$. Suivant le signe de ce paramètre, il distingue les 3 cas possibles.

Pour le calcul de la position des points sur les arêtes, trois méthodes sont possibles :

- placer le point au milieu de l'arête par convention ;
- placer le point par interpolation linéaire des valeurs de G sur les extrémités de l'arête ;

$$t = \Delta x * \frac{G_{i,j}}{(G_{i+1,j} - G_{i,j})}$$

- placer le point par interpolation d'ordre supérieur des valeurs de G sur les extrémités de l'arête (très complexe) ;

Si l'on utilise une interpolation, il faut évidemment veiller à faire ensuite correspondre les deux points reconstruits sur l'arête.

5.5 Algorithmes améliorés

5.5.1 Méthode *Narrow Band Level Set*

Temps de calcul

Si l'on utilise un schéma de discrétisation temporelle, l'équation (5.6) peut être résolue directement mais un critère sur le pas de temps est nécessaire pour assurer la stabilité des calculs. Le critère de Courant-Friedrichs-Levy est alors généralisable en 3D :

$$\Delta t = \frac{cfl}{\frac{\max|v_x|}{\Delta x} + \frac{\max|v_y|}{\Delta y} + \frac{\max|v_z|}{\Delta z}} \quad (5.37)$$

où cfl est le nombre de Courant qui varie entre 0 et 1 selon le schéma numérique adopté.

Lorsque la vitesse F dépend de la courbure de l'interface, l'équation possède un comportement parabolique, ce qui est souhaité pour s'assurer de choisir la bonne *solution faible* du problème intégral (5.6). Néanmoins, dans ce cas, une condition supplémentaire sur le pas de temps est imposée :

$$\Delta t < \frac{\rho \Delta x^2}{\mu} \quad (5.38)$$

Enfin, dans le formalisme *Level Set*, à la fois la fonction ϕ et la vitesse F sont liées à un espace de dimension supérieur $n + 1$. Pour un problème très simple où $F = 1$ et en supposant qu'il faut N pas de temps pour que le front se propage au sein du domaine, la méthode nécessite $O(N^4)$ opérations. Puisque la valeur maximal de N est imposée par le critère CFL et le critère visqueux, **le temps de calcul peut devenir astronomique.**

Principe de la méthode *Narrow Band Level Set*

Dans [Adalsteinsson,1999], Adalsteinsson et Sethian propose d'accélérer le calcul en utilisant une amélioration de la méthode *Level Set* dite méthode *Narrow Band Level Set*. L'idée de base de cette méthode consiste à **limiter le domaine d'étude à une bande de largeur réduite**. Si le domaine total est stocké dans une matrice, les mailles de ce domaine appartenant à cette bande étroite sont stockées dans un vecteur pour les positionner. Seules les valeurs de ϕ aux points appartenant à la bande étroite sont actualisées à chaque pas de temps. Les valeurs de ϕ hors de la bande étroite sont gelées. Lorsque l'interface approche de la frontière de la bande étroite, le calcul est stoppé et une nouvelle bande étroite est créée avec l'interface au centre.

Cette approche nécessite de créer des algorithmes de complexité égale à la méthode *Marker and Cell* mais permet de conserver les avantages de la méthode *Level Set* en diminuant le nombre d'opérations à $O(kN^3)$ où k est le nombre de mailles de la bande étroite.

5.5.2 Conservation des volumes

La méthode *Level Set* présente un gros désavantage : elle ne conserve pas les volumes de fluides. Dans un certain nombre d'applications, ceci peut s'avérer très dommageable. Il existe plusieurs manières de pallier ce désavantage. Dans un premier temps, la méthode *Level Set* a été couplée avec la méthode VOF dans [Sussman,2000] ou avec la méthode des particules dans [Enright,2002] (*Marker and Cell*). Cependant, toutes ces méthodes de corrections sont locales et tendent de ce fait à introduire des fluctuations dans la courbure de l'interface. En outre, la simplicité du formalisme *Level Set* est partiellement perdue. M. Sussman et al proposent dans [Sussman,1998] également une modification de leur formule de réinitialisation itérative qui assure une certaine conservation du volume de fluide. Enfin, Herrman développe dans [Herrmann,2005] une méthodologie qui permet d'améliorer la précision de l'étape de réinitialisation en travaillant sur un maillage raffiné. Ce faisant, la conservation des volumes est améliorée.

Algorithme de réinitialisation itératif amélioré

En théorie, l'algorithme de réinitialisation présenté au paragraphe 5.4.3 ne devrait pas changer la position de la ligne de niveau nulle. Malheureusement, dans les calculs numériques, ceci n'est pas forcément respecté. Dans un second article [Sussman,1998] sur la méthode *Level Set*, M. Sussman, E. Fatemi, P. Smereka et S. Osher proposent une contrainte qui améliore significativement la précision de la méthode.

Pour toute maille $\Omega_{i,j}$, si l'interface ne bouge pas, le volume doit rester constant, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \partial_\tau \int_{\Omega_{i,j}} H(d) &= 0 \\ \text{où } H(d) &= \begin{cases} 0 & \text{si } d < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } d = 0 \\ 1 & \text{si } d > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.39)$$

L'équation (5.36) page 100 peut dès lors s'écrire

$$\begin{cases} \frac{\partial d}{\partial \tau} + \underline{w} \cdot \underline{\nabla} d = \text{sign}(\phi) + \lambda_{i,j} f(\phi) \\ d(\underline{x}, t, \tau = 0) = \phi(\underline{x}, t) \end{cases} \quad (5.40)$$

où $\lambda_{i,j}$ est constant sur chaque cellule et vaut

$$\lambda_{i,j} = \frac{-\int_{\Omega_{i,j}} H'(\phi)L(\phi,d)}{\int_{\Omega_{i,j}} H'(\phi)f(\phi)} \quad (5.41)$$

$$f(\phi) = H'(\phi) |\underline{\nabla}\phi|$$

Raffinement du maillage

Un seconde méthode pour améliorer la conservation du volume, proposée par Herrmann dans [Herrmann,2005], consiste à résoudre les équations de la méthode *Level Set* sur un autre maillage que celui utilisé pour résoudre les équations de Navier-Stokes. Ce second maillage est raffiné par rapport au maillage initial et est nommé G-Grid. Herrmann justifie sa méthode en argumentant que la précision de l'ensemble des équations de résolution de la fonction *Level Set* s'améliore lorsqu'on diminue la taille du maillage. Autrement dit, pour avoir le même ordre de précision sur les deux solveurs (Navier Stokes et *Level Set*), il adapte les maillages plutôt qu'adapter les méthodes.

Néanmoins, le temps de calcul peut augmenter fortement avec le raffinement du maillage. Dès lors, Herrmann suggère d'adopter le formalisme de la méthode *Narrow Band Level Set* à deux niveaux :

1. Dans le grid initial, toute les cellules contenant une partie de l'interface sont activées et chaque cellule est discrétisée selon un maillage plus fin.
2. Dans ce nouveau grid, on détermine la bande étroite des mailles contenant l'interface.

Ce faisant, Herrmann traite les équations *Level Set* avec une précision grande sans augmenter la charge de calcul.

5.5.3 *Level Set* à haut ordre de précision sans réinitialisation

La vitesse F utilisée dans l'équation d'évolution de la fonction *Level Set* ne possède pas de sens physique et peut être choisie librement. Nous avons montré dans le paragraphe 5.4.1 page 95 qu'il était possible de construire une vitesse étendue qui permettent à la fonction ϕ de garder sa structure de fonction distance signée. Si la construction de cette vitesse étendue et la résolution de l'équation d'évolution sont réalisées à l'aide de schéma à très haut ordre de précision, il est théoriquement possible de se passer d'une phase de réinitialisation. Cette question constitue un thème de recherche sur lequel de nombreux laboratoires travaillent à l'heure actuelle.

Dans les paragraphes précédents, nous avons construis une partie des outils nécessaires pour implémenter en pratique cette idée. Dans le paragraphe 5.2.5 est proposée une discrétisation *WENO* du cinquième ordre de précision qui capture correctement les discontinuités. En outre, une méthode de construction de la *vitesse étendue* a été présenté dans le paragraphe 5.4.1. Nous recommandons chaudement que des recherches sur l'implémentation de cette méthode soit poursuivi.

5.6 Synthèse sur la méthode Level Set

Sur base du raisonnement présenté dans ce chapitre, l'auteur propose deux algorithmes généraux qui, selon lui, permettraient d'atteindre un niveau de performance acceptable et cohérent avec les performances du solveur Navier-Stokes présenté dans le chapitre 4.

Le premier de ces algorithmes, que nous nommerons *Level Set à bande étroite raffinée et réinitialisée par la Fast Marching Method*, constitue essentiellement en une amélioration de l'ordre de précision par un travail sur un maillage plus fin que dans le solveur Navier-Stokes. L'algorithme s'écrit :

1. Choix d'une taille de maillage $\Delta x \leq (\Delta x_{NVS})^{\frac{1}{k_{NVS}}}$ où Δx_{NVS} est la taille des mailles et k l'ordre de précision du solveur Navier-Stokes.
2. Initialisation de la fonction *Level Set* $\phi = \phi_0$ par la *Fast Marching Method* :
 - (a) Initialisation de la *FMM* en ϕ et F par la méthode des paragraphes 5.4.2 et 5.4.3.
 - (b) Résolution de l'équation $\nabla\phi \cdot \nabla F^{ext} = 1$ par la *FMM* pour trouver ϕ^n et F^{ext} .
 - (c) Réduction du domaine de calcul en une bande étroite.
3. Calcul de ϕ^{n+1} à partir ϕ^n et F^{ext} sur le domaine réduit en résolvant l'équation *ENO* du second ordre de précision (5.18) obtenue dans le paragraphe 5.2.5.
4. Réinitialisation par la *Fast Marching Method* en retournant au point 2.

Le second algorithme, que nous nommerons *Level Set essentiellement non oscillatoire à très haute ordre de précision*, est une méthode tout à fait originale et qui constitue un domaine de recherche très prometteur. L'idée est de se passer de réinitialisation en résolvant l'équation d'évolution avec un schéma à très haut ordre de précision et qui traite correctement la discontinuité qui va progressivement apparaître à l'interface. Si nécessaire, une réinitialisation itérative est envisageable. L'algorithme s'écrit :

1. Choix d'une taille de maillage $\Delta x = \Delta x_{NVS}$.
2. Initialisation de la fonction *Level Set* $\phi = \phi_0$ par la *Fast Marching Method* :
 - (a) Initialisation de la *FMM* en ϕ et F par la méthode des paragraphes 5.4.2 et 5.4.3.
 - (b) Résolution de l'équation $\nabla\phi \cdot \nabla F^{ext} = 1$ par la *FMM* pour trouver ϕ^n et F^{ext} .
3. Calcul de ϕ^{n+1} à partir ϕ^n et F^{ext} sur le domaine réduit en résolvant l'équation *WENO* du cinquième ordre de précision (5.21) obtenue dans le paragraphe 5.2.5.
4. Construction du champ de vitesse étendu F^{ext} par la *Fast Marching Method* en résolvant $\nabla\phi \cdot \nabla F^{ext} = 1$ avec un schéma décentré amont d'ordre élevée.
5. Réinitialisation itérative de la fonction ϕ (paragraphe 5.5.2) si la discontinuité devient trop importante.
6. Retour au point 3.

CHAPITRE 6

RÉSULTATS NUMÉRIQUES *WOLF*

Ce n'est qu'en essayant continuellement que l'on finit par réussir.
Shadoks

Sommaire

6.1	Présentation du code <i>WOLF</i>	108
6.1.1	Suite logicielle <i>WOLF</i>	108
6.1.2	Module 2D vertical	109
6.2	Modélisation numérique	110

6.1 Présentation du code *WOLF*

6.1.1 Suite logicielle *WOLF*

L'implication du service d'*Hydrodynamique Appliquée et Constructions Hydrauliques* du Professeur Pirotton dans la recherche en *computational fluid mechanics* s'est concrétisée par la suite logicielle *WOLF*. En intégrant (figure 6.1) un module de paramétrisation et trois modules spécifiques aux écoulements hydrologiques, filaires, et quasi 3D, la suite logicielle *WOLF* permet de modéliser la majorité des écoulements rencontrés dans la pratique. Ces quatre modules ont été testés avec succès sur un grand nombre de cas réels.

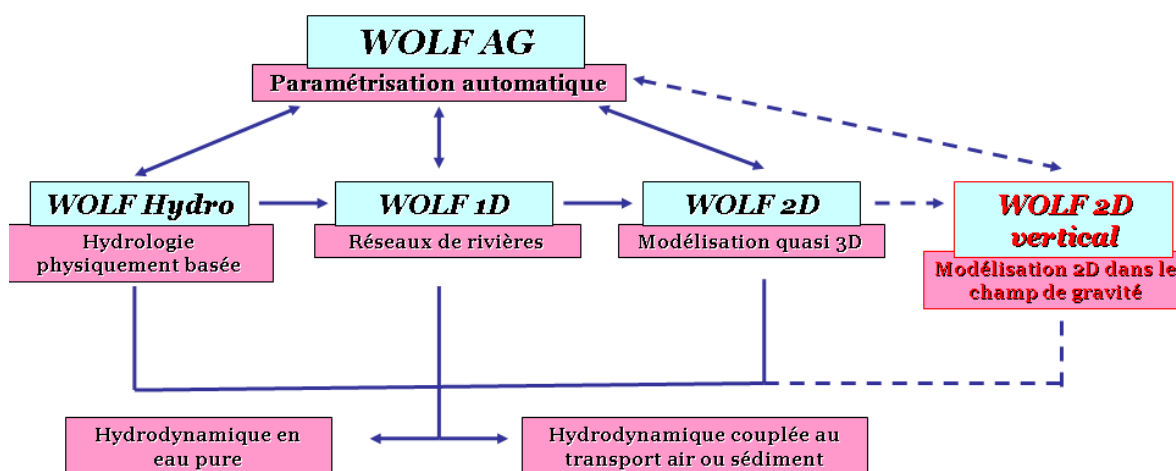


FIG. 6.1 – Architecture de la suite logicielle *WOLF*

L'ensemble des logiciels développés profite d'une interface originale et conviviale de pré- et post-processing. Cette interface a été développée dans le but de permettre une mise en oeuvre rapide de l'ensemble des données relatives à toute simulation complexe et à une visualisation en temps réel des résultats en chaque maille de discrétisation (hauteurs, débits, vitesses, Froude, charge totale,...). Cette interface est entièrement écrite en VisualBasic de manière à profiter pleinement des capacités qu'offre l'environnement Windows tandis que les codes de calcul sont programmés en Fortran95 qui offre une rapidité et une puissance de calcul scientifique incontestées. *WOLF* offre ainsi un environnement de travail unifié et confortable pour tout modélisateur du HACH quel que soit le type d'application envisagée.

Les chercheurs du HACH concentrent à l'heure actuelle leur travail sur le développement d'un module 2D vertical qui puisse modéliser correctement tous les écoulements quasi verticaux, y compris ceux induits par le mouvement d'un corps. A terme, en couplant ce module avec le module 2D horizontal, les écoulements 3D seront modélisables. Nous avons déjà signalé que ce TFE s'intègre totalement dans cette démarche.

6.1.2 Module 2D vertical

Le module 2D vertical est en cours de développement sous la responsabilité de Sylvain Detrembleur. Lors de la conception de ce module, M. Detrembleur a souhaité utiliser au maximum les modules déjà disponibles dans WOLF de manière à alléger le code complet. Sans entrer dans les détails d'implémentations, décrivons le principe de fonctionnement du nouveau module.

La résolution des équations de Navier-Stokes est menée par application de la méthode des projections basée sur les *variables primitives* et l'*approche multistep*. Le jeu d'équations correspondant à cette méthode a été décrit en détail dans le paragraphe 4.3.2 page 64. Ainsi, les trois étapes de calcul sont résolues comme suit :

1. Résolution du champ de vitesse intermédiaire \underline{v}^* par application du module WOLF 2D¹ :

$$\begin{cases} \frac{\underline{v}^* - \underline{v}^n}{dt} = -\underline{\nabla} \cdot ((\underline{v} \otimes \underline{v})^n - \nu \underline{\nabla} \cdot \underline{v}^n) + \rho \underline{g} \\ \underline{n} \cdot \underline{v}^* = \underline{n} \cdot \underline{v}_b \end{cases} \quad (6.1)$$

2. Résolution de champ de pression par application de la routine GMRS développée lors d'une première tentative de création d'un module 2D vertical :

$$\begin{cases} \Delta p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \underline{\nabla} \cdot \underline{v}^* \\ \frac{\partial p^{n+1}}{\partial \underline{n}} = \underline{n} \cdot \underline{g} \end{cases} \quad (6.2)$$

3. Calcul direct du nouveau champ de vitesse \underline{v}^{n+1} :

$$\underline{v}^{n+1} = \underline{v}^* + \Delta t \underline{\nabla} \cdot \underline{p}^{n+1} \quad (6.3)$$

4. Cette routine est répétée 3 fois par pas de temps de manière à utiliser une discrétisation temporelle de Runge-Kutta à 3 pas.

Il est prévu de suivre l'interface par application de la méthode *Level Set* présentée en détail dans le chapitre 5 page 74. Néanmoins, le couplage des deux solveurs posant encore des problèmes, nous n'avons pas pu modéliser la surface libre dans cette étude !

¹Routine volume fini décentré amont par *flux Vector Splitting*

6.2 Modélisation numérique

Le module en développement WOLF 2D vertical est utilisé dans ce travail de fin d'études pour modéliser un essai de translation verticale uniforme à 95 mm/s . Les résultats expérimentaux de cet essai ont été présentés dans le paragraphe 3.3 page 32.

Puisque ce module est toujours en développement, toutes les fonctionnalités ne sont pas encore disponibles. En particulier, la gestion des mailles partiellement mouillées n'est pas encore implantée et le couplage du solveur Navier-Stokes et du solveur Level Set, développés séparément, n'est pas encore effectif. Dès lors, il n'est pas possible de modéliser la situation instationnaire complète.

Il est néanmoins possible d'exploiter les parties déjà développées. En accord avec le Professeur Piroton et Sylvain Detrembleur, il a été décidé d'étudier une **situation stationnaire équivalente**. Dans ce cas simplifié, le plan est fixe à une profondeur donnée et le champ de vitesse est imposé à 95 mm/s sur les frontières du plan (figure 6.2). De plus, la surface libre est remplacée par une paroi fixe imperméable. La perte de charge hydrodynamique par propagation des ondes de surface, que nous avons mis en évidence dans le chapitre 2 page 11, n'est donc pas modélisée. Par contre, la contribution d'inertie devrait être correctement représentée.

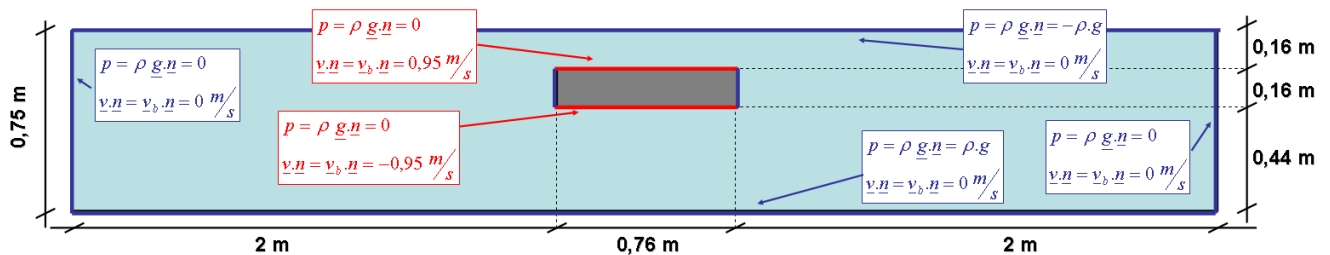


FIG. 6.2 – Domaine de calcul et conditions aux limites

Sur base de ce modèle simplifié, nous proposons dans ce paragraphe de vérifier que le module capture correctement la forme du champ de vitesse et la contribution d'inertie dans la pression à la surface de l'élément plan. En outre, bien que le mouvement de la surface libre ne soit pas modélisé, il est possible d'inférer celui-ci de la distribution de pression sur la frontière supérieure du domaine de calcul.

De nombreux essais ont été réalisés par le service du HACH pour tester l'influence des différents paramètres et la stabilité du schéma numérique. Ce cas de base a donc servi de *benchmark* pour le développement du module 2D vertical de Wolf. Il importe de souligner une nouvelle fois l'intégration totale de cette étude dans la démarche complète du HACH.

Ces multiples essais ont mené à une modélisation type de la translation à 65 mm/s . L'analyse qualitative du champ de vitesse (figure 6.3) montre une corrélation remarquable avec les observations faites au laboratoire. Pour obtenir ce schéma, il a été nécessaire d'introduire de la viscosité dans le schéma numérique. La viscosité permet en effet de générer la zone de recirculation que nous observons sur les faces latérales du plan.

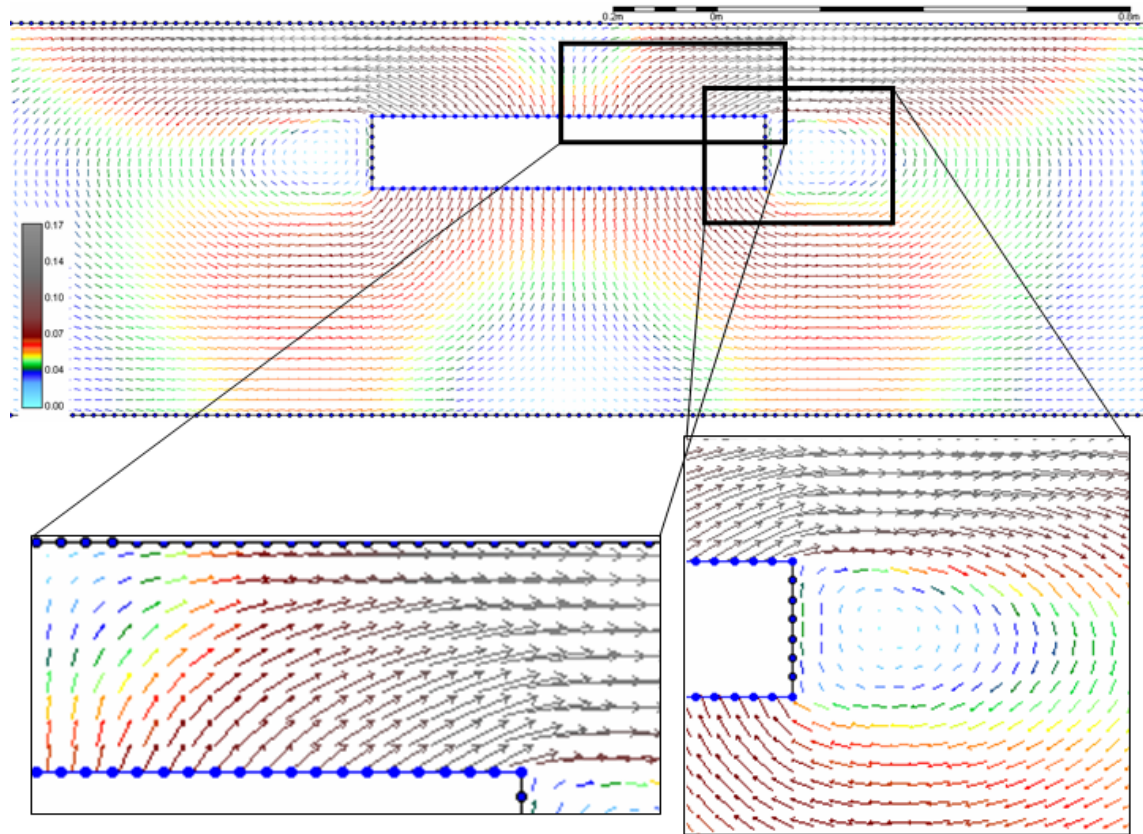
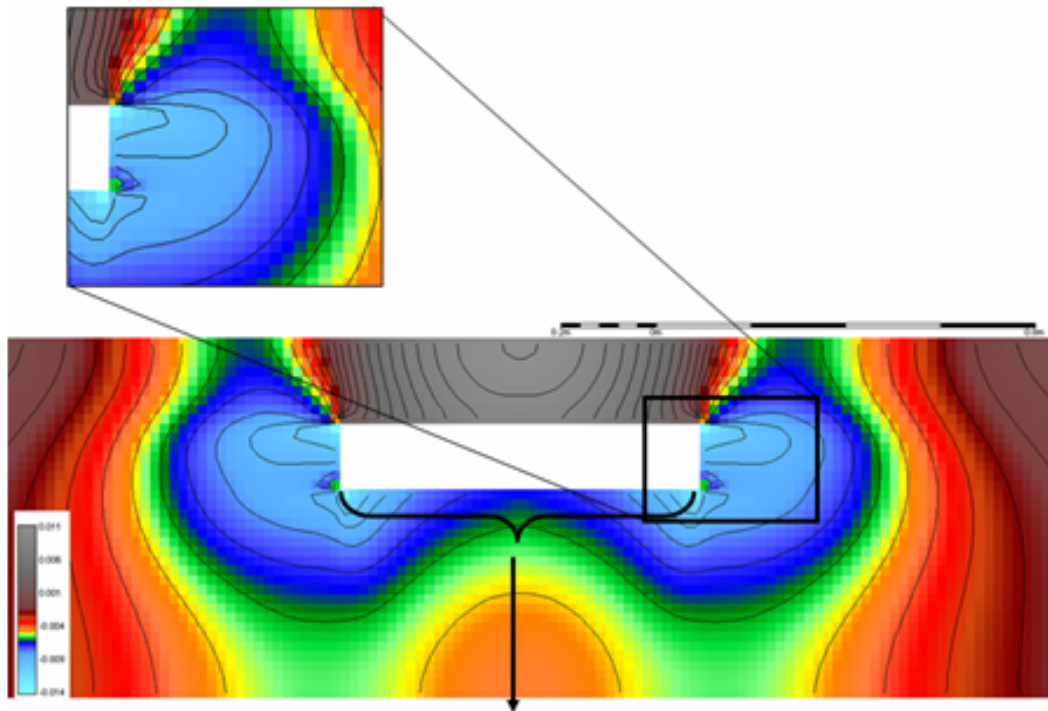
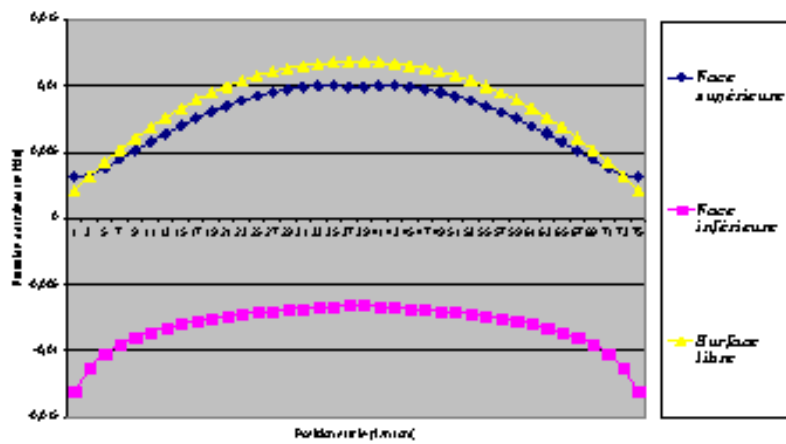


FIG. 6.3 – Champ de vitesse numérique

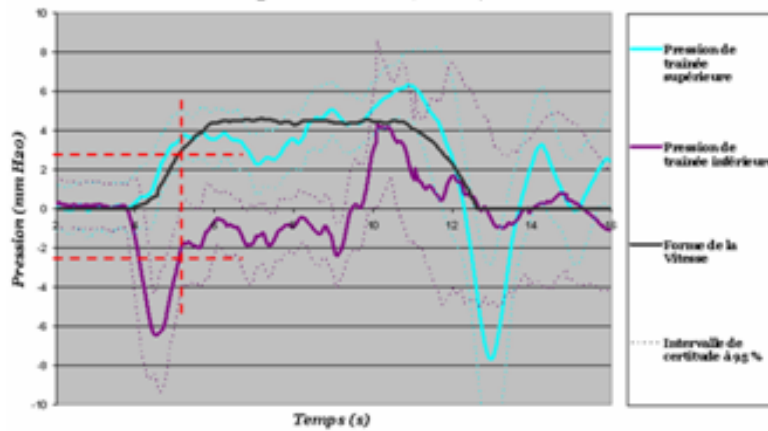
Le champ de pression donné par le code numérique est représenté sur la figure 6.4. Nous constatons que, qualitativement, sur les faces supérieures et inférieures du plan, la forme du champ de pression est en adéquation avec la forme que nous obtenions dans le chapitre 2. Par contre, d'un point de vue quantitatif, il faut constater que la valeur numérique est nettement supérieure à la valeur expérimentale (figure 6.4). De nombreuses raisons peuvent expliquer cette différence. Certains phénomènes de type Bernoulli ou de propagation d'ondes de surface ne sont pas pris en compte. De plus, la simplification réalisée n'est pas forcément parfaitement valable en pression. Toutes ces approximations montrent qu'il existe une différence non négligeable entre le cas théorique et l'expérience. Il n'est donc pas certain que cette différence corresponde à un problème de modélisation. Plutôt que d'essayer de trouver des solutions à un problème potentiel, nous préférons laisser au soin des chercheurs du HACH de vérifier les données expérimentales sur le code complet, une fois que celui-ci aura été complètement développé et validé sur des cas simples. Nous pourrions alors modifier la modélisation si nécessaire.



Pression de traînée



Vitesse ventrale = 50 mm/s



	Face supérieure	Face inférieure
Valeur expérimentale :	p = 3,75 mm H2O	p = -2,5 mm H2O
Valeur numérique :	p = 10 mm H2O	p = -6,5 mm H2O

FIG. 6.4 – Champ de pression numérique

CHAPITRE 7

CONCLUSIONS

La recherche est un processus sans fin dont on ne peut jamais dire comment il évoluera. L'imprévisible est dans la nature même de la science.

F. Jacob

Sommaire

7.1 Contributions à la modélisation du phénomène	114
7.1.1 Modèle simplifié	114
7.1.2 Modèle expérimental	115
7.1.3 Modèle numérique	116
7.2 Axes de recherches pour la modélisation	119

7.1 Contributions à la modélisation du phénomène

L'ambition des six mois de recherches intensives que j'ai menées sur la dynamique des écoulements à surface libre induits par le mouvement essentiellement vertical d'un corps immergé et en particulier sur les efforts générés par ces écoulements sur la surface du corps en mouvement était clairement d'apporter ma contribution à la modélisation de ces phénomènes complexes. Comme cela était annoncé en introduction de ce rapport, les trois stratégies classiques de modélisation (modélisation simplifiée sur base des concepts fondamentaux de l'hydrodynamique, modélisation expérimentale sur modèle à échelle réduite et modélisation numérique) ont été appliquées avec l'objectif avoué d'obtenir une description unifiée et utile du phénomène. Ces trois volets de la modélisation ont été décrits en détail dans les pages précédentes et je propose ici un bref résumé des points marquants de l'étude et des principales innovations que j'ai pues apporter.

7.1.1 Modèle simplifié

Dans la première partie de ce travail (chapitre 2) est exposé en détail le modèle simplifié que je propose pour décrire le mécanisme de la création de la traînée en *hydrodynamique*. Basé sur les concepts classiques et bien maîtrisés par l'ingénieur, que sont le théorème de Bernoulli généralisé et la théorie des couches limites, ce modèle propose une division de la pression générée par le fluide sur le corps en mouvement en six contributions fondamentales résumées sur la figure 7.1. La nouveauté de ce modèle réside dans la mise évidence des deux contributions induites par la présence de la surface libre.

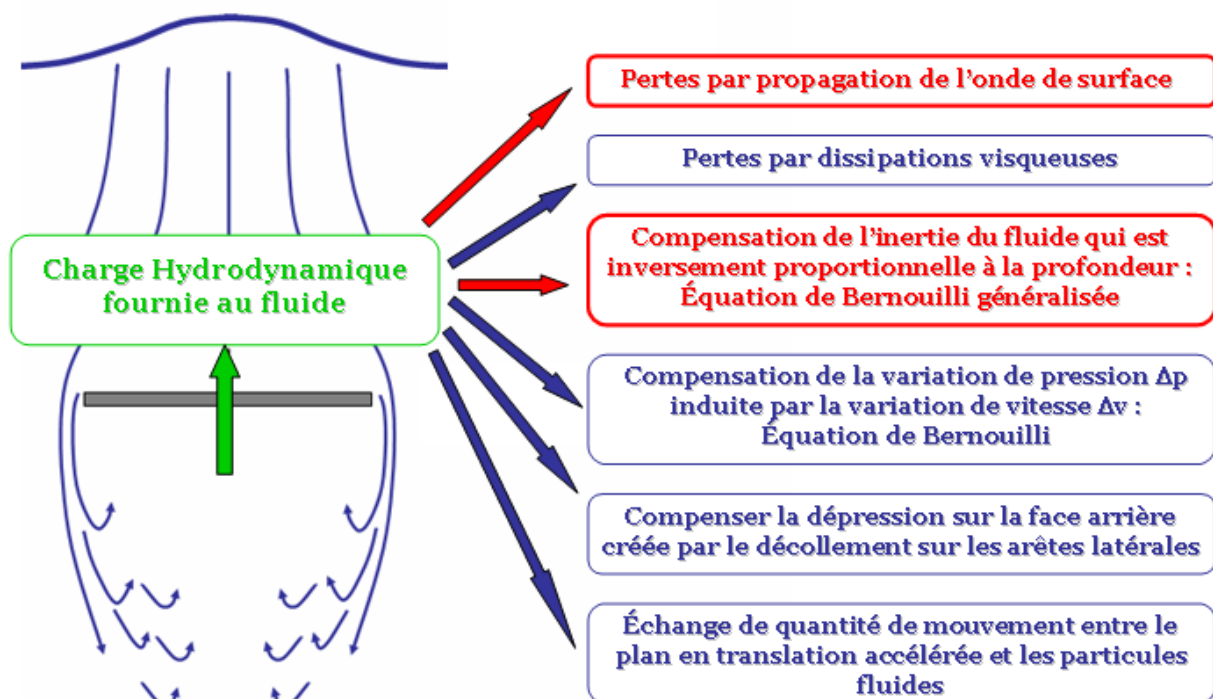


FIG. 7.1 – Contributions à l'effort de traînée en *hydrodynamique*

Une démonstration analytique rigoureuse, inspirée de la démarche intuitive du Professeur Pirotton et du Dr Dewals, permet d'isoler la première de ces contributions. Cette pression apparaît lorsque le corps en mouvement s'approche des frontières (solides ou mobiles) du domaine mouillé car la charge hydrodynamique fournie au fluide est alors consommée par un terme d'inertie. Le raisonnement analytique, basé sur une utilisation judicieuse des volumes de contrôles, aboutit en effet à la relation

$$Inertie \div \frac{1}{distance \text{ à la frontière}^2}$$

qui montre clairement qu'en l'absence de surface libre ou d'une frontière imperméable, le terme d'inertie s'annule. Au contraire, ce dernier devient très important lorsque le corps s'approche de la surface libre ou d'un bord imperméable.

Le résultat majeur de ce TFE pour la compréhension de la dynamique des écoulements induits par le mouvement d'un corps est sans nul doute l'identification d'une seconde contribution de la surface libre à l'effort de traînée. Je montre en effet, sur base d'un raisonnement intuitif alimenté par les résultats des essais expérimentaux, qu'une partie de la charge fournie au plan pour assurer sa translation est consommée par propagation des ondes de surface. En conclusion, les ondes de surface génèrent des efforts sur un corps en mouvement en surcroît de la simple variation hydrostatique générée par l'élévation de la surface libre. Ceci explique que je soutienne l'idée que la surface libre joue un rôle actif dans la génération des efforts de traînée sur les corps en mouvement dans un fluide.

7.1.2 Modèle expérimental

Le deuxième aspect de l'étude relève de l'approche expérimentale qui est classique en hydraulique. Cette méthode a en effet été pendant de nombreuses années la seule méthode fiable pour le dimensionnement des ouvrages hydrauliques. L'originalité de l'approche expérimentale prise dans cette étude découle de la manière moderne dont nous utilisons les résultats des mesures. Ainsi, dans un premier temps, les expérimentations ont servi à alimenter la réflexion théorique visant à établir le modèle simplifié présenté dans la première partie. En particulier, le modèle réduit a permis de valider nos hypothèses théoriques. De plus, la campagne expérimentale a fournis des mesures de pression fiabilisées par traitement statistique en vue de la validation d'un code numérique. Le niveau de précision atteint lors de nos essais est remarquable. Le service du HACH dispose ainsi de mesures fiables correspondant à six essais différents pour valider le code de calcul complet développé par Sylvain Detrembleur lorsque celui-ci atteindra la phase de validation sur cas inédits.

7.1.3 Modèle numérique

La majeure partie du travail de recherche réalisé ces derniers mois a porté sur la conception d'un schéma numérique fiable, robuste et efficace qui décrit la dynamique de l'écoulement mais aussi et surtout les efforts générés sur le corps en mouvement. Nous avons montré que cette simulation nécessite le développement de deux solveurs complémentaires : un solveur pour résoudre les équations de Navier-Stokes et un second pour suivre la surface libre.

Solveur Navier-Stokes

Dans le chapitre 4, il a été argumenté en faveur de la méthode des projections pour résoudre les équations de Navier-Stokes. Nous montrons comment, par simple projection de l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans l'espace des champs vectoriels de divergence nulle, les champs de vitesse et de pression solutions sont aisément calculables. Ma recherche s'est surtout axée sur la définition de conditions aux limites bien posées et consistantes. En effet, force est de constater que ce point constitue la faiblesse majeure de la méthode des projections. L'approche novatrice utilisée pour poser les conditions aux limites, présentée en intégralité dans le chapitre 4, se résume comme suit :

1. Plutôt que de poser une condition au limite en pression traduisant l'imperméabilité de la paroi, j'impose une condition aux limites supplémentaire sur le champ de vitesse : la divergence de ce champ à la frontière doit être nulle.
2. Je dérive, par simple application de l'équation de conservation de la quantité de mouvement sur les conditions aux limites ainsi posée, une nouvelle condition aux limites en pression, dite *condition numérique*. Cette condition s'écrit :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \underline{n}} = \left(\nu \Delta - \frac{\partial}{\partial t} - \underline{v} \cdot \nabla \right) (\underline{n} \cdot \underline{v}) + \underline{g} \cdot \underline{n} \quad (7.1)$$

et devient pour un plan en translation verticale uniforme à V_0 dans un fluide non visqueux

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -V_0 \frac{\partial V_0}{\partial z} + g \quad (7.2)$$

3. Nous constatons que cette nouvelle condition aux limites est une généralisation de la condition d'imperméabilité des parois classiquement imposées. (7.1) tend vers la condition d'imperméabilité lorsque la frontière est fixe. Nous avons montré que le terme en $\underline{n} \cdot \underline{v}$ représente en quelque sorte la diminution de type Bernoulli de la pression dans un fluide en mouvement.

Cette nouvelle formulation de la condition d'imperméabilité en pression, valable pour les frontières mobiles, constitue un apport majeur et très audacieux de ce TFE. Elle est l'aboutissement d'un raisonnement mathématique dans lequel les équations de Navier-Stokes sont envisagées d'un point de vue novateur. Cette conception des équations de Navier-Stokes incompressible sera plus que probablement objet de controverse avec certains lecteurs de cette étude. En effet, je considère la pression presque comme un artifice de calcul, comme un *multiplicateur Lagrangien*, qui force l'incompressibilité (i.e l'annulation de la divergence du champ

de vitesse) du fluide dans les équations de Navier-Stokes. Les résultats ainsi obtenus présentent la propriété de dégénérer vers les résultats classiques lorsque la paroi est fixe. Cette constatation argumente en faveur de notre raisonnement.

La condition (7.1) est assez complexe à résoudre avec un ordre de précision élevé à chaque pas de temps. C'est pourquoi j'ai poursuivi mes recherches et découvert une formulation alternative de la méthode des projections, testée avec succès par de nombreux chercheurs. Dans ce formalisme, la pression est remplacée par une variable purement numérique $\psi = v^* - v$. Étant donné la volonté affichée du HACH d'utiliser la méthode des projections, le schéma d'équations que je propose s'écrit alors :

- Pas 1 : résolution du champ de vitesse intermédiaire \underline{v}^* .

$$\begin{cases} \frac{\underline{v}^* - \underline{v}^n}{\Delta t} + (\underline{v}^n \cdot \nabla) \underline{v}^n = \frac{1}{Re} \Delta \underline{v}^n & \text{sur } \Omega \\ \underline{v}^* = \underline{v}^{n+1} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (7.3)$$

- Pas 2 : résolution du champ de pression p^{n+1}

$$\begin{cases} \Delta \psi^{n+1} = \nabla \cdot \underline{v}^* & \text{sur } \Omega \\ \frac{D}{Dn} \psi^{n+1} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (7.4)$$

- Pas 3 : reconstruction des variables \underline{v}^{n+1} et p^{n+1}

$$\begin{cases} \underline{v}^{n+1} = \underline{v}^* - \nabla_h \psi^{n+1} & \text{sur } \Omega \\ \underline{v}^{n+1} = \underline{v}_b^{n+1} & \text{sur } \Gamma \\ p^{n+1} = \frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\Delta t} & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (7.5)$$

où v^* est le champ de vitesse approché ;
 ψ est la variable numérique intermédiaire.

Il est montré dans le chapitre 4 que la condition au limite $\frac{D}{Dn} \psi^{n+1} = 0$ est une condition unique valable pour les frontières fixes et mobiles mais qu'elle résulte d'une approximation au premier ordre de précision. Il est donc vain de vouloir atteindre des ordres de précision supérieurs au premier ordre avec la suite d'équations (7.5). C'est pourquoi je me positionne ouvertement en faveur du développement de la méthode *Gauge*, présentée pour la première fois en 2003 et qui semble très prometteuse sur base des premiers résultats publiés. Clairement, cette méthode novatrice n'a pas encore fait l'objet d'une vaste campagne de recherches et de publications. Son développement nécessiterait une quantité de travail non négligeable. Néanmoins, nous avons montré que l'ordre de précision de la méthode n'est pas limité d'un point de vue strictement théorique et laisse donc une marge de progression potentielle plus grande que la méthode des projections.

Solveur Level Set

Dans le chapitre 5, une méthode moderne de suivi eulérien des interfaces, dite méthode *Level Set*, a été étudiée en détail. Rappelons que le principe de cette méthode est de définir, à partir de la position initiale de la surface libre, une fonction *Level Set* dont l'iso-courbe zéro est l'interface. Ensuite, l'évolution temporelle de la fonction est décrite par une équation d'Hamilton-Jacobi qui est résolue par les techniques classiques de *computational fluid mechanics*.

Dans ce travail, je me suis surtout focalisé sur le problème de la réinitialisation de la fonction *Level Set*. Je montre en effet que cette étape introduit des erreurs inacceptables (premier ordre de précision) à chaque pas de temps. Après avoir clairement identifié la source de ce problème, je me suis attaché à proposer, sur base de la littérature disponible, deux solutions élégantes à ce problème :

1. La première de ces solutions a été proposée dans [Herrmann,2005] et consiste à utiliser des maillages différents dans le solveur de Navier-Stokes et le solveur de suivi d'interface.
2. Dans la seconde méthode, l'objectif est de ne plus réinitialiser à chaque pas de temps et d'espacer les réinitialisations le plus possible. Pour ce faire, l'équation d'évolution doit être résolue grâce à des schémas numériques à très haut ordre de précision et qui capture les chocs de manière naturelle.

La seconde méthode a la faveur de nombreux centres de recherches bien qu'aucun ne soit encore parvenu à se passer complètement de la réinitialisation. Nous traitons donc dans cette étude un thème de recherche tout à fait actuel. L'algorithme que je propose est le suivant :

1. Initialisation de la fonction *Level Set* $\phi = \phi_0$ par la *Fast Marching Method* :
 - (a) Initialisation de la *FMM* en ϕ et F par la méthode des paragraphes 5.4.2 et 5.4.3.
 - (b) Résolution de l'équation $\nabla\phi \cdot \nabla F^{ext} = 1$ par la *FMM* pour trouver ϕ^n et F^{ext} .
2. Calcul de ϕ^{n+1} à partir ϕ^n et F^{ext} sur le domaine réduit en résolvant l'équation *WENO* du cinquième ordre de précision (5.21) obtenue dans le paragraphe 5.2.5.
3. Construction du champ de vitesse étendu F^{ext} par la *Fast Marching Method* en résolvant $\nabla\phi \cdot \nabla F^{ext} = 1$ avec un schéma décentré amont d'ordre élevé.
4. Réinitialisation itérative de la fonction ϕ (paragraphe 5.5.2) si la discontinuité devient trop importante.
5. Retour au point 2.

7.2 Axes de recherches pour la modélisation

La modélisation de la dynamique des écoulements à surface libre induits par le mouvement essentiellement vertical d'un corps immergé et en particulier sur les efforts générés par ces écoulements sur la surface du corps en mouvement est un vaste domaine de recherche dans lequel de nombreux travaux sont encore possibles.

Du point de vue de la compréhension du phénomène, l'approche théorique/expérimentale que j'ai menée dans les chapitres 1 et 2 peut clairement être réitérée sur des mouvements quasi-verticaux complexes telles que la rotation et sur des géométries variables. Ce faisant, nous pourrions à la fois souligner de nouvelles contributions aux efforts sur les parois et fournir des mesures fiables sur des cas complexes pour valider le code numérique.

Du point de vue numérique, la première tâche qui découle de cette étude consiste à valider, sur des cas simples et autres *benchmark*, les hypothèses et les schémas développés dans les pages précédentes. Il est évident que *le papier se laisse dessiner* et que la discrétisation des équations offrent souvent des surprises lors de l'implémentation. Enfin, une large phase de validation du code numérique sur des cas de complexité croissante peut clôturer le travail de modélisation dans lequel ce TFE s'inscrit.

CHAPITRE 8

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages généraux

- [Kochin,1964 | N.E.Kochin, I.A. Kibel et N.V. ROZE, 1964, *Theoretical Hydromechanics*, Interscience Publishers, John Wiley and Sons, New-York.
- [Schlichting,1968 | H. Schlichting, 1968, *Boundary-layer theory*, McGraw-Hill book company, New york.
- [Garde,1977 | R.J. Garde and A.G. Mirajgaoker,1977, *Engineering Fluid Mechanics* , NEM CHAND and BROS, Roorkee.
- [Cebeci,1977 | Cebeci, T. et Bradshaw, P.,1977, *Momentum Transfer in Boundary Layers*, Hemisphere Publishing Corporation, Washington.
- [Hirsch,1984,a | C. Hirsch, 1984, *Numerical Computation of Internal and External Flows - Volume 1 - Basic Principles*, John Wiley and Sons, N-Y, Londres et Sydney.
- [Hirsch,1984,b | C. Hirsch, 1984, *Numerical Computation of Internal and External Flows - Volume 2 - Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows*, John Wiley and Sons, N-Y, Londres et Sydney.
- [Pironneau,1988 | O. Pironneau, 1988, *Méthode des éléments finis pour les fluides*, Collection Recherches en Mathématiques Appliquées, RMA, MASSON, Paris
- [Novak,1990 | Novak P., 1990, *Hydraulics structures*, Unwin Hyman Ltd, Manchester.
- [Candel,1990 | S. Candel, 1990, *Mécanique des fluides*, Dunod, Paris.
- [Ryhming,1991 | L. Ryhming, 1991, *Dynamique des fluides - Cours de base*, Presses Polytechniques et Universitaire Romandes, Lausanne.
- [Lejeune,1993 | A. Lejeune, 1993, *Principe de la mécanique des fluides (Hydraulique - Aérodynamique)*, Université de Liège, Faculté des Sciences Appliquées, Notes de Cours éditées par la Centrale des Cours de l'AEES, Liège.
- [Roberston,1997 | J.A. Robertson, C.T. Crowe, 1997, *Engineering Fluid mechanics, sixth edition*, John Willey and Sons, N-Y, Londres et Sydney.
- [Pirotton,2001 | M. Pirotton, P. Archambeau, S. Detrembleur, B. Dewals, S. Erpicum, C. Fraikin, 2001, *Hydraulique appliquée*, Laboratoire Hydrodynamique Appliquée et Constructions Hydrauliques, Université de Liège, Liège.

Portes d'écluses

- [Campus | Campus F., *Cours de Génie Civil : Ecluses*, Notes de cours publiées par l'AEES, Université de Liège, Liège.
- [Leliavsky | S. Leliavsky, *Design Textbooks in Civil Engineering, Volume II, Irrigation engineering : Syphons, weirs and locks*, Chapman and Hall Ltd
- [Wickert,1971 | G. Wickert, G.Schmausser,1971, *Stahlwasserbau*, Springer-Verlag Berlin - Heidelberg - New York.
- [Lejeune,1972 | Lejeune A.,1972-1973, *Étude des efforts de manoeuvre des portes busquées d'écluses*, Annales des travaux publics de Belgique, n°6, 1971 et n°1, 1972-1973.
- [Lejeune,1974 | A. Lejeune,1974, *Etude de l'écoulement non permanent bidimensionnel autour d'une plaque animée d'un mouvement de rotation uniforme*, Journal des Recherches Hydrauliques, vol n°12, n°1, 1974.
- [Dehousse,1985 | N.M Dehousse, 1985,*Les écluses de navigation*, LHCH, Université de Liège, Liège.
- [METLF,2000 | Ministère de l'Équipement, des Transports et du Logement ,2000, *CETMEF - Rosa 2000 - Recommandations pour le calcul des Etats-Limites des ouvrages sur site aquatique*, Paris.
- [AIPCN,2006 | AIPCN, 2006, *Design of Movable Weirs and Storm Surge Barriers*, Incom Working Group 26.
- [Canor,2006 | A. Canor,2006, *Analyse expérimentale des effets induits par le mouvement de redressement d'une porte basculante* , Travail de Fin d'étude Université de Liège - Laboratoire HACH, Liège.
- [future-sciences, 2007 | <http://www.futura-sciences.com/comprendre/d/dossier266>
- [ronquieres, 2007 | <http://www.ronquieres.be/travailpreparatoire.html>

Analyse dimensionnelle

- [Novak,1985 | P. Novak,J. Cabelka,1985, *Models in Hydraulic Engineering - Physical principles and design applications*, Pitman Advanced Publishing Program - Boston - London - Melbourne.
- [Marchal,1989 | J.L.J Marchal,1989, *Cours de théorie du navire - Tome III : La propulsion*, Université de Liège-LHCN, Liège.

Modélisation des écoulements incompressibles

- [Gustafson | K. Gustafson et K. Halasi,*On the divergence-free condition in computational fluid dynamics : How important is it ?*, Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow, C. Taylor et al, Pineridge Press, Swansea, UK

- [Harlow,1965 | Harlow and Welch,1965,*Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface*,Physics of Fluids, 8, 2182-9,1965.
- [Chorin,1967 | Chorin A.J., 1967, *Numerical method for solving incompressible viscous flow problem*, Journal of Computational Physics, 2, 12-20, 1967.
- [Temam,1968 | R. Temam,1968,*Une méthode d'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes*, Bulletin de la S.M.F., tome 96, 115-152.
- [Chorin,1968,a | A.J. Chorin,1968,*Numerical Solution of the Navier-Stokes*, Mathematics of Computation, 22, pp. 745-762.
- [Chorin,1968,b | A.J. Chorin,1968,*Numerical Solution of incompressible viscous flow problems*, Studies in Numerical Analyses, 2, pp. 64-71.
- [Temam,1969 | Temam R.,1969, *Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires*, (I) Arch. Rational Mech. Anal., 32, 135-153, (II) Arch. Rational Mech. Anal., 33, 377-385.
- [Harlow,1970 | Harlow and Welch,1970, *The SMAC Method : A numerical technique for calculating Incompressible fluid flows*, Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-4370.
- [Temam,1979 | Temam R.,*Navier-Stokes Equations*, North-Holland.
- [Kim,1985 | J. Kim et P. Moin,1985,*Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations*, Journal of computational Physics, 59, pp. 308-323.
- [Orszag,1986 | S.A. Orszag, M. Israeli et M.O. Deville,1986, *Boundary conditions for incompressible flows*, Journal of scientific comput., 1, pp. 75-111.
- [Van Kan,1986 | J. Van Kan,1986,*A second-order accurate pressure-correction scheme for viscous incompressible flow*, SIAM Journal of Sci. Statist. Comp., 7, pp. 870-891.
- [Bell,1988 | J. B. Bell, P. Colella,1988, *A second order projection method for incompressible Navier-Stokes equations*, Journal of Computational Physics, 85, 257-283.
- [Versteegh,1990 | J. Versteegh,1990, *Numerical simulation of three-dimensional flow through or around hydraulic structures*, Thèse de doctorat - Delft Technological University.
- [Johnson,1990 | Johnson, Raad and Rausch,1990,*The application of parallel processing to the Simplified Marker and Cell Method*,Proceedings of the second IEEE Symposium on Parallel and Distributed Processing, pp 357-362, Dallas, Texas
- [Gresho,1994 | P.M. Gresho and R.L. Sani,1987,*On pressure boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equations*, International Journal for numerical methods in fluids, vol. 7, pp. 1111-1145.
- [Henshaw,1994,a | W.D. Henshaw,1994,*A fourth order accurate difference approximation for incompressible Navier-Stokes equations on overlapping grids*, Journal of Computational Physics, 113,number 1, 13-25.
- [Henshaw,1994,b | W.D. Henshaw, H.O. Kreiss, L.G.M. Reyna,1994,*A fourth order accurate difference approximation for incompressible Navier-Stokes equations on overlapping grids*, Computers ans Fluids, 23,number 4, 575-593.

- [Weinan,1995,a | **Weinan E. and J.G. Liu**,1995,*Projection method I : Convergence and Numerical Boundary layers*, SIAM Journal of numerical analysis, vol. 32, num. 4, pp. 1017-1057.
- [Weinan,1995,b | **Weinan E. and J.G. Liu**,1995,*Projection method II : Godunov-Ryabenki analysis*, SIAM Journal of numerical analysis, vol. 33, num. 4, pp. 1597-1621.
- [Weinan,1995,c | **Weinan E. and J.G. Liu**,1995,*Projection method III : Spatial Discretisation on the Staggered Grid*,SIAM Journal of numerical analysis, vol. 32, num. 4, pp. 1017-1057.
- [Wang,2000 | **Wang and J.G. Liu**,2000,*Convergence of gauge method for viscous incompressible flows*, Mathematics of computation, volume 69, Number 232, pages 1385-1407.
- [Brown,2001,a | **D.L. Brown**,2001,*Accuracy of projection method for incompressible Navier-Stokes equations*, US Department of Energy, Lawrence Livermore National Laboratory
- [Brown,2001,b | **D.L. Brown, R. Cortez, M. Minion**,2001,*Accurate projection method for incompressible Navier-Stokes equations*, Journal of Computational Physics, 168, 464-499.
- [Weinan,2003 | **Weinan E. and J.G. Liu**,2003,*Gauge method for viscous incompressible flows*, Communication in Mathematical Science, vol. 1, No. 2, pp 317-332.
- [Studer,2006 | **L. Studer**,2006,*Projet CENCYLAM*, Université de Liège - Communication interne.

Suivi d'interface

- [Osher,1988 | **S. Osher et J.A Sethian**,1988,*Front propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations*, Journal of Computational Physics 79, pp. 12 , 1988
- [Elvins,1992 | **Todd Elvins**,1992, *A survey of algorithms for volume visualization*, ACM Siggraph Computer graphics 1992, 26(3), pp 194-201
- [Zhu,1992 | **W. Zhu et J.A Sethian**,1992,*Projection Methods coupled to Level Set Interface*, Journal of Computational Physics 101, pp. 128-138 , 1992
- [Lafaurie,1994 | **Lafaurie B., Nardone C. Scardovelli, R. Zaleski S. and Zanetti, G.**,1994,*Modeling merging and fragmentation in multiphase flows with SURFER*,Journal of Computational Physics, 113, pp 134-147, 1994
- [Sussman,1994 | **M. Sussman, P. Smereka et S.J. Osher**,*A level Set method for computing solutions to incompressible two-phase flow*, Journal of Computational Physics, 114, pp 146, 1994
- [Rhee,1995 | **C. Rhee, L. Talbot et J.A Sethian**,1995,*Dynamical Study of a premixed V flame*, Journal of Fluid Mechanics, 300, pp 87, 1995
- [Adalsteinsson,1995 | **D. Adalsteinsson et J.A Sethian**,1995,*A fast level Set method for propagating interfaces*, Journal of Computational Physics, 118,2, pp 269, 1995

- [Sethian,1996,a | **J.A Sethian**,1996,*Level Set methods : An act of violence*, American Scientist, 1996
- [Sethian,1996,b | **J.A Sethian**,1996,*A fast Marching Level Set Method for Monotonically advancing fronts*, Proceedings of National Academy of Sciences, 93, 4, pp.1591–1595, 1996.
- [Sussman,1998 | **M. Sussman, E. Fatemi, P. Smereka and S. Osher**,1998,*An improved Level Set method for incompressible two-phase flows*,Computers and Fluids, vol. 27,N. 5-6 pp 663-680, 1998
- [Sethian,1999,a | **J.A Sethian**,1999,*Level Set Methods and Fast Marching Methods :Evolving Interfaces in Computational Geometry,Fluid Mechanics, Computer Vision and Materials Science*, Cambridge University Press, 1999
- [Sethian,1999,b | **J.A Sethian**,1999,*Fast Marching Methods*, SIAM Review, 41,2, 1999, pp. 199-235
- [Adalsteinsson,1999 | **D. Adalsteinsson et J.A Sethian**,1999,*The fast construction of extension velocities in level set methods*, Journal of Computational Physics, 148, 2, 1999
- [Sussman,2000 | **Sussman M. et Puckett E.G.**,2000,*A Coupled Level Set and Volume-of-Fluid Method for Computing 3D and Axisymmetric Incompressible Two-Phase Flows* , Journal of Computational Physics, 162, 2, August 2000, pp. 301-337(37)
- [Sethian,2001 | **J.A Sethian**,2001,*Evolution, implementation and application of Level Set and Fast Marching Methods for advancing fronts*, Journal of Computational Physics 169, pp. 503-555 , 2001
- [Enright,2002 | **D. Enright, R. Fedkiw, J. Ferziger, I. Mitchell**,2002,*A hybrid particle level set method for improved interface capturing*, Journal of Computational Physics, 183, 1, 2002, pp. 83-116
- [Eberly,2002 | **D. Eberly**,2002,*Level Set Extraction from Gridded 2D and 3D data*, Géométric Tools inc.
- [Sethian,2003 | **J.A Sethian et P. Smereka**,2003,*Level Set Methods for fluid interfaces*, Annual Review of Fluid Mechanics, 35, pp.341-372, 2003.
- [Magnaudet,2003 | **J. Magnaudet, S. Takagi, D. Legendre**,2003,*Drag, deformation and lateral migration of a buoyant drop moving near a wall*, Journal of Fluids Mechanics, 476, pp 115-157, 2003
- [Tanguy,2004 | **Tanguy S.**,2004,*Developpement d'une méthode de suivi d'interface. Applications aux écoulements diphasiques*,These de doctorat présentée à la faculté des sciences de l'université de Rouen
- [Golocchio,2005 | **G. Colicchio, M. Landrini, J.R. Chaplin**,2005,*Level-Set Computations of Free Surface Rotational Flows*, Journal of Fluids Engineering 127, pp. 128-138 , 2005
- [Herrmann,2005 | **M. Herrmann**,1995,*Refined Level Set rid method for tracking interfaces*, Annual Research Briefs 2005, Center for Turbulence Research, NASA, Ames/Stanford, pp 15-30

- [Olsson,2005 | E. Olsson, G. Kreiss,2005,*A conservative Level Set approach for two-phase flow*, Journal of Computational Physics, 210, pp 225-246, 2005
- [Marchandise,2006 | E. Marchandise, J.F. Remacle,2006,*A stabilized finite element method using a discontinuous level set approach for solving two phase incompressible flows*, Journal of Computational Physics 219, pp. 780-800 , 2006.
- [Olsson,2007 | E. Olsson, G. Kreiss, S. Zahed,,*A conservative Level Set approach for two-phase flow II*, Journal of Computational Physics, accepted 2. feb. 2007, à paraître
- [Remacle,2007 | J.F. Remacle, N. Chevaugeon, E. Marchandise et C. Geuzaine,2007, *Efficient visualisation of high-order finite elements*,International Journal for numerical methods in engineering, 2007, 69, pp 750-771

Equation d'Hamilton-Jacobi

- [Harten,1976 | A. Harten, J.M Hyman, P.D Lax,1976,*On finite difference approximation scheme for hyperbolic conservation laws*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 24, pp 279-309.
- [Crandall,1983 | Crandall M., Lions P.,1983,*Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Transactions of the American Mathematical Society, 277, 1983, pp 1-42
- [Crandall,1984 | Crandall M., Lions P.,1984,*Two approximations of solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Mathematics of computation, 43, 1984, pp 1-19
- [Osher,1984 | S. Osher,1984,*Riemann solvers, the entropy condition and difference approximations*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 50, pp 447-481.
- [Harten,1987 | A. Harten, B. Engquist, S. Osher et S. Chakravarthy,1987,*Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes*, Journal of computational physics, 71, pp 231-303.
- [Shu,1988 | C-W Shu et S. Osher,1988,*Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes*, Journal of computational physics, 77, pp 439-471.
- [Shu,1989 | C-W Shu et S. Osher,1989,*Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes II*, Journal of computational physics, 83, pp 32-78.
- [Osher,1989 | S. Osher,1989,*The nonconvex multi-dimensional Riemann problem for Hamilton-Jacobi equations*, ICASE ReportNo. 89-53, NASA Langley Research Center, Hampton, VA, 1989
- [Shu,1990 | C.W. Shu,1990,*Numerical experiments on the accuracy of ENO and modified ENO schemes*, Journal of Scientific Computing, 5, pp 127-149.
- [Osher,1991 | S. Osher, C. W. SHU,1991,*High-order essentially nonoscillatory schemes for Hamilton-Jacobi equations*, SIAM journal on numerical analysis, 28, no 4, pp 907-922.
- [Shu,1997 | C-W Shu,1997,*Essential non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws*,ICASE Report No. 97-65, NASA/CR-97-206253.

[Gottlieb,1998 | S. Gottlieb, C-W Shu,1998,*Total Variation Diminishing Runge-Kutta Schemes*, Mathematics of Computation, 67 (1998), pp.73-85.

[Jiang,2000 | G-S Jiang,D Peng,2000,*Weighted ENO schemes for Hamilton-Jacobi equations*, SIAM Journal Sci. Comput, vol 21, nř6, pp 2126-2143.

Quatrième partie

Annexes

DÉVELOPPEMENTS THÉORIQUES DIVERS

Le modèle simplifié présenté dans le chapitre 2 page 11 se base sur un certain nombre de principes fondamentaux de la mécanique des fluides et notamment de l'aérodynamique. Pour le lecteur non familier de ces théories, je propose ici un court résumé concernant les notions de portance et de traînée ainsi que le paradoxe de d'Alembert.

Sommaire

A.1	Rappel sur la portance et la traînée	III
A.1.1	Effort de traînée d'un élément plan perpendiculaire à l'écoulement .	III
A.1.2	Traînée de frottement d'un élément plan perpendiculaire à l'écoulement	IV
A.1.3	Traînée de pression d'un élément plan fin perpendiculaire à l'écoulement	V
A.2	Application du Paradoxe de d'Alembert	VIII
A.2.1	Paradoxe de d'Alembert	VIII
A.2.2	Paradoxe de d'Alembert en présence d'une surface libre	X

A.1 Rappel sur la portance et la traînée

Considérons les forces agissant sur un corps fermé dans un écoulement stationnaire à vitesse V_o sans surface libre. La résultante des forces F agissant sur le corps peut être décomposée en deux composantes : la force de traînée F_D agissant parallèlement à l'écoulement et la force de portance F_L agissant perpendiculairement à l'écoulement. Puisque la vitesse varie en chaque points de la surface du corps, la pression en ces points varie par application de la loi de Bernouilli.

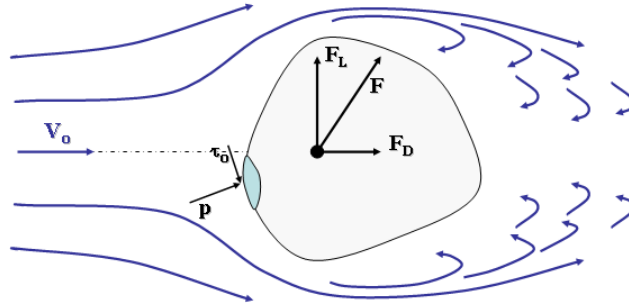


FIG. A.1 – Forces de portance et de traînée

Dans un fluide parfait, il est connu que le tenseur des contraintes est sphérique si bien que le seul type de forces agissant sur le corps sont les efforts de pression. Dans les fluides visqueux, des forces tangentielles se produisent sur toute la surface solide et viennent ajouter leur effet à celui de la pression. Naturellement, la force de traînée agissant dans la direction du mouvement est donnée par la résultante de l'ensemble des efforts, de frottement et de pression, agissant dans la direction de l'écoulement. La force de portance est obtenue de manière identique pour les efforts agissant dans la direction perpendiculaire à l'écoulement.

$$F_D = \int_S [p \cos\theta + \tau_0 \sin\theta] dS \quad (A.1)$$

$$F_L = \int_S [p \sin\theta + \tau_0 \cos\theta] dS$$

A.1.1 Effort de traînée d'un élément plan perpendiculaire à l'écoulement

Dans le cas de l'élément plan en translation verticale, la force de portance est évidemment nulle car, aussi bien les efforts de friction sur les surfaces supérieure et inférieure que la pression sur les faces latérales de l'élément plan sont symétriques. **Nous nous concentrons donc dans cette étude sur l'effort de traînée.**

Nous savons que la force de traînée F_D dans la direction de l'écoulement est donc la somme de deux contributions :

1. la *traînée de frottement* causée par les contraintes de cisaillement agissant tangentiellement sur les parties latérales de l'élément plan ;

2. la *traînée de pression* qui est engendrée par la différence entre les forces de pression agissant perpendiculairement aux faces inférieures et supérieures de l'élément plan.

Ces deux phénomènes relèvent de théories tout à fait différentes mais agissent simultanément sur le corps. Nous allons donc envisager ces deux phénomènes de manière successive.

A.1.2 Traînée de frottement d'un élément plan perpendiculaire à l'écoulement

Sur les faces latérales de l'élément plan, parallèles à l'écoulement, se développent des zones dans lesquelles le cisaillement des particules fluides est important. Ces zones sont d'épaisseurs faibles mais des forces d'intensités non négligeables y agissent. L'étude de ce phénomène relève de la *théorie de la couche limite* introduite par Ludwig Prandtl en 1904. Il n'entre pas dans le cadre de ce texte d'exposer la théorie complète relative à ces phénomènes passionnants. Le lecteur se référera pour de plus amples informations aux notes de cours du professeur Lejeune [Lejeune,1993], la référence théorique due à Schlichting [Schlichting,1968] ou la référence relative aux aspects numériques de Cebeci et Bradshaw [Cebeci,1977].

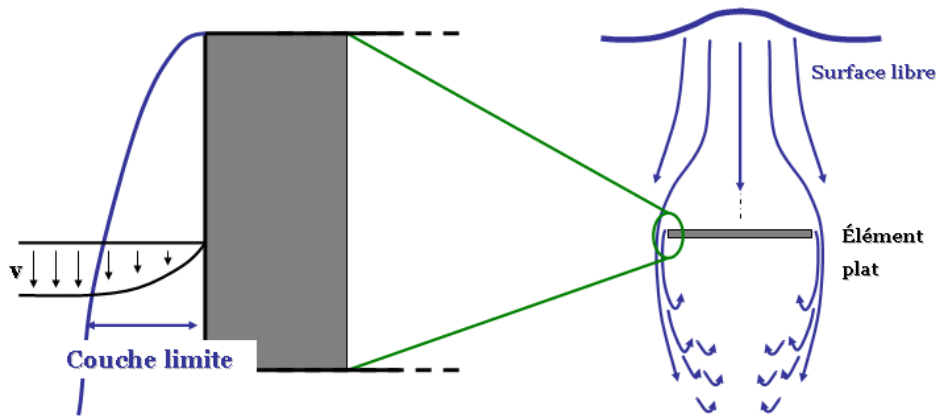


FIG. A.2 – Couche limite sur les parois latérales de l'élément plan

On se limitera donc ici à évaluer la contribution du frottement à l'effort de traînée F_D en supposant que le comportement du fluide dans la couche limite est équivalent à celui d'une plaque plane dans un écoulement uniforme. Nous restons néanmoins conscient que l'écoulement possède une composante de vitesse transversale au niveau de l'arête supérieure de l'élément plan. Ainsi, selon [Roberston,1997], on pose

$$F_{D,f} = 2 * F_{D,fi} = 2 C_f l \rho \frac{V_0^2}{2} \quad (\text{A.2})$$

avec $C_f = \frac{1,33}{Re_L^{\frac{1}{2}}}$ si $Re_L < 5 \cdot 10^5$

$C_f = \frac{0,074}{Re_L^{\frac{1}{5}}}$ si $5 \cdot 10^5 \leq Re_L < 10^7$

$C_f = \frac{0,455}{\log_{10} Re_L^{2,58} - \frac{1700}{Re_L}}$ si $Re_L \geq 10^7$

- où $F_{D,f}$ est la contribution de frottement des deux faces latérales à l'effort de traînée
 l est l'épaisseur de l'élément plan
 V_0 est la vitesse du fluide venant sur la porte, dont la valeur est approximée par la vitesse de la porte

Pour une vitesse $V_0 = 0,5 \frac{m}{s}$, l'effort de traînée vaut $F_{D,f} = 0,17 \frac{N}{min}$. Cette valeur est clairement négligeable vis-à-vis de la traînée de pression si bien que **cette contribution est négligée dans cette étude.**

A.1.3 Traînée de pression d'un élément plan fin perpendiculaire à l'écoulement

Théorie générale

Pour étudier le phénomène de traînée de pression sur un élément plan, supposons ce dernier infiniment fin. Dans ce cas, seule la différence de pression entre les deux faces de l'élément contribue à la traînée :

$$\begin{aligned} D &= \int_S [-p \cos(n, x_i)] dS \\ &= \int_{-b/2}^{b/2} p^{sup}(x) dx - \int_{-b/2}^{b/2} p^{inf}(x) dx \end{aligned} \quad (A.3)$$

Pour résoudre les intégrales, il est indispensable de connaître la distribution de pression sur les surfaces inférieure et supérieure. Ces efforts peuvent être déterminés expérimentalement ou à l'aide de code de calcul 2D. En *hydraulique*, il n'existe pas de tables récapitulatives de ces distributions pour des raisons de complexité de l'écoulement. L'objet de ce travail est justement de contribuer à combler ce vide théorique.

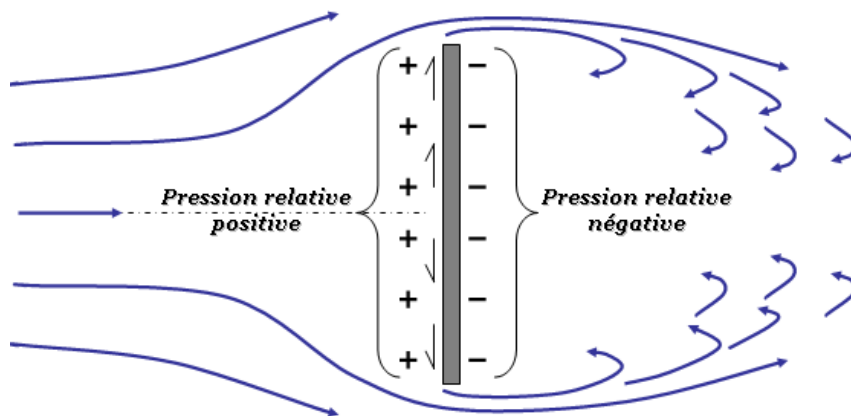


FIG. A.3 – Ecoulement autour d'un élément plan

Résultats de l'aérodynamique

Si ce n'est pas le cas en *hydraulique*, la littérature en *aérodynamique* regorge de tables de distribution de pression sur les formes diverses. Il a été montré, dans [Roberston,1997,page 430], que la distribution de pression sur les faces amont et aval avait la forme représentée sur la figure A.4 pour les nombres de Reynolds importants ($Re > 10^4$).

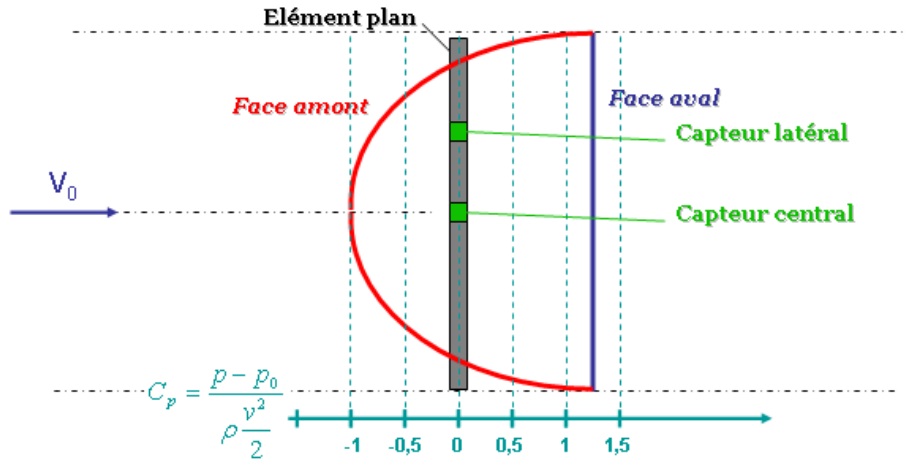


FIG. A.4 – Distribution des pressions sur les faces amont et aval d'un élément plan dans un écoulement fluide sans surface libre

Dès lors, la variation de pression prévue par cette théorie pour les capteurs de notre essai expérimental, si l'eau possédait un comportement parfaitement identique à l'air, est donnée par :

1. $\Delta p [mm H_2O] = C_p \frac{\rho}{2} v_0^2 = 1 * 50 v_0^2$ pour le capteur central.
2. $\Delta p [mm H_2O] = C_p \frac{\rho}{2} v_0^2 = 0,8 * 50 v_0^2$ pour le capteur latéral.

De plus, la loi d'évolution du *coefficient de traînée* $C_D = \frac{D}{\frac{\rho}{2} v_0^2}$ en fonction du nombre de Reynolds Re a été déterminée expérimentalement pour un grand nombre de profils différents. Dans la loi relative à une plaque perpendiculaire à l'écoulement (figure A.5), donnée dans [Lejeune,1993,page VI.28], trois phases de comportement sont mises en évidence :

1. Lorsque le nombre de Reynolds $Re < 0,1$, l'écoulement est purement visqueux et les lignes de courant suivent la plaque sans se décoller. Le coefficient C_D est essentiellement lié aux forces de frottement et diminue avec la vitesse.
2. Pour des valeurs de Re supérieures à 0,1, des décollements apparaissent sur la face aval et deux tourbillons apparaissent. Les lignes de décollement se fixent très rapidement sur les arêtes vives.
3. Pour des valeurs de Re de l'ordre de 10, un sillage tourbillonnaire se développe et présente un comportement de plus en plus turbulent avec l'augmentation de Re .

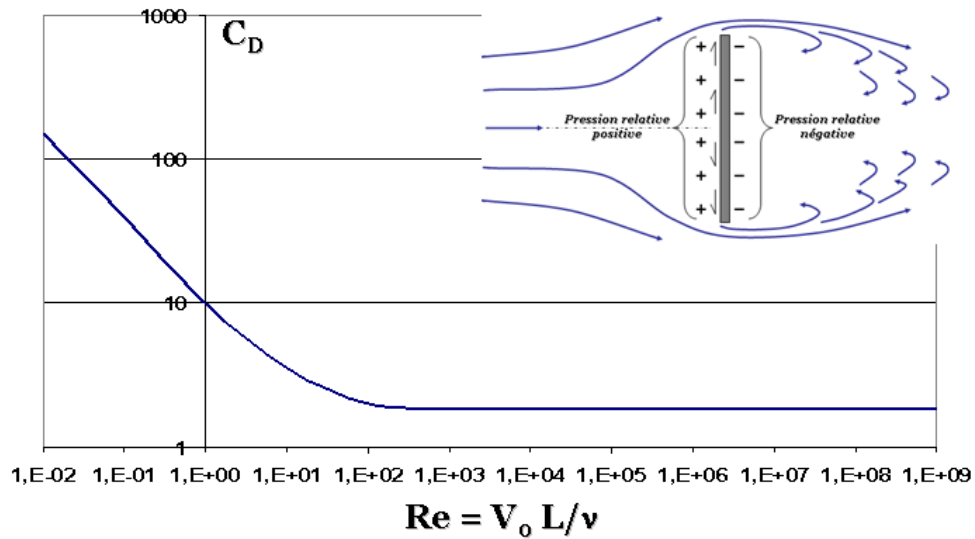


FIG. A.5 – Coefficient de traînée d'une plaque plane perpendiculaire à l'écoulement

On conclut de cette étude phénoménologique que le coefficient C_D devient très rapidement constant. On peut expliquer ce phénomène simplement. Dans un élément profilé, les limites des zones de décollement varient avec le nombre de Reynolds, si bien que l'étendue de la zone de pression négative varie et le coefficient de traînée dépend du nombre de Reynolds. Par contre, dans le cas de la plaque plane perpendiculaire à l'écoulement, les limites du décollement sont stables puisqu'elles coïncident avec les limites géométriques de la plaque et le coefficient de traînée devient constant.

A.2 Application du Paradoxe de d'Alembert

Dans le chapitre 2 page 2, le rôle actif de la surface libre dans la création de traînée est mis en évidence grâce à un premier raisonnement basé sur l'analyse dimensionnelle et un second basé sur le théorème de Bernouilli. Dans cette annexe, une troisième méthode pour mettre en évidence cette influence est proposée. Elle est basée sur un résultat fondamental de la mécanique des fluides : le *paradoxe de d'Alembert*.

A.2.1 Paradoxe de d'Alembert

LA FORCE S'EXERÇANT SUR UN CORPS ARBITRAIRE QUI SE MEUT DANS UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE ET IDÉAL À VITESSE CONSTANTE SELON UNE TRAJECTOIRE RECTILIGNE EST ÉGALE À ZÉRO POURVU QUE LA CIRCULATION $\Gamma = 0$. DONC, EN PARTICULIER, IL N'Y A PAS DE RÉSISTANCE À L'AVANCEMENT D'UN SOLIDE PLAN DANS UN FLUIDE IDÉAL.

Basons la démonstration de ce paradoxe sur la théorie de la superposition des écoulements irrotationnels telle qu'elle est présentée par Rhymin [Ryhm,1991]. A une grande distance d'un corps fermé, le champ de vitesse homogène et parallèle est perturbé comme sous l'effet caractéristique d'un dipôle. On peut exprimer cette situation par un développement asymptotique du champ de vitesse perturbé au moyen de termes de la forme R^{-n} et r^{-n} . On peut montrer que le terme le plus grand a le caractère d'un dipôle, c'est-à-dire que les composantes de la vitesse perturbée

$$\underline{v} - U_\infty \underline{i} = (v_x - U_\infty, v_r, 0) = (v_R - U_\infty \cos\theta, v_\theta + U_\infty \sin\theta, 0) \quad (\text{A.4})$$

se comportent pour $R, r \rightarrow \infty$, de la façon suivante :

- pour un corps tridimensionnel fermé $\underline{v} - U_\infty \underline{i} \approx O(R^{-3})$
- pour un corps cylindrique fermé $\underline{v} - U_\infty \underline{i} \approx O(r^{-2})$

La force agissant sur un corps peut être déduite de l'étude de l'équation intégrale de la quantité de mouvement. Par exemple, pour un corps tridimensionnel, le volume de contrôle est limité d'une part à l'extérieur par une surface S_e constituée d'une grande sphère de rayon R centrée sur le corps, et d'autre part à l'intérieur par une surface S_i enveloppant le corps lui-même (figure A.6). Ayant ainsi exclu le corps du volume de contrôle il faut introduire une force qui représente la force exercée par le corps sur le volume de contrôle. A partir de l'équation intégrale de la quantité de mouvement et de l'expression sphérique du tenseur des contraintes (écoulement irrotationnel) et par application du principe d'action-réaction, la force F_i agissant dans la direction i sur le corps est donnée en toute généralité par

$$-F_i = \int_{S_e} (\rho \vec{V} \cdot \vec{n}) v_i dS + \int_{S_e} p \cos(\vec{n}, x_i) dS \quad (\text{A.5})$$

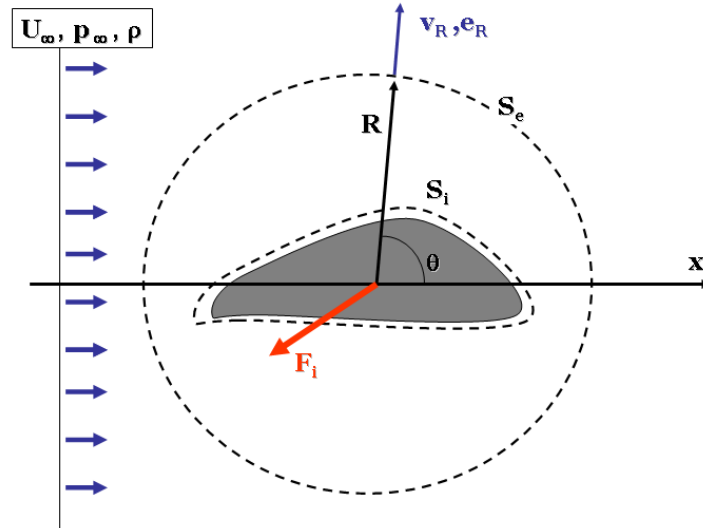


FIG. A.6 – Volume de contrôle pour le calcul de la traînée

Sur la surface S_e , les variables v_x , $\underline{v} \cdot \underline{n} = v_R$ et $p \cos\theta$ s'expriment donc par les relations suivantes :

$$\begin{cases} v_x = U_\infty + O(R^{-3}) \\ v_R = U_\infty \cos\theta + O(R^{-3}) \\ p = p_\infty - O(R^{-3}) \\ dS = R^2 \sin\theta \cos\theta d\omega \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Les intégrales (A.5) contenant U_∞ et p_∞ s'annulent sur la surface S_e puisque la circulation $\Gamma = 0$ et celles contenant les termes $O(R^{-3})$ tendent vers zéro quand R tend vers l'infini. Cette dernière affirmation n'est valable qu'en l'absence de tout mécanisme de transport d'énergie ou de quantité de mouvement.

L'explication physique de ce résultat surprenant est liée à des considérations énergétiques. La puissance mécanique fournie par une force de résistance doit être transformée au sein du fluide soit en chaleur, soit en énergie cinétique. Cela représenterait un débit continu d'énergie vers l'infini sous la forme d'un transport en aval de l'énergie interne croissante du fluide dans le premier cas ou d'un transport d'énergie cinétique sous forme de mouvement ondulatoire dans le second cas. Cependant, nous avons présupposé que dans un écoulement idéal aucun mécanisme de dissipation d'énergie ne puisse exister. Il en est de même en ce qui concerne les phénomènes ondulatoires dans un fluide incompressible d'étendue infinie. De ce fait la force ne peut pas exister.

A.2.2 Paradoxe de d'Alembert en présence d'une surface libre

Le paradoxe de d'Alembert est-il toujours applicable en présence d'une surface libre ? La réponse à cette question est clairement non. Si on reprend la dernière étape de la démonstration du paragraphe A.2.1 relative à l'annulation des intégrales (A.5), on constate que les ondes de surfaces qui peuvent être engendrées à la surface libre du fluide incompressible idéal sont susceptibles de transporter de l'énergie et de la quantité de mouvement vers l'infini. Par conséquent, **les ondes de surface sont intimement liées à une force de traînée.**

Pour illustrer l'importance fondamentale de ce résultat, réalisons **l'expérience de pensée** suivante : Considérons un élément plan en translation verticale uniforme dans l'océan que nous considérerons comme un fluide parfait. Lorsque l'élément plan se trouve à très grande profondeur, l'influence de la surface libre est négligeable et aucun mécanisme de transport d'énergie ou de quantité de mouvement n'est disponible. Par application du théorème d'Alembert, l'effort de traînée est nul. Par contre, lorsque cet élément s'approche de la surface, les ondes de surfaces générées transportent de l'énergie et de la quantité de mouvement si bien que l'effort de traînée devient non nul. Cette expérience de pensée met clairement en évidence le rôle fondamental que joue la surface libre dans le mécanisme de création d'efforts de traînée. Il est donc clair que les résultats de l'aérodynamique ne sont pas applicables à l'hydrodynamique.

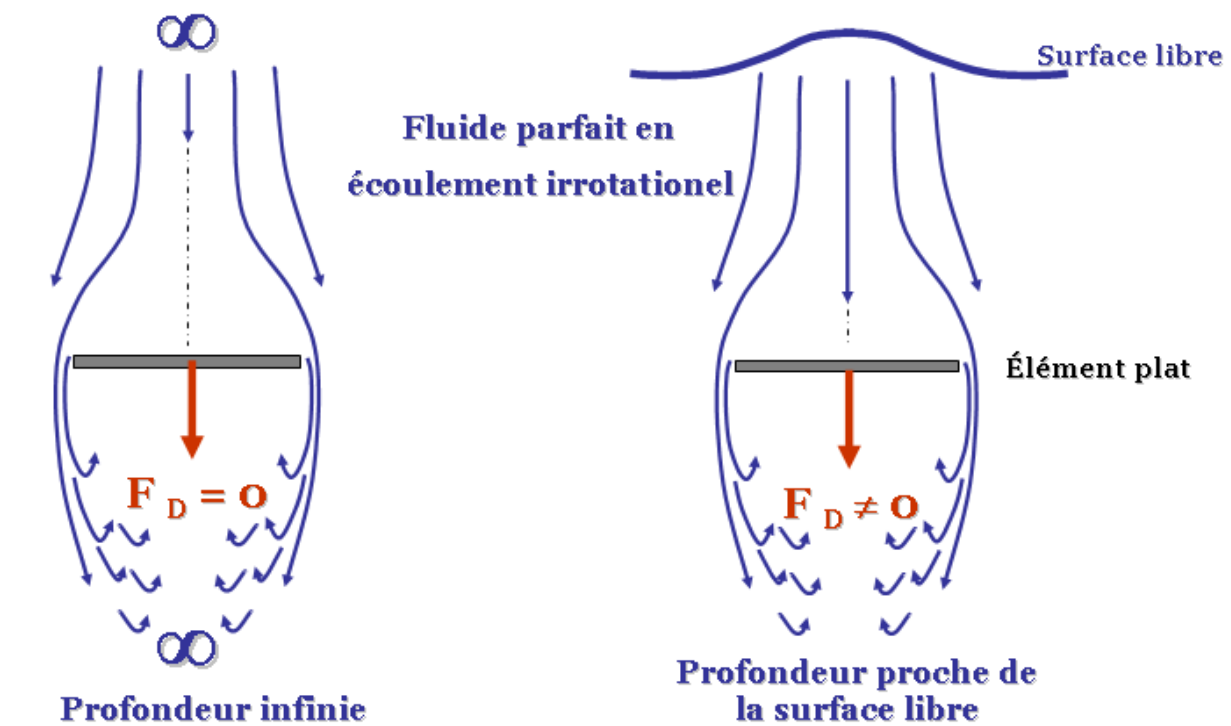


FIG. A.7 – Principe de l'expérience de pensée sur l'effet de la surface libre

ANNEXE B

RESULTATS EXPÉRIMENTAUX COMPLÉMENTAIRES

Dans le chapitre 3 page 3 est présentée une partie des résultats de la campagne expérimentale menée au Laboratoire des Constructions Hydrauliques de l'Université de Liège. Afin de tester la validité et la robustesse des conclusions inférées de ces essais, d'autres essais furent menés en variant divers paramètres. Puisqu'ils n'apportent pas d'informations supplémentaires, il n'est pas justifié de les placer dans le corps de ce travail. Néanmoins, l'auteur, ne souhaitant pas que cette base de données soit complètement perdue, propose un recueil de ces résultats dans cette annexe.

Sommaire

B.1	Analyse de l'erreur de mesure	XII
B.1.1	La précision de la mesure	XII
B.1.2	Erreur systématique	XIII
B.1.3	Dispersion statistique	XIII
B.1.4	Conclusion	XIV
B.2	Essais complémentaires à vitesse constante	XV
B.2.1	Vitesse et accélération	XV
B.2.2	Variation de surface libre	XV
B.2.3	Pression de traînée	XVI
B.2.4	Coefficient de pression	XIX
B.3	Essais complémentaires à effort contrôlé	XX
B.3.1	Effort, vitesse et accélération	XX
B.3.2	Variation de surface libre	XXI
B.3.3	Coefficient de pression	XXI
B.3.4	Pression de traînée	XXII

B.1 Analyse de l'erreur de mesure

En dépouillant les résultats de mesures expérimentales, trois sources d'erreurs sont à considérer :

1. la précision de la mesure $\Delta 1$, ou l'incertitude ;
2. la dispersion statistique $\Delta 2$;
3. l'erreur systématique $\Delta 3$ ou biais.

L'erreur totale est alors donnée par $\Delta = \Delta 1 + \Delta 2 + \Delta 3$

B.1.1 La précision de la mesure

La précision de la mesure est directement liée à la résolution des capteurs et la stabilité des valeurs qu'ils donnent. Dans le cas qui nous intéresse, les données fournisseurs indiquent une résolution de ± 1 mm pour les capteurs de pression, de déplacement et de surface libre. Étant donné que ces capteurs ne sont pas neufs, il a été réalisé une validation des trois capteurs par comparaison de leurs mesures avec des mesures manuelles. Une analyse statistique de la dispersion des résultats a été alors possible et les résultats sont fournis ci-dessous.

Pour les capteurs de pression (pression mesurée sur les faces de l'élément plan et variation de surface libre), on constate sur la figure B.1 que les erreurs sont comprises entre ± 2 mm. Puisque la mesure manuelle a une précision de ± 1 mm, on peut admettre que la précision de la mesure de pression vaut $\Delta 1 = 1$ mm. De plus, on constate que les résultats ne présentent pas de biais.

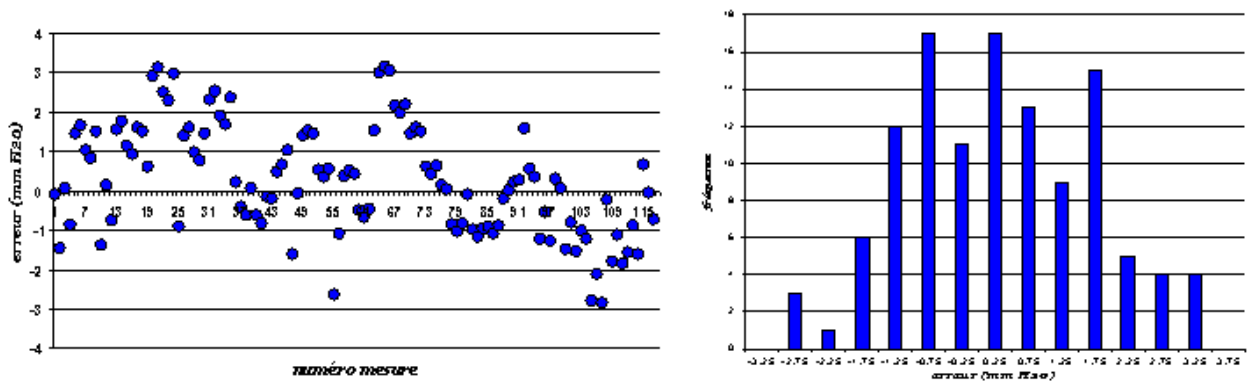


FIG. B.1 – Analyse statistique de l'erreur sur la mesure de pression (117 mesures) en mm H20

Comme illustré sur la figure B.2, la précision sur la mesure de déplacement est $\Delta l = 1$ mm et les mesures ne présentent pas de biais.

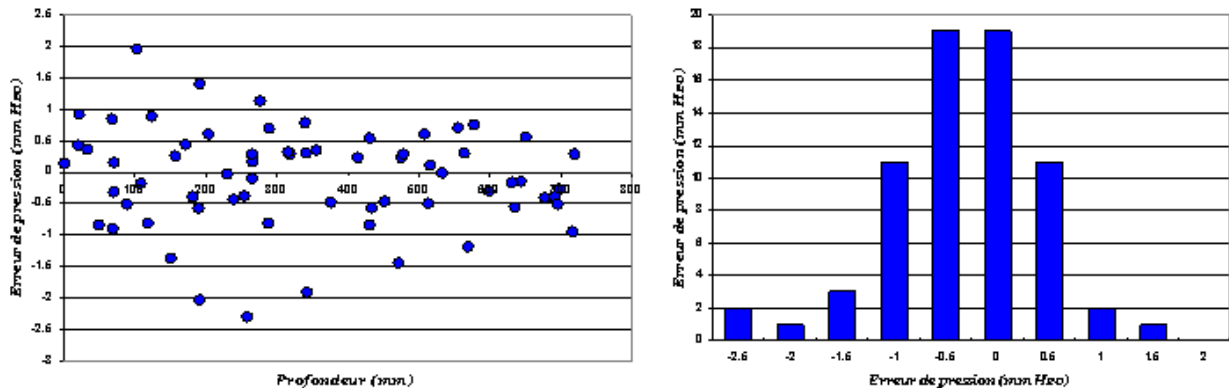


FIG. B.2 – Analyse statistique de l'erreur sur la mesure de déplacement (69 mesures) en mm

En conclusion, la **précision sur les mesures réalisées au laboratoire** vaut $\Delta l = 1$ mm.

B.1.2 Erreur systématique

L'erreur systématique comprend des phénomènes comme l'erreur d'échantillonnage, l'erreur de préparation,... Ces problèmes peuvent introduire une dispersion statistique (on se reportera alors au paragraphe B.1.3) ou bien un décalage des résultats si l'erreur commise est toujours la même. On peut en effet avoir une très faible dispersion statistique des mesures et avoir toutefois un résultat faux !

Afin d'éviter toute erreur systématique, il est opéré à une *validation hydrostatique* préalable à chaque série d'essais dynamiques qui permet la disparition des biais significatifs (voir paragraphe 3.1.3).

B.1.3 Dispersion statistique

Si l'on mesure plusieurs fois le même phénomène avec un appareil suffisamment précis, on obtiendra chaque fois un résultat différent x_i . Parmi les phénomènes perturbateurs qui expliquent ces variations, on peut dénombrer :

- l'erreur d'échantillonnage ;
- l'erreur de préparation : la porte peut prendre des positions dans l'eau sensiblement différentes ;
- la stabilité de l'appareil : celui-ci peut être sensible aux variations de température, de pression atmosphérique, de tension d'alimentation électrique, aux vibrations,...

Sur un grand nombre de mesures, on peut considérer que l'on a une probabilité dont la distribution est gaussienne. Le résultat de la mesure sera alors la moyenne empirique \bar{x} des résultats. La théorie statistique indique en effet que \bar{x} constitue un estimateur de l'espérance μ de la loi normale suivie par les variables x_1, \dots, x_N . En outre, il est possible d'obtenir un intervalle de confiance pour μ à partir d'une réalisation des variables x_1, \dots, x_N de laquelle on déduit la moyenne \bar{x} et la variance empirique corrigée $\hat{\sigma}$:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \tag{B.1}$$

$$|\mu - \bar{x}| \leq t_{\gamma}^{n-1} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{N}}$$

- où $\alpha = 1 - 2\gamma$ est le niveau de confiance souhaité
 N est le nombre de mesures
 $\hat{\sigma}^2$ est la variance empirique corrigée
 \bar{x} est la moyenne
 μ est l'espérance de la loi normale suivie par les variables mesurées
 t_{γ}^{n-1} est le quantile d'ordre $1 - \gamma$ de la loi de student à n-1 degré de liberté

B.1.4 Conclusion

En conclusion de cette étude de l'erreur sur les mesures expérimentales, nous constatons que l'erreur totale sur chacun des capteurs est donné par la relation suivante

$$\Delta [mm] = 1 + t_{\gamma}^{n-1} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{N}} \tag{B.2}$$

B.2 Essais complémentaires à vitesse constante

B.2.1 Vitesse et accélération

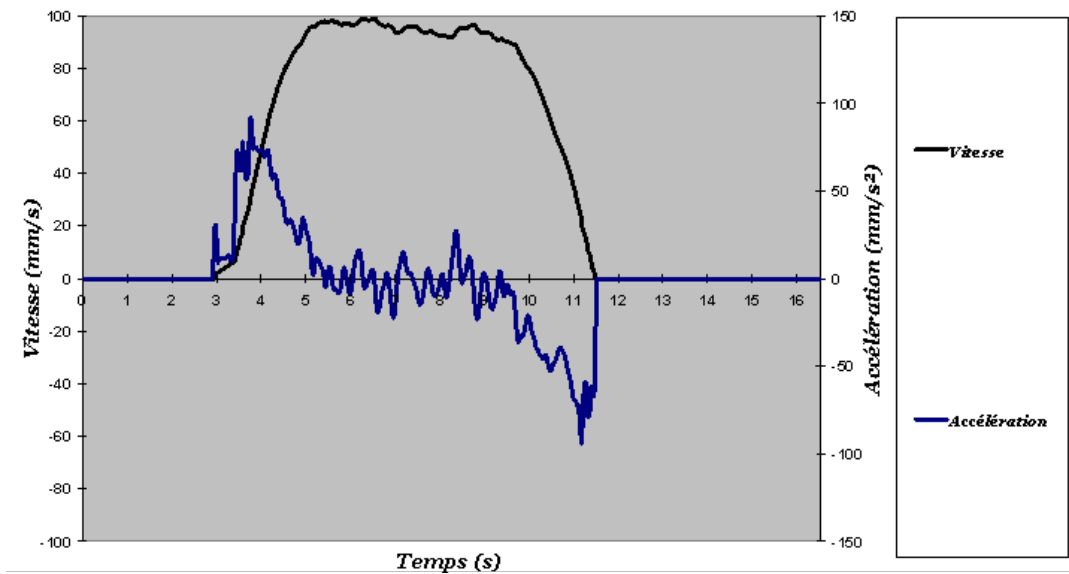


FIG. B.3 – Évolution de la vitesse et de l'accélération - essais à vitesse constante 95 mm/s

B.2.2 Variation de surface libre

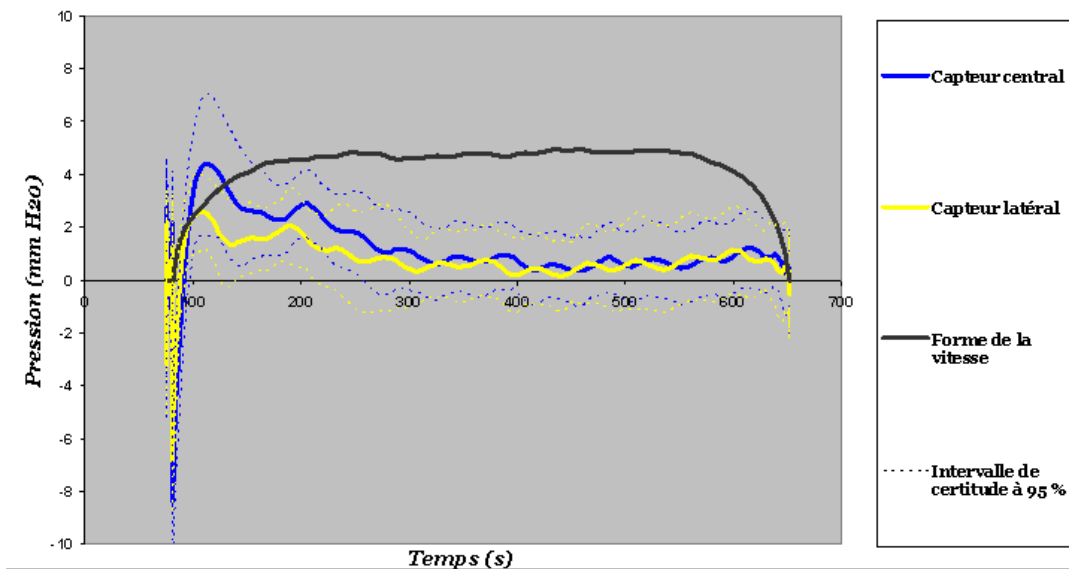


FIG. B.4 – Évolution en fonction de la profondeur de la variation de surface libre - essais à vitesse constante 95 mm/s

B.2.3 Pression de traînée

Mesures expérimentales

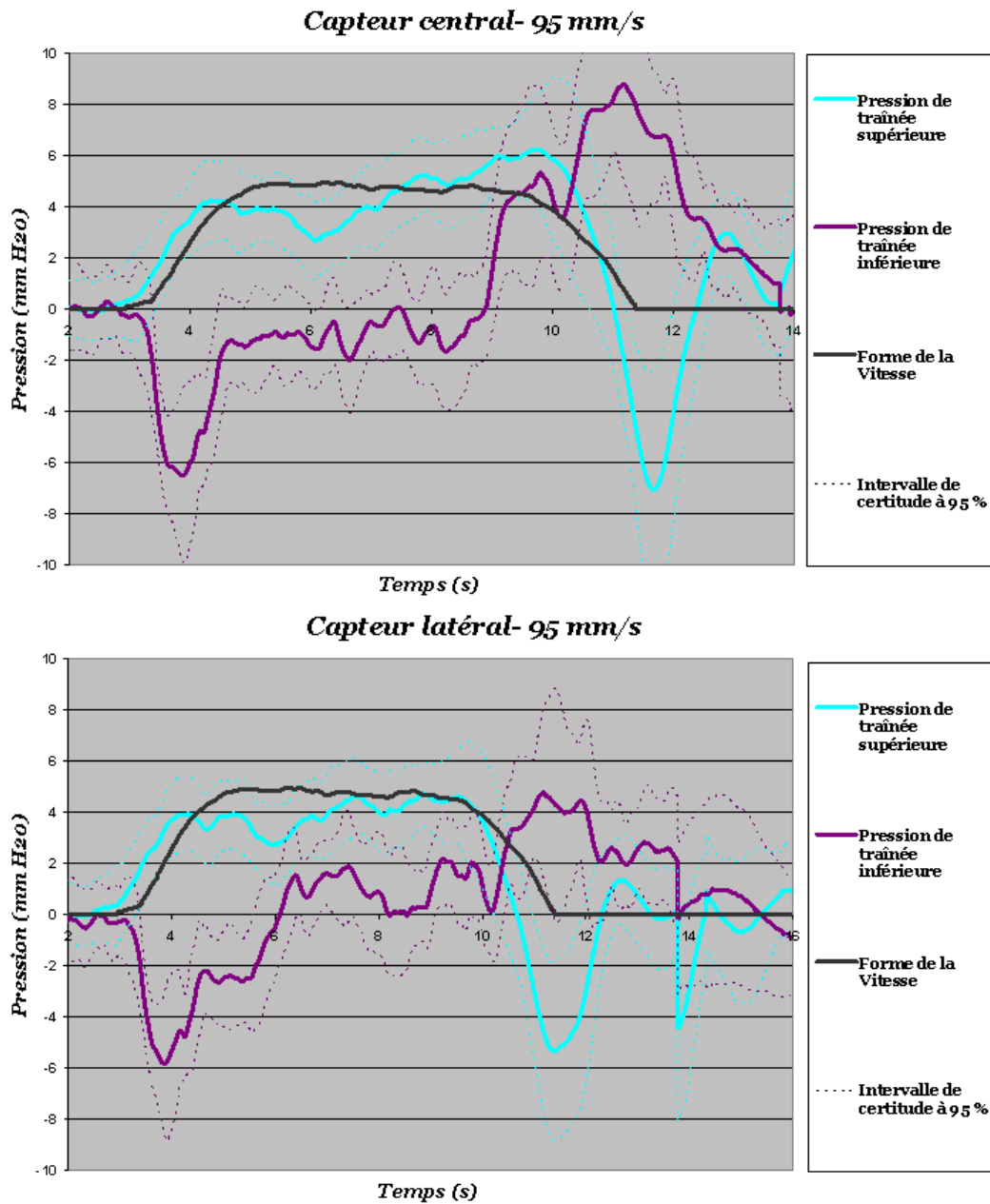


FIG. B.5 – Évolution temporelle de la pression de traînée - essais à vitesse constante 95 mm/s

Comparaison capteur central - capteur latéral

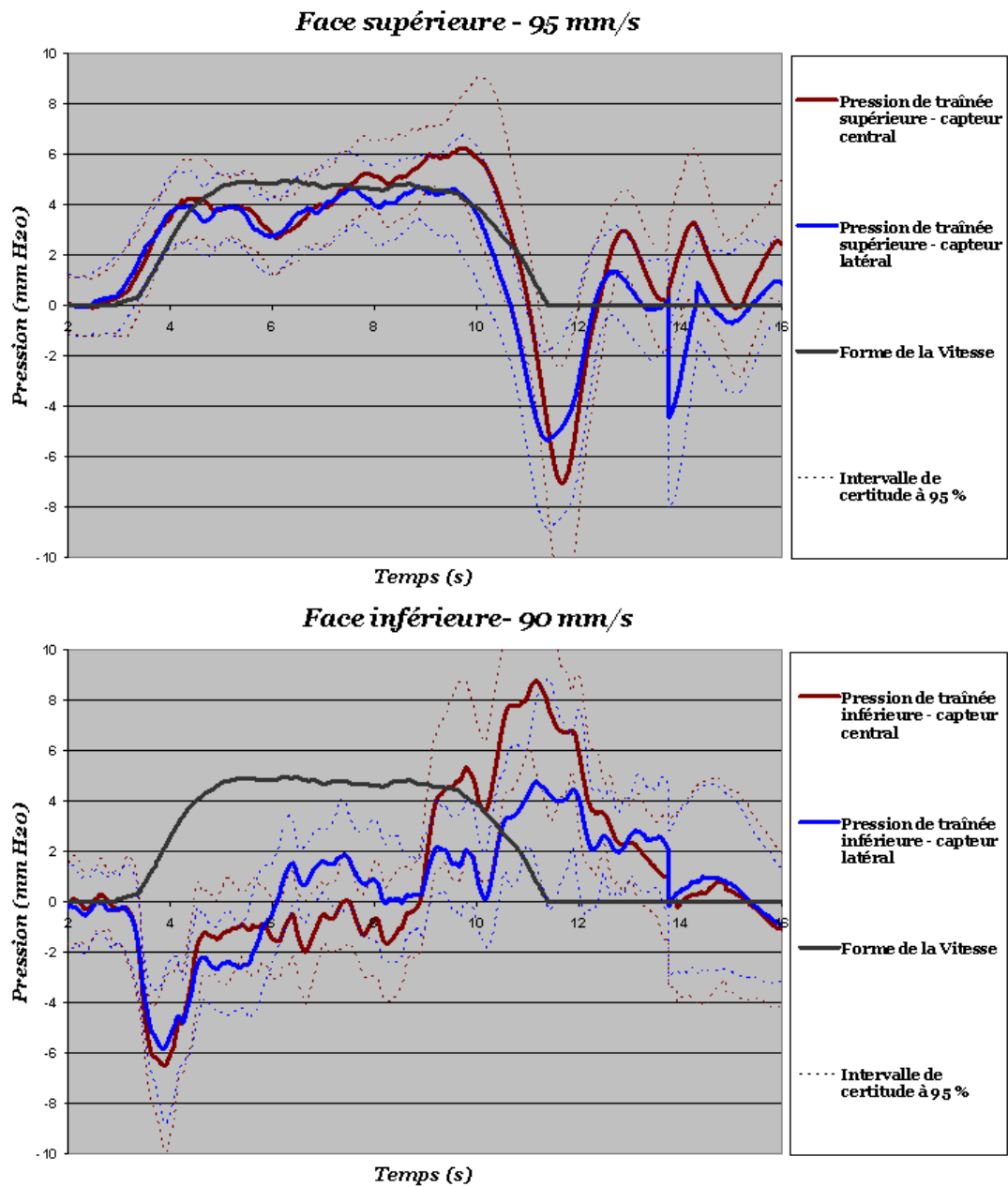


FIG. B.6 – Comparaison de l'évolution temporelle de la pression de traînée entre le capteur central et latéral - essais à vitesse constante 95 mm/s

Pression hydrodynamique théorique

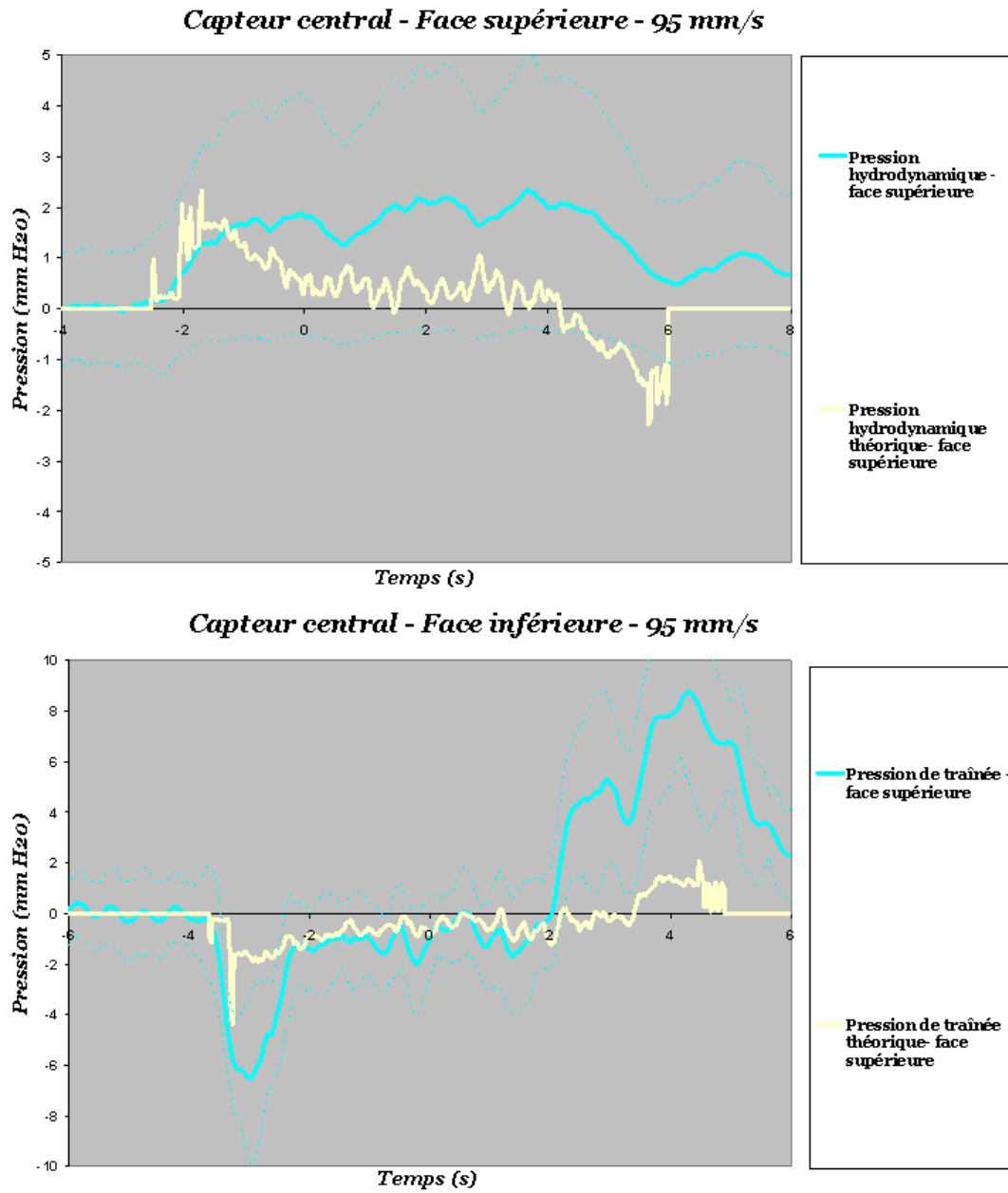


FIG. B.7 – Évolution des pressions hydrodynamiques théoriques- essais à vitesse constante 95 mm/s

B.2.4 Coefficient de pression

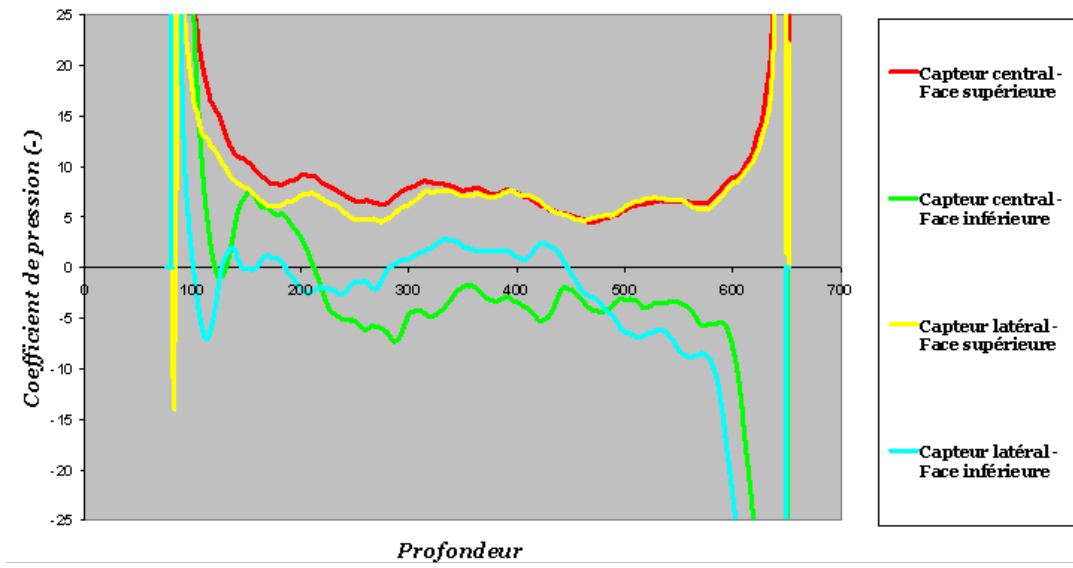


FIG. B.8 – Évolution des coefficients de pression - essais à vitesse constante 95 mm/s

B.3 Essais complémentaires à effort contrôlé

B.3.1 Effort, vitesse et accélération

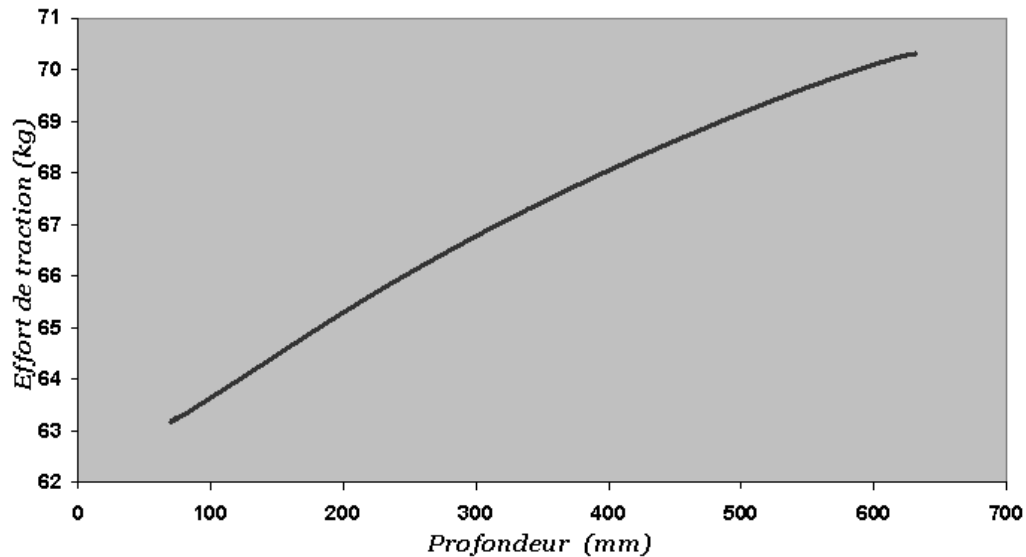


FIG. B.9 – Évolution en fonction de la profondeur de l'effort de traction - essais à effort contrôlé - 20 kg

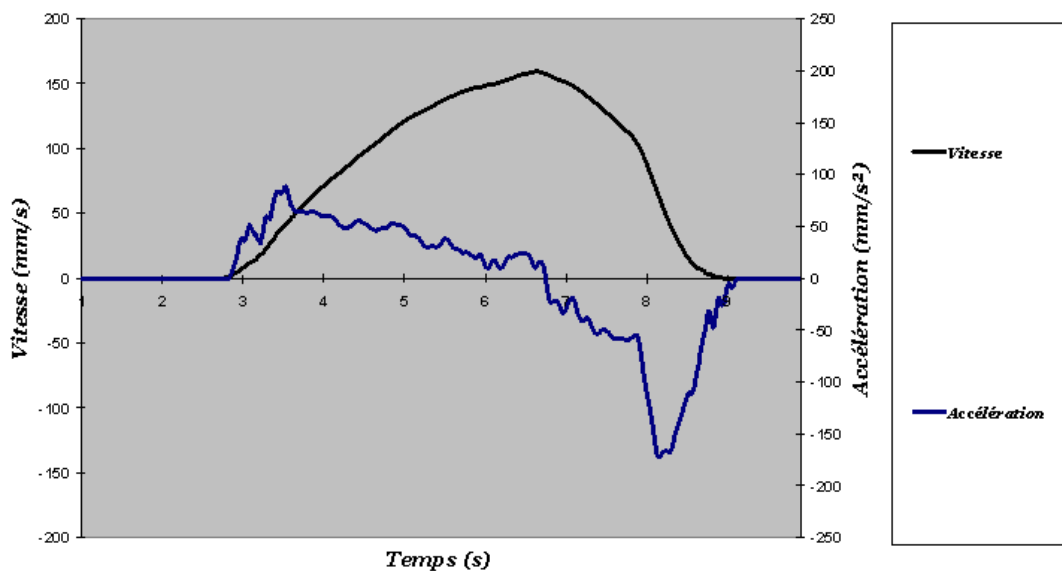


FIG. B.10 – Évolution temporelle de la vitesse et de l'accélération - essais à effort contrôlé - 20 kg

B.3.2 Variation de surface libre

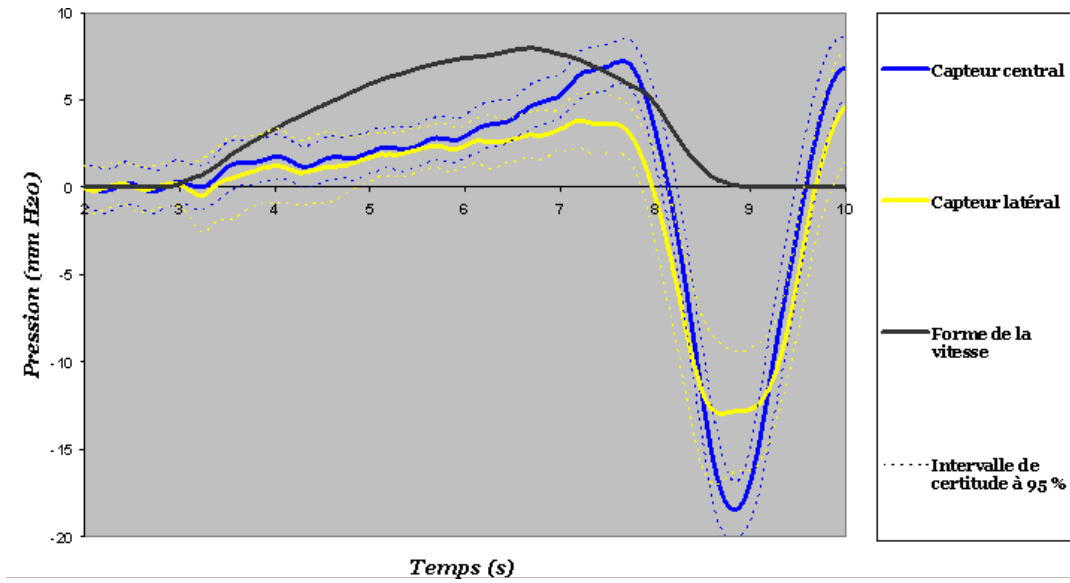


FIG. B.11 – Évolution temporelle de la variation de surface libre - essais à effort contrôlé - 20 kg

B.3.3 Coefficient de pression

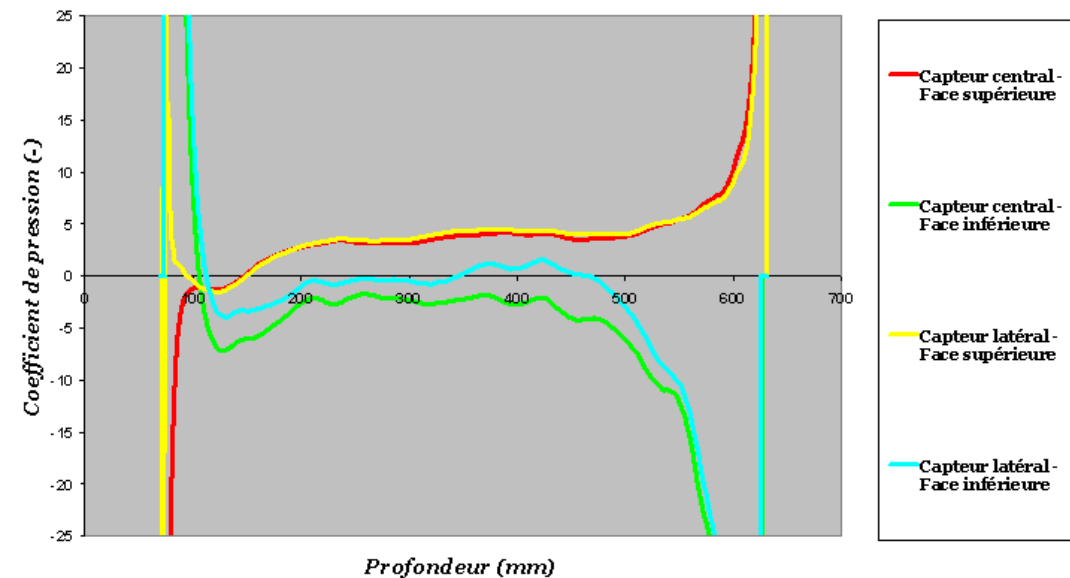
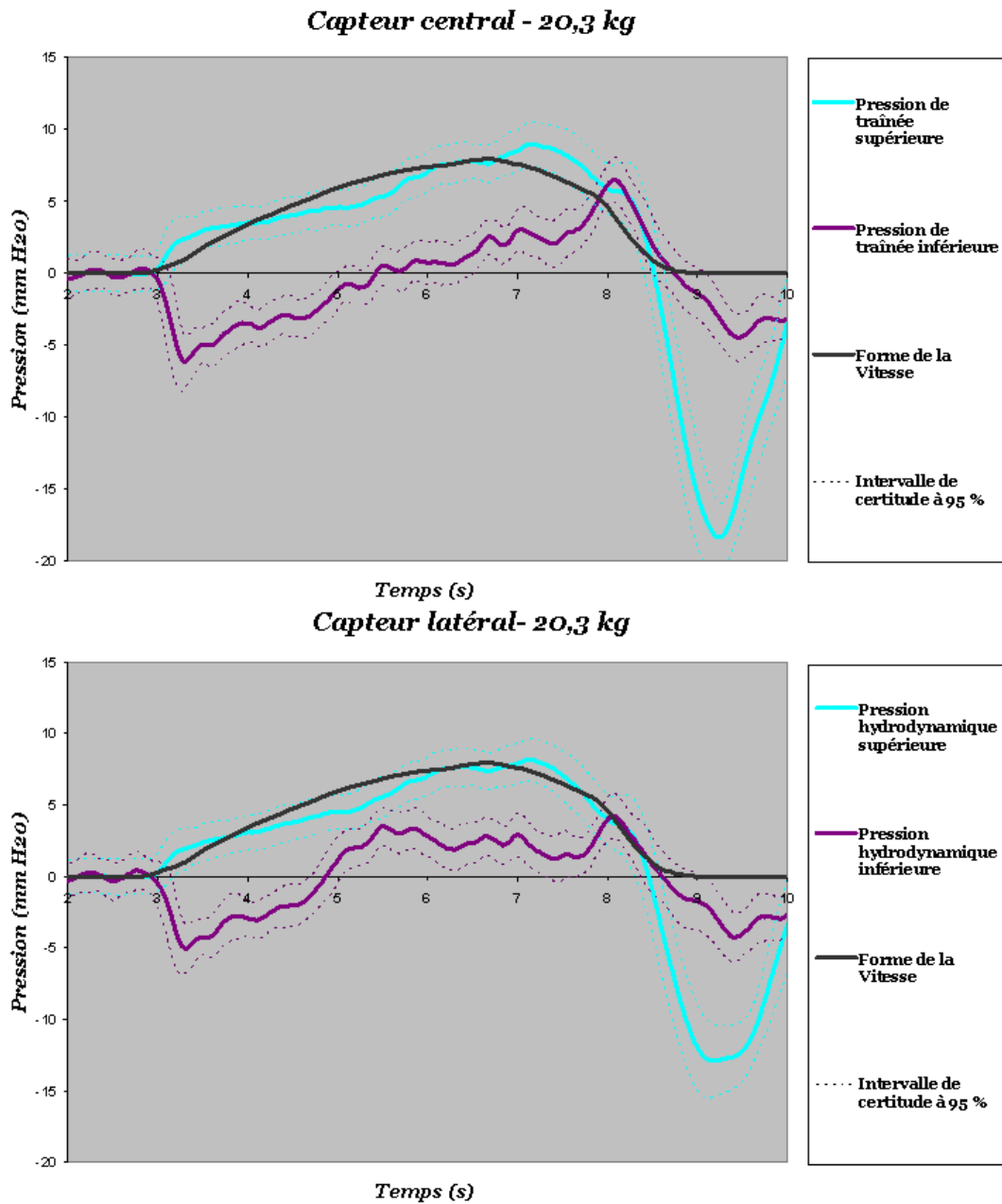


FIG. B.12 – Évolution avec la profondeur du coefficient de pression - essais à effort contrôlé - 20 kg

B.3.4 Pression de traînée

Mesures expérimentales

FIG. B.13 – Évolution temporelle de la *pression de traînée* - essais à effort constant - 20 kg

Comparaison capteur central-capteur latéral

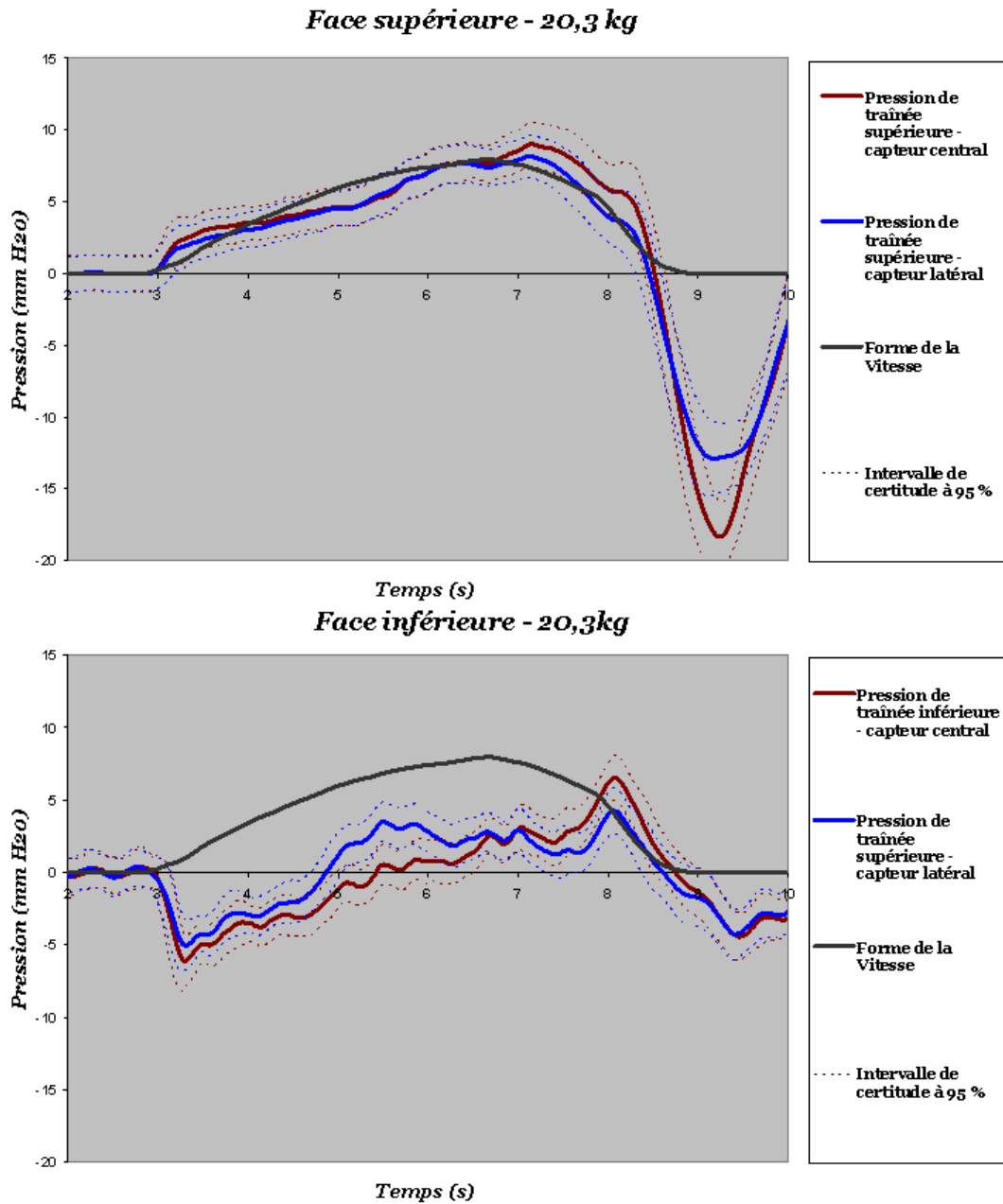


FIG. B.14 – Comparaison de l'évolution temporelle des pressions de traînée au capteur central et latéral - essais à effort contrôlé - 20 kg

Pression hydrodynamique théorique

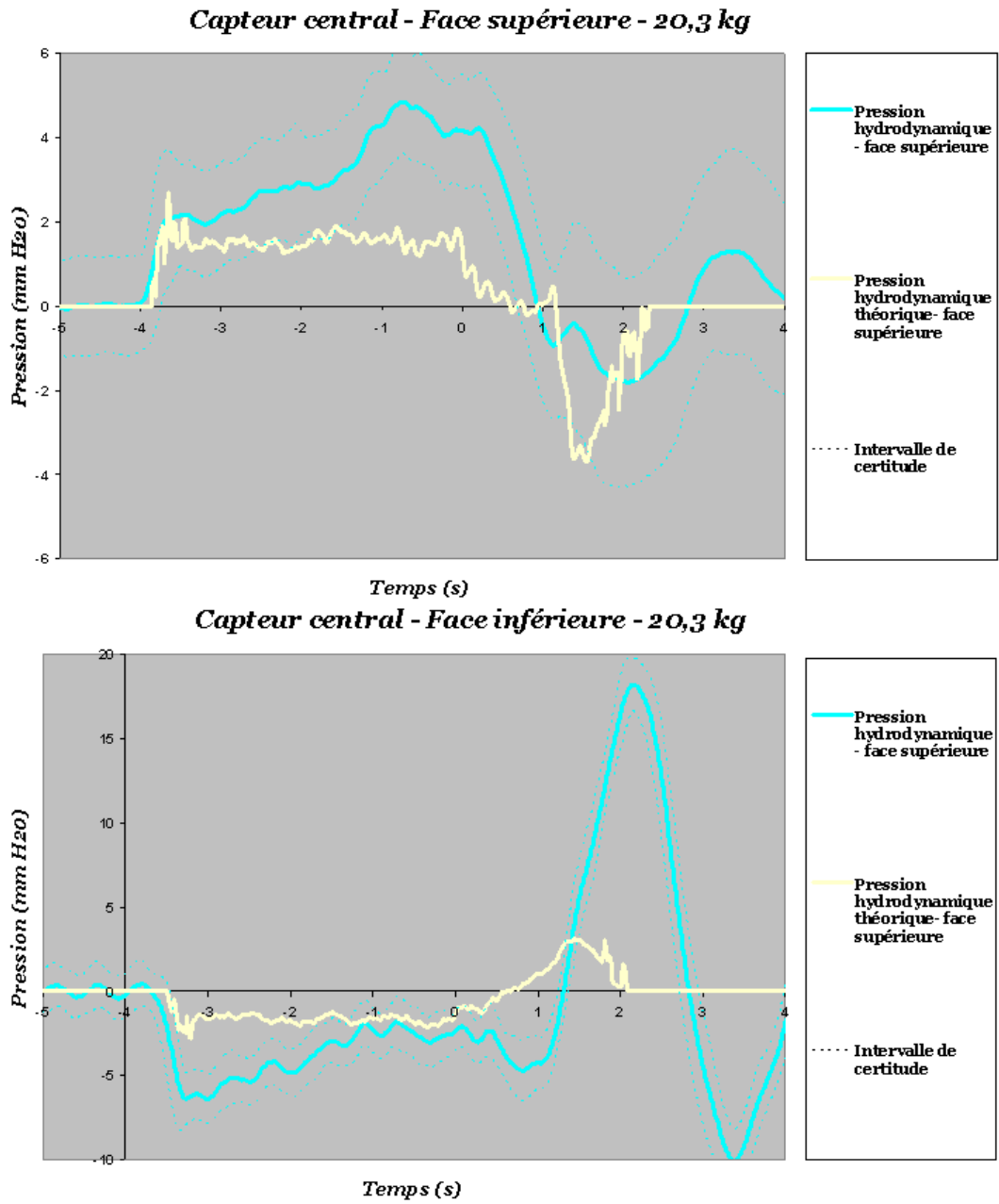


FIG. B.15 – Évolution temporelle des pressions hydrodynamiques théoriques - essais à effort contrôlé - 30 kg

DISCRÉTISATION DES LOIS DE CONSERVATION HYPERBOLIQUES

Dans le paragraphe 5.2 page 78 traitant de la discrétisation de l'équation d'évolution temporelle (5.9) de la fonction *Level Set*, il est fait appel à de nombreuses reprises aux résultats concernant la résolution numérique des équations de conservation hyperboliques. C'est pourquoi, dans cette annexe, nous proposons, au lecteur non familier de cette théorie fondamentale de la mécanique des fluides, un résumé non-exhaustif de ces méthodes. Cet aide-mémoire est largement issu de [Piroton,2001], [Shu,1997], [Hirsch,1984,a] et [Hirsch,1984,b].

Sommaire

C.1 Nature mathématique de l'équation	XXVI
C.1.1 Caractéristiques	XXVI
C.1.2 Théorème de Lax-Wendroff	XXVIII
C.1.3 Condition d'entropie	XXVIII
C.1.4 Condition de monotonie	XXX
C.1.5 Décentrement du schéma	XXX
C.2 Méthode de Godunov	XXXII
C.2.1 Problème de Riemann	XXXII
C.2.2 Principe du schéma de Godunov	XXXIII
C.2.3 Schéma de type Godunov	XXXV
C.2.4 Résumé du schéma de Godunov	XXXVI
C.3 Schéma de type Godunov du second ordre de précision ou plus .	XXXVII
C.3.1 Schéma monotone	XXXVIII
C.3.2 Schéma <i>Total Variation Diminishing</i>	XXXVIII
C.4 Schémas <i>ENO</i> et <i>WENO</i> pour la résolution des lois de conservation hyperboliques	XL
C.4.1 Reconstruction 1D des valeurs aux frontières	XL
C.4.2 Approximation <i>ENO</i> et <i>WENO</i> en 1D	XLIII
C.4.3 Schémas <i>ENO</i> et <i>WENO</i> pour les lois de conservation 1D	XLVIII
C.4.4 Schémas <i>ENO</i> et <i>WENO</i> pour les lois de conservation 2D	LI
C.5 Discrétisation temporelle	LIII

C.1 Nature mathématique de l'équation

Dans cette étude, il est envisagé de modéliser l'évolution de la surface libre grâce à la méthode *Level Set* mais en se passant de la problématique étape de réinitialisation de la fonction *Level-Set*. Cette possibilité nécessite de résoudre l'équation d'évolution temporelle (5.9) page 79 de la fonction ϕ à un très haut ordre de précision. Il est montré dans le chapitre 5 que cette équation d'évolution est une équation de type Hamilton-Jacobi.

Dans le paragraphe 5.2.3 page 80, nous avons démontré que la résolution numérique des équations d'Hamilton-Jacobi présente un lien fort avec la résolution numérique des lois de conservation hyperboliques. En particulier, TOUS les schémas discrets utilisables en pratique pour résoudre (5.9) constituent des adaptations des schémas développés en *computational fluid dynamics* pour la résolution des équations de conservation hyperboliques. De ce fait, il n'existe aucune théorie autonome de la discrétisation des équations d'Hamilton-Jacobi.

Dans le paragraphe 5.2 page 78 ne sont donc présentés que les résultats spécifiques à l'équation d'évolution. Il y est fait appel à de nombreuses reprises aux résultats des publications de la *computational fluid dynamics* traitant des équations de conservation hyperboliques. C'est pourquoi, dans cette annexe, il est proposé un résumé non-exhaustif des méthodes classiques de discrétisation des lois de conservation hyperboliques. Cet aide-mémoire, tel que nous le présentons ici, est largement issu de [Piroton,2001], [Shu,1997], [Hirsch,1984,a] et [Hirsch,1984,b].

La forme générale de la loi de conservation hyperbolique sans terme source s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f_i(\underline{u})}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{C.1})$$

$$\underline{u}(x, t = 0) = \underline{u}_0(x) \quad (\text{C.2})$$

Il est bien connu que l'équation différentielle partielle aux valeurs initiales (C.1) développe des solutions discontinues. En fait, l'apparition de solutions discontinues est symptomatique d'une classe particulière de solution. Cette classe, dite des *solutions faibles*, correspond à l'ensemble des solutions de l'équation intégrale de (C.1), dite forme faible de l'équation. Notons que la *solution faible* est rarement unique. Cette constatation est le point clé de la résolution des lois de conservation hyperboliques. **Comment est-il possible de s'assurer que le schéma numérique fournira la *solution faible* physiquement admissible ?**

C.1.1 Caractéristiques

Le problème des *solutions faibles* et discontinues est mis clairement en évidence lors de l'étude des caractéristiques de l'équation (C.1). En supposant le domaine unidimensionnel ($d = 1$), la caractéristique s'écrit

$$\frac{du(x)}{dt} = 0 \quad \text{le long de} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u} \quad (\text{C.3})$$

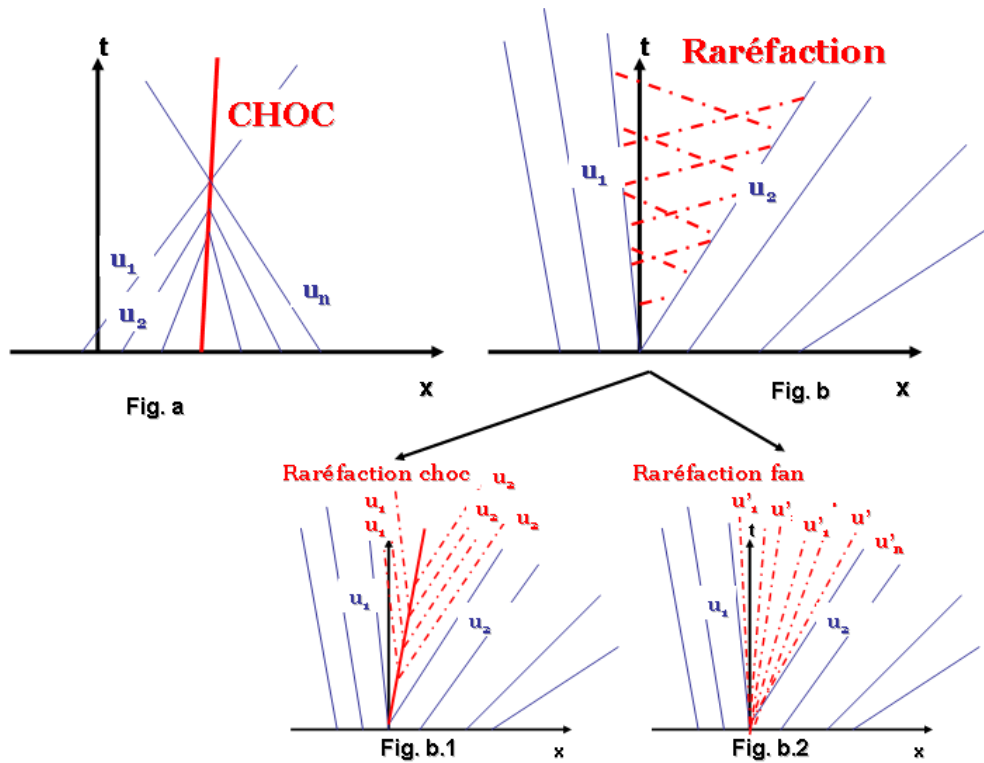


FIG. C.1 – Caractéristiques de l'équation de conservation hyperbolique 1D

La quantité constante u (dite variable conservée) se propage donc dans le temps et l'espace le long de la caractéristique de pente $\frac{\partial f}{\partial u}$. Puisque cette pente varie au cours du temps, les caractéristiques ne sont pas parallèles, donnant lieu à deux situations singulières :

1. Les caractéristiques s'entrecoupent, forçant la fonction u à prendre simultanément deux valeurs en un point unique (figure C.1 a.). Cette ambiguïté sur le valeur de u est appelée un *choc*. Le long de la ligne qui marque le *choc*, la solution est discontinue, sautant de la valeur à droite à la valeur à gauche.
2. Les caractéristiques divergent laissant une zone non définie (figure C.1 b.). Cette indétermination sur la valeur de ϕ est appelée une *rarefaction* ou *onde de propagation*. Cette zone correspond en réalité à la zone des *solutions faibles* de l'équation (i.e solutions de l'équation intégrale). En général, les *solutions faibles* de l'équation ne sont pas uniques. La question qui se pose alors est de trouver comment générer la *solution faible* correcte. Deux solutions extrêmes sont envisageables :
 - (a) Le *rarefaction choc* caractérisé par un choc dans la zone de *rarefaction*, donc par une discontinuité (figure C.1 b.1).
 - (b) Le *rarefaction fan* caractérisé par une transition progressive entre les deux valeurs extrêmes de la zone de *rarefaction* (figure C.1 b.2). La solution physiquement observée dans la nature est cette seconde possibilité.

C.1.2 Théorème de Lax-Wendroff

Dans ce texte, tous les schémas de discrétisation utilisés ou envisagés sont des schémas conservatifs. En effet, **le théorème de Lax-Wendroff nous assure que la solution fournie par un schéma conservatif, si ce dernier converge, est une *solution faible* du problème aux valeurs initiales.**

Un schéma numérique semi-discret (*method of lines*) est sous sa forme conservative s'il s'écrit

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{f_{i+1/2}^* - f_{i-1/2}^*}{\Delta x} = 0 \quad (\text{C.4})$$

où f^* , appelée flux numérique, est fonction des $(2k-1)$ points voisins

$$f_{i+1/2}^* = f^* \left(u_{i-k}^n, u_{i-k+1}^n, \dots, u_{i+k}^n \right) \quad (\text{C.5})$$

et vérifie la condition de consistance suivante :

$$f_{u,u,\dots,u}^* = f(u) \quad (\text{C.6})$$

L'importance de la formalisation de cette condition de conservation est exprimée par le théorème fondamental de Lax-Wendroff :

SI LA SOLUTION u_i DE L'ÉQUATION DISCRÉTISÉE (C.4) CONVERGE DE MANIÈRE BORNÉE PRESQUE PARTOUT VERS UNE FONCTION $u(x,t)$ LORSQUE $\Delta x \rightarrow 0$ ET $\Delta t \rightarrow 0$, ALORS $u(x,t)$ EST UNE *solution faible* DE L'ÉQUATION (C.1).

C.1.3 Condition d'entropie

Nous venons de voir que les équations de conservation hyperboliques admettent des solutions discontinues qui, d'un point de vue mathématique, ne satisfont pas les équations différentielles, mais sont des solutions de la forme intégrale des équations. Si le schéma numérique est sous forme conservative, le théorème de Lax-Wendroff assure que la solution obtenue est une *solution faible* du problème. Néanmoins, plusieurs *solutions faibles* peuvent exister sans que celles-ci aient toujours un sens physique. Il est donc indispensable d'imposer une condition supplémentaire qui permette de choisir la *solution faible* correcte lors de la résolution numérique de l'équation.

Sur base du second principe de la thermodynamique, qui affirme que *l'entropie de toute évolution adiabatique réalisable ne peut qu'augmenter durant la transformation du système*, il est à nouveau établi que seuls les chocs de compression correspondent à des situations physiques. Les *rarefaction chocs*, qui correspondent à une variation négative d'entropie, sont exclus par ce principe. L'étude de l'entropie d'un phénomène permet donc de juger de son acceptabilité. Il est donc légitime de chercher à obtenir une expression mathématique du second principe de la thermodynamique, dite *condition d'entropie*, que seuls les processus physiques satisfont.

Nous présentons dans ce texte l'analyse de la condition d'entropie développée par Lax et résumée dans [Hirsch,1984,b,page 520]. Cette condition peut se mettre sous plusieurs formes. Concentrons nous sur les formes les plus adaptées aux problèmes pratiques.

Lax a ainsi montré que tout problème aux valeurs initiales possède une solution généralisée unique, satisfaisant la condition d'entropie, qui peut être considérée comme la limite, pour des coefficients ν évanouissant, de l'équation parabolique

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{C.7})$$

Ce résultat donne des indications sur une première manière d'implémenter la condition d'entropie dans les schémas numériques : *si des termes appropriés de viscosité sont ajoutés aux équations discrétisées, aucune discontinuité non-physique n'apparaîtra*. Cette solution pratique est néanmoins complexe à contrôler finement et provoque parfois des dissipations trop importantes de la solution réelle. C'est pourquoi d'autres formulations de la condition d'entropie s'avèrent nécessaires.

En introduisant la notion de *fonction d'entropie* $|u - z|$, où z est une constante quelconque, la condition d'entropie de l'équation de conservation hyperbolique scalaire $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ est ré-écrite sous la forme :

$$\frac{\partial |u - z|}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [f(u) - f(z)] \cdot \text{sgn}(u - z) \leq 0 \quad (\text{C.8})$$

qui possède $\forall t > t_0$ la borne suivante au sens de la norme L^1 :

$$\|u(x, t) - v(x, t)\|_{L^1} \leq \|u(x, t_0) - v(x, t_0)\|_{L^1} \quad (\text{C.9})$$

Kruskov, en 1970, a montré que cette condition assure l'existence et l'unicité de la solution de la loi de conservation scalaire. Au niveau discret, la propriété (C.9) devient

$$\|u^m - v^m\|_{L^1} \leq \|u^n - v^n\|_{L^1} \quad \forall m \geq n \geq 0 \quad (\text{C.10})$$

$$\text{avec } \|u^m - v^m\|_{L^1} = \sum_i |u_i^m - v_i^m|_{L^1} = \sum_i (u_i^m - v_i^m) \cdot \text{sgn}(u_i^m - v_i^m)$$

Cette condition d'entropie n'est pas véritablement utilisable en pratique dans les schémas numériques. Néanmoins, elle met en évidence la signification intime de la condition d'entropie : *la variation de la solution, au sens général, ne peut augmenter au cours de l'évolution temporelle de la solution*. En outre, il est possible de mettre en évidence une famille de schémas numériques qui vérifient toujours cette équation. Ce sont les *schémas monotones*, qui sont présentés dans le paragraphe suivant.

C.1.4 Condition de monotonie

La condition de monotonie s'exprime de manière plus aisée si le schéma numérique conservatif appliqué à l'équation de conservation scalaire $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ est exprimé sous la forme générale suivante :

$$u_i^{n+1} = H \left(u_{i-k}^n, u_{i-k+1}^n, \dots, u_{i+k}^n \right) \quad (\text{C.11})$$

Ce schéma est dit **monotone** si H est une fonction monotone croissante de chacun de ses arguments, i.e

$$\frac{\partial}{\partial u_j} H \left(u_{i-k}^n, u_{i-k+1}^n, \dots, u_{i+k}^n \right) \geq 0 \quad \forall i-k \leq j \leq i+k \quad (\text{C.12})$$

Puisque nous utilisons des schémas numériques conservatifs

$$u_i^{n+1} = H \left(u_{i-k}^n, u_{i-k+1}^n, \dots, u_{i+k}^n \right) = u_i^n - \tau \left(f_{i+1/2}^* - f_{i-1/2}^* \right) \quad (\text{C.13})$$

$$f_{i+1/2}^* = f^* \left(u_{i-k}^n, u_{i-k+1}^n, \dots, u_{i+k}^n \right)$$

la condition de monotonie peut s'exprimer comme suit

$$\frac{\partial f_{i+1/2}^*}{\partial u_{i-k+1}} \geq 0 \quad \frac{\partial f_{i+1/2}^*}{\partial u_{i+k}} \leq 0 \quad (\text{C.14})$$

qui revient à dire que le flux numérique doit être non-décroissant en son premier argument et non-croissant en son dernier : $f^*(\uparrow, \downarrow)$.

Dans [Harten,1976], il est démontré que **toute solution convergente d'un schéma monotone correspond toujours à un état physiquement admissible (i.e vérifie la condition d'entropie)**. Lors du choix des schémas numériques, il suffit donc de s'assurer que le flux numérique soit monotone pour assurer la condition d'entropie, et donc choisir la *solution faible* acceptable physiquement.

C.1.5 Décentrement du schéma

Autour des discontinuités qui peuvent apparaître dans la solution, il a été montré que les solutions numériques basées sur des interpolations centrées présentent un comportement oscillatoire parasite. C'est le *phénomène de Gibbs* qui est représenté sur la figure C.2.

Pour améliorer la stabilité de la solution numérique et lutter contre l'apparition d'oscillations dans le voisinage d'une discontinuité, Courant a proposé d'**introduire le sens de propagation des quantités conservées dans le schéma de discrétisation numérique**. C'est ainsi que sont nés les schémas *upwind* ou *décentrés amont*¹. Ce décentrement peut être réalisé de multiples manières.

¹La nécessité de décentrer le schéma numérique peut également s'expliquer sur base du critère de Friedrich-Levy-Courant : le domaine de dépendance physique de ϕ doit être inclus dans le domaine de dépendance numérique utilisé dans le schéma.

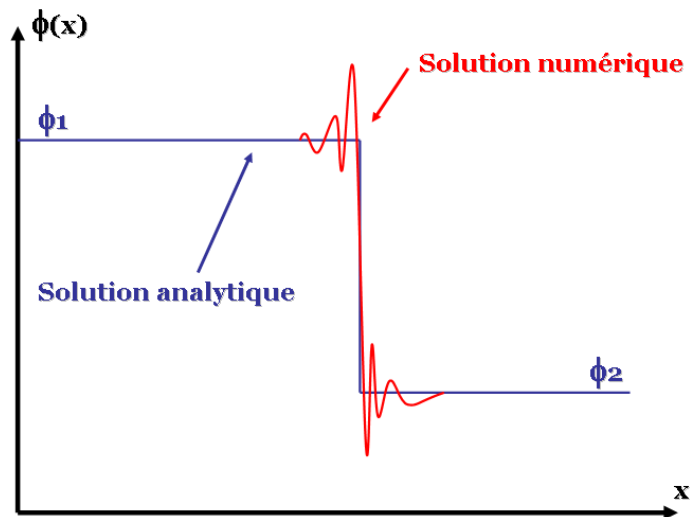


FIG. C.2 – Phénomène de Gibbs

La première méthode, reprise sous le nom générique de *flux vector splitting*, consiste à diviser les termes de flux selon le sens de propagation des quantités conservées. La direction de propagation est indiquée par le signe de la valeur propre de la matrice convective de l'équation de conservation hyperbolique quasi-linéaire. Cette méthode classique n'est pas utilisée dans ce mémoire si bien que l'on renvoie le lecteur à [Hirsch,1984,b,page 400] et [Piroton,2001,page 534] pour un exposé complet de la méthode.

La seconde manière permet d'introduire le sens de propagation physique de l'information dans le schéma numérique à un niveau plus élevé. Dans cette méthode, développée initialement par Godunov, les variables conservatives sont considérées comme constantes par partie sur les cellules du maillage à chaque pas de temps. L'évolution temporelle est déterminée par la solution exacte du problème de Riemann aux frontières entre les cellules. Cette approche a été étendue à des ordres de précision élevés et à des solveurs de Riemann approximatés sous le vocable général *flux difference splitting*. Nous détaillons cette approche dans la suite de ce paragraphe car elle sert de base pour la construction des schémas *ENO* et *WENO*.

C.2 Méthode de Godunov

C.2.1 Problème de Riemann

Le problème de Riemann consiste en une interaction transitoire uni-dimensionnelle entre deux écoulements uniformes différents. **La résolution de ce problème constitue un pré-requis à la méthode de Godunov.** Mathématiquement, le problème peut être ramené à la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x, t = 0) = u_0(\underline{x}) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < 0 \\ u_R & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (\text{C.15})$$

Il est facilement montré que la solution du problème de Riemann, qui consiste en la convection pure d'une discontinuité, s'écrit :

$$u(x, t) = u_0(\underline{x}) = \begin{cases} u_L & \text{si } (x - a * t) < 0 \\ u_R & \text{si } (x - a * t) > 0 \end{cases} \quad (\text{C.16})$$

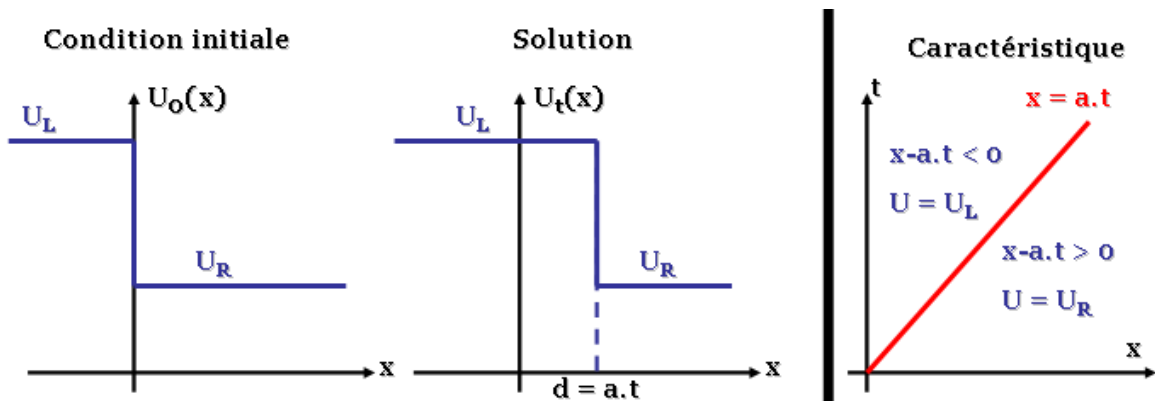


FIG. C.3 – Problème de Riemann 1D

La forme de la caractéristique (figure C.3) montre clairement que la courbe caractéristique sépare l'espace-temps en deux zones distinctes. La partie gauche sur laquelle la solution est u_L et la droite où la solution est u_R .

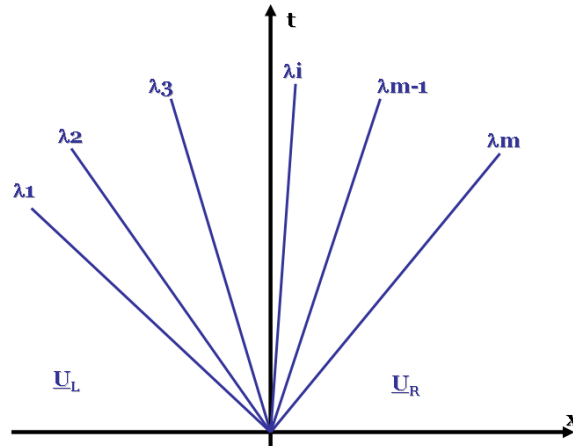
Considérons ensuite le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \underline{u}(x, t = 0) = \underline{u}_0(\underline{x}) = \begin{cases} \underline{u}_L & \text{si } x < 0 \\ \underline{u}_R & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (\text{C.17})$$

La diagonalisation de cette équation permet de mettre en évidence les *invariants de Riemann* W_i associés à chaque courbe caractéristique $\frac{dx}{dt} = \lambda_i$:

$$W_i(x, t) = W_i(x - \lambda_i t, 0) \quad (\text{C.18})$$

La solution du problème consiste donc en un faisceau de m ondes émanant de l'origine, chacune transportant une discontinuité (par analogie au problème de Riemann à une seule équation) se propageant à la vitesse λ_i . Puisque $\underline{u} = \sum_{i=1}^m W_i \underline{K}^{(i)}$, $\underline{K}^{(i)}$ étant le vecteur propre (i) de la matrice A , on peut montrer que la solution est auto-similaire pour $t > 0$ (i.e $\underline{u}(x, t) = \underline{u}(x/t)$).



Un résultat remarquable qui nous sera utile dans la suite est obtenu lors du calcul de la solution à l'origine. Celle-ci est en effet indépendante du temps et égale à la solution initiale à cet endroit.

La résolution d'un problème de Riemann pour un système non-linéaire hyperbolique est beaucoup plus difficile que pour le cas linéaire. Une décomposition d'ondes est toujours obtenue, mais le résultat est plus complexe. Trois types d'ondes apparaissent : les ondes de choc, les ondes de contact, les ondes d'expansion.

C.2.2 Principe du schéma de Godunov

Dans la méthode de Godunov, le domaine de calcul est divisé en volumes de contrôle, qui interagissent par l'intermédiaire de leurs facettes contiguës :

1. La solution est considérée constante sur chaque volume de contrôle et égale à la moyenne de la cellule. Il en résulte la fonction constante par partie représentée sur la figure C.4.
2. Les discontinuités aux interfaces des cellules produisent des ondes d'interaction, comme dans le problème de Riemann présenté dans le paragraphe C.2.1. La méthode de Godunov résout donc un problème de Riemann en chaque interface et la solution va évoluer en fonction de la propagation des ondes.
3. La solution au temps $t = n + 1$ est obtenue par une nouvelle moyenne pour obtenir un état constant.

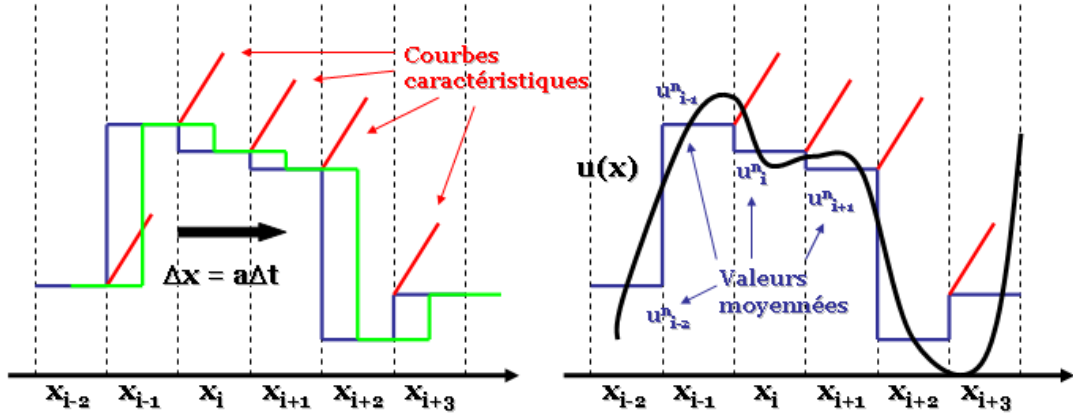


FIG. C.4 – Principe de la méthode de Godunov

Analytiquement, la solution sur la cellule i peut être obtenue en intégrant sur un volume $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [0, \Delta t]$ de l'espace-temps le système d'équations basé sur la solution exacte \tilde{u} du problème de Riemann, ce qui donne :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tilde{u}(x, \Delta t) dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tilde{u}(x, 0) dx + \int_0^{\Delta t} f(\tilde{u}(x_{i-1/2}, t)) dt - \int_0^{\Delta t} f(\tilde{u}(x_{i+1/2}, t)) dt \quad (\text{C.19})$$

qui peut se mettre sous la forme

$$\bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [f_{i+1/2} - f_{i-1/2}] \quad (\text{C.20})$$

$$\begin{aligned} \text{où } \bar{u}_i^{n+1} &= \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tilde{u}(x, \Delta t) dx \\ \bar{u}_i^n &= \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tilde{u}(x, 0) dx \\ f_{i-1/2} &= \int_0^{\Delta t} f(\tilde{u}(x_{i-1/2}, t)) dt \\ f_{i+1/2} &= - \int_0^{\Delta t} f(\tilde{u}(x_{i+1/2}, t)) dt \end{aligned}$$

Nous reconnaissons la formulation conservative des équations de conservation hyperboliques avec des flux numériques qui sont les moyennes temporelles des flux physiques aux interfaces. L'intégrand $f(\tilde{u}(x, t))$ à chaque interface dépend de la solution exacte $\tilde{u}(x, t)$ d'un problème de Riemann à la frontière. Si l'on note $\tilde{u}(x_{i-1/2}, t) = u_{i-1/2}(0)$ et $\tilde{u}(x_{i+1/2}, t) = u_{i+1/2}(0)$ la solution exacte du problème de Riemann, les flux numériques s'écrivent :

$$\begin{cases} f_{i+1/2} = f(u_{i+1/2}(0)) \\ f_{i-1/2} = f(u_{i-1/2}(0)) \end{cases} \quad (\text{C.21})$$

ce qui revient à dire que **le flux numérique correspond au flux physique appliqué à la solution exacte du problème de Riemann.**

C.2.3 Schéma de type Godunov

Plusieurs auteurs ont pris de la méthode de Godunov comme base de développement d'une méthode plus aisée à mettre en oeuvre. C'est le cas des solveurs approximatés de Riemann, tel que le solveur de Roe, présenté de manière complète dans [Piroton,2001,page 540], ou encore des deux solveurs suivants.

Flux de Osher

Dans ce texte, attardons-nous plutôt sur une reformulation compacte de la solution exacte du problème de Riemann présenté par Osher dans [Osher,1984]. Il montre que

$$\begin{aligned} \text{Si } u_L < u_R \quad \text{Alors } f(u^{(R)}(\zeta)) - \zeta u^{(R)}(\zeta) &= \min_{u \in [u_L, u_R]} [f(u) - \zeta u] \\ \text{et } u^{(R)}(\zeta) &= \frac{d}{d\zeta} \left\{ \min_{u \in [u_L, u_R]} [f(u) - \zeta u] \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

$$\begin{aligned} \text{Si } u_L > u_R \quad \text{Alors } f(u^{(R)}(\zeta)) - \zeta u^{(R)}(\zeta) &= \max_{u \in [u_L, u_R]} [f(u) - \zeta u] \\ \text{et } u^{(R)}(\zeta) &= \frac{d}{d\zeta} \left\{ \max_{u \in [u_L, u_R]} [f(u) - \zeta u] \right\} \end{aligned}$$

Dès lors, on peut écrire le flux numérique de Godunov sous la forme compacte :

$$f_{i+1/2}^* = \begin{cases} \min_{u_i \leq u \leq u_{i+1}} f(u) & \text{si } u_i < u_{i+1} \\ \max_{u_i \geq u \geq u_{i+1}} f(u) & \text{si } u_i > u_{i+1} \end{cases} \quad (\text{C.23})$$

Cette formulation est classiquement utilisée pour résoudre de manière exacte le problème de Riemann en vue d'obtenir une expression des flux de Godunov aux interfaces.

Flux de Osher-Engquist

Engquist et Osher ont également développé une formulation très compacte d'un flux numérique basé sur un solveur approximé du problème de Riemann aux interfaces. La démonstration complète pour obtenir cette expression est présentée dans [Hirsch,1984,b,page 454] :

$$f_{i+1/2}^* = \int_0^{u_i} \max(f'(u), 0) du + \int_0^{u_{i+1}} \min(f'(u), 0) du + f(0) \quad (\text{C.24})$$

Si f est un flux convexe (i.e $f'(u)$ est de signe constant), le flux numérique (C.24) associé à la formule (C.20) s'écrit :

$$f_{i+1/2}^* = f[\max(u_i, u^*)] + f[\min(u_{i+1}, u^*)] \quad (\text{C.25})$$

où u^* est la vitesse sonique (i.e $f'(u^*) = 0$).

Le flux *Osher-Engquist*, comme cela est montré dans le chapitre 5 page 74, fournit des résultats de très bonne qualité lorsqu'il est appliqué à la résolution des équations d'Hamilton-Jacobi.

C.2.4 Résumé du schéma de Godunov

$$\bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [f_{i+1/2} - f_{i-1/2}] \quad (\text{C.26})$$

où $f_{i+1/2} = f(u_{i+1/2}(0))$

$$= \begin{cases} \text{Godunov} = \begin{cases} \min_{u_i \leq u \leq u_{i+1}} = f(u) & \text{si } u_i < u_{i+1} \\ \max_{u_i \geq u \geq u_{i+1}} = f(u) & \text{si } u_i > u_{i+1} \end{cases} \\ \text{Osher - Engquist} = \begin{cases} \max(f'(u), 0) (f[\max(u_i, u^*)] + f[\min(u_{i+1}, u^*)]) \\ + \min(f'(u), 0) (f[\min(u_i, u^*)] + f[\max(u_{i+1}, u^*)]) \end{cases} \end{cases} \quad (\text{C.27})$$

C.3 Schéma de type Godunov du second ordre de précision ou plus

Le schéma de Godunov que nous venons de présenter est du premier ordre de précision. Rappelons que l'introduction du sens de propagation physique des quantités conservées dans le schéma numérique permet de lutter contre l'apparition d'oscillations aux alentours des discontinuités de la solution. Comme cela est mis en évidence dans [Hirsch,1984,b,page 510], le remplacement direct des différences finies du premier ordre de précision par leur homologue du second ordre de précision mène à des oscillations parasites dans le voisinage des discontinuités, même si l'algorithme reste décentré amont.

Pour comprendre ce phénomène, attachons nous à comprendre le mécanisme de génération des extrema parasites dans la solution numérique. Si l'on considère le passage du premier au second ordre de précision de la méthode de Godunov, cela revient à remplacer la fonction constante par partie sur le maillage par une fonction linéaire par partie sur le maillage (figure C.5). Comme cela est représenté sur cette figure, si la pente définie par les valeurs aux cellules x_{i-1} et x_{i+1} est trop importante, la solution de l'équation de convection linéaire au temps $n+1$, obtenue après translation de la solution linéaire par partie, va créer des nouveaux extrema aux interfaces. Ainsi, **les oscillations autour des discontinuités sont générées par la détermination numérique de gradients trop importants.**

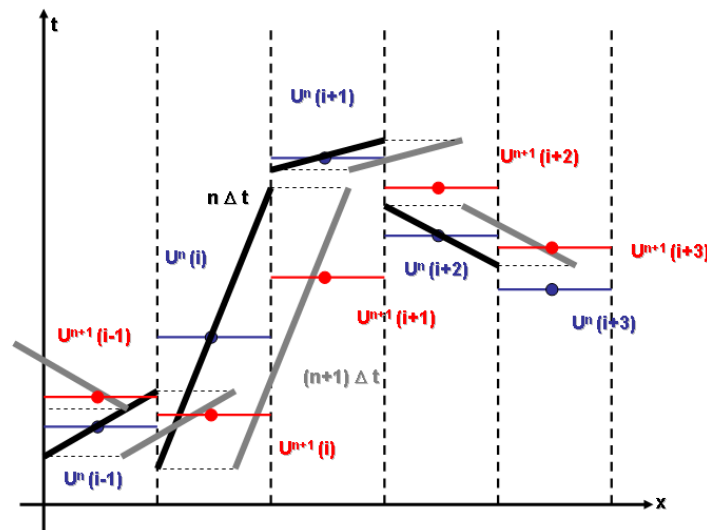


FIG. C.5 – Mécanisme de génération des oscillations dans la solution numérique

Avant de présenter les méthodes numériques permettant de lutter contre ces oscillations, il est essentiel de définir et exprimer mathématiquement les propriétés *non-oscillatoires* d'un schéma.

C.3.1 Schéma monotone

Dans le paragraphe C.1.4 page XXX, la condition de monotonie est définie par une relation sur les dérivés des flux numériques (équation C.14). Il importe de comprendre que cette condition revient à s'assurer que le schéma ne va pas mener à un comportement oscillatoire. Dès lors, l'utilisation d'un flux monotone devrait prévenir l'apparition du *phénomène de Gibbs*.

Malheureusement, Harten et al., dans [Harten,1976], ont montré que les schémas conservatifs monotones pour une équation non-linéaire sont limités au premier ordre de précision. Pour des ordres supérieurs, la condition de monotonie n'est jamais vérifiée. Il est donc nécessaire de définir une condition, moins sévère que celle de monotonie, qui permette de construire des schémas de haute précision et fournissant des solutions satisfaisant la condition d'entropie.

C.3.2 Schéma *Total Variation Diminishing*

Une condition plus faible que la monotonie est fournie par le concept de *Variation Totale* (TV) introduit par Harten en 1983 et présenté dans [Hirsch,1984,b,page 528]. Le concept de *Variation Totale bornée* trouve son origine dans une propriété importante des lois de conservation scalaires $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$: **la Variation Totale de toute solution physiquement admissible**

$$TV = \int \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| dx \tag{C.28}$$

ne peut pas augmenter dans le temps.

La *Variation Totale en x* (TV) d'une solution discrète d'une loi de conservation scalaire est alors définie par :

$$TV(u) = \sum_i |u_{i+1} - u_i| \tag{C.29}$$

Une solution numérique est dite à *Variation Totale bornée* ou *Variation Totale stable* si la *Variation totale* est uniformément bornée en t et Δx .

Un schéma numérique est dit *Total Variation Diminishing* (TVD) si

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n) \tag{C.30}$$

Enfin, si les propriétés de monotonie suivantes sont maintenues au cours du temps :

1. aucun extremum local en x ne peut être créé ;
2. la valeur du minimum local est non-décroissante, la valeur du maximum local est non-croissante ;

le schéma est dit à *monotonie préservée*.

Autrement dit, les profils monotones sont préservés durant l'évolution temporelle des solutions discrètes et aucun extremum parasite n'est créé. Puisqu'il est montré que tous les schémas *TVD* sont à *monotonicité préservée*, il est clair que **la condition *TVD* est suffisante pour nous assurer l'absence d'oscillations aux alentours de la discontinuité**. Notons également que tous les schémas monotones sont *TVD*. En ce sens, la condition *TVD* est moins sévère que la condition de monotonicité.

Schémas *TVD*

Sur base de cette nouvelle condition de régularité, une nouvelle famille de schémas, dits *schémas TVD*, a été développée et testée avec succès. Pour empêcher l'apparition d'oscillations, des facteurs de correction non-linéaires, appelés *limitateurs*, sont introduits dans le corps du schéma numérique. De nombreux types de *limitateurs* ont été utilisés avec succès dans un grand nombre d'applications. Pour mémoire, les principaux sont le *limitateur min-mod*, celui de *Van Leer*, *Superbee*,...

Malgré leurs nombreux succès pratiques, ces schémas ne sont pas étudiés dans ce texte. Nous leur préférons en effet une technique plus moderne : les schémas *Essentially Non Oscillatory*. Cette méthode moderne permet de construire un schéma *TVD* de manière très simple et en conservant le formalisme de la méthode de Godunov.

C.4 Schémas *ENO* et *WENO* pour la résolution des lois de conservation hyperboliques

Principe des schémas *ENO*

L'idée des schémas *ENO* (*Essentially Non-Oscillatory*), proposée dans [Harten,1987], semble être la première tentative couronnée de succès d'obtenir une interpolation de fonction lisse par partie indépendante de la taille des mailles, uniformément de haut ordre de précision et essentiellement non oscillante (i.e l'amplitude des oscillations diminue comme $O(\Delta x^k)$ où k est l'ordre de précision du schéma). Son principe est basé sur la définition d'une *mesure de la variation* ou *mesure de la régularité* de la fonction solution. Ainsi, pour interpoler la fonction en une maille $I_{i,j}$ quelconque, le domaine d'interpolation est choisi de telle manière que la *Variation Totale* de la solution résultante de la fonction interpolée soit la plus faible de tous les domaines d'interpolation possibles. Autrement dit, le domaine d'interpolation varie de maille en maille. Ainsi, la discontinuité n'est jamais prise dans un domaine d'interpolation.

Depuis la publication du papier original de Harten et al., les auteurs originaux ainsi que plusieurs autres chercheurs ont amélioré la méthode, testé ses performances sur des cas pratiques et étendu son domaine d'application à une large gamme de disciplines. En particulier, la méthode *WENO* (*Weighted Essentially Non-Oscillatory*) permet de doubler l'ordre de précision de la méthode sans complexifier le formalisme des schémas *ENO*. Enfin, cette théorie a été étendue à la résolution des équations d'Hamilton-Jacobi. Puisque seule cette partie nous intéresse dans le cadre de ce travail, la théorie spécifique à cette équation est exposée dans le corps de texte du chapitre 5 page 74. Cette annexe se contente de résumer le principe des méthodes *ENO* et *WENO* pour la résolution des équations de conservation hyperboliques. **Cette théorie constitue en effet un prérequis à la compréhension du texte du chapitre 5.**

Le résumé que nous présentons dans cette annexe est largement inspiré de la synthèse sur les schémas *ENO* et *WENO* publié par C.W Shu ([Shu,1997]).

C.4.1 Reconstruction 1D des valeurs aux frontières

Dans la méthode de Godunov pour la résolution numérique des lois de conservation hyperboliques d'ordre de précision supérieur à un, la première étape consiste à reconstruire les valeurs aux frontières de la cellule à partir des valeurs moyennes sur les cellules. Connaissant les moyennes sur les cellules de la fonction $u(x)$,

$$\bar{u}_i = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(\zeta) d\zeta, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{C.31})$$

ce problème revient à trouver, pour chaque cellule I_i , le polynôme $p_i(x)$ de degré au plus égal à $k - 1$ tel qu'il soit une approximation à l'ordre de précision k de la fonction $u(x)$ dans I_i :

$$p_i(x) = u(x) + O(\Delta x^k), \quad x \in I_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{C.32})$$

En particulier, ce polynôme fournit les approximations de la fonction $u(x)$ aux frontières de la cellule :

$$u_{i+1/2}^- = u(x_{i+1/2}) + O(\Delta x^k) = p_i(x_{i+1/2}), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{C.33})$$

$$u_{i-1/2}^+ = u(x_{i-1/2}) + O(\Delta x^k) = p_i(x_{i-1/2}), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{C.34})$$

La procédure pour résoudre ce problème et trouver le polynôme $p_i(x)$ peut se résumer comme suit :

- Connaissant la position I_i et l'ordre de précision voulu k , nous choisissons d'abord un *domaine d'interpolation*, basé sur r cellules à droite, s cellules à gauche, et I_i lui-même si $r, s \geq 0$ et $r + s + 1 = k$: $S(i) \equiv \{I_{i-r}, \dots, I_{i+s}\}$
- Il existe un polynôme unique de degré au plus $k - 1 = r + s$, noté par $p_i(x)$, dont la moyenne dans chaque cellule de $S(i)$ satisfait la relation suivante :

$$\bar{u}_i = \frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} p_i(\zeta) d\zeta, \quad j = i - r, \dots, i + s \quad (\text{C.35})$$

Ce polynôme $p_i(x)$ est l'approximation à l'ordre k que nous cherchons !

- Puisque la relation entre la valeur moyenne de la cellule \bar{u}_i dans le domaine d'interpolation $S(i)$ et les valeurs aux frontières $u_{i+1/2}^-$ et $u_{i-1/2}^+$ est linéaire, il existe des constantes $c_{r,j}$ et $\tilde{c}_{r,j}$, qui dépendent du décentrement r du domaine d'interpolation, de l'ordre de précision k , de la taille des cellules Δx_j dans le domaine S_i mais pas de la fonction u elle-même, telles que

$$v_{i+1/2}^- = \sum_{j=0}^{k-1} c_{r,j} \bar{u}_{i-r+j} \quad (\text{C.36})$$

$$v_{i-1/2}^+ = \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{c}_{r,j} \bar{u}_{i-r+j} \quad (\text{C.37})$$

Notons que la différence entre les valeurs \pm à la même position $x_{i+1/2}$ est due à la possibilité d'utiliser des domaines d'interpolation différents pour la cellule I_i et pour la cellule I_{i+1} . Si nous identifions le déplacement à gauche r , non pas avec la cellule I_i , mais avec le point de reconstruction $x_{i+1/2}$, il est clair que $c_{r,j} = \tilde{c}_{r-1,j}$.

En résumé, **connaissant les k valeurs moyennes $\bar{u}_{i-r}, \dots, \bar{u}_{i-r+k-1}$, il existe des constantes $c_{r,j}$ telles que la valeur reconstruite à la frontière $x_{i+1/2}$ soit donnée par :**

$$v_{i+1/2} = \sum_{j=0}^{k-1} c_{r,j} \bar{u}_{i-r+j} \quad (\text{C.38})$$

et que cette valeur soit à l'ordre k de précision :

$$u_{i+1/2} = u(x_{i+1/2}) + O(\Delta x^k) \quad (\text{C.39})$$

Enfin, pour un grid uniforme (une formulation analogue est obtenue pour les grids non-uniformes), l'expression des constantes $c_{r,j}$ s'écrit :

$$c_{r,j} = \sum_{m=j+1}^k \frac{\sum_{l=0/l \neq m}^k \prod_{q=0/q \neq m,l}^k (r - q + 1)}{\prod_{l=0/l \neq m}^k (m - l)} \quad (C.40)$$

La démonstration de cette formulation, ainsi que de celle relative aux maillages non-uniformes, est disponible dans [Shu,1997,page 8].La figure C.6 résume les valeurs des coefficients $c_{r,j}$.

k	r	j=0	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6
1	-1	1						
	0	1						
2	-1	3/2	-1/2					
	0	1/2	1/2					
	1	-1/2	3/2					
3	-1	11/6	-7/6	1/3				
	0	1/3	5/6	-1/6				
	1	-1/6	5/6	1/3				
	2	1/3	-7/6	11/6				
4	-1	25/12	-23/12	13/12	-1/4			
	0	1/4	13/12	-5/12	1/12			
	1	-1/12	7/12	7/12	-1/12			
	2	1/12	-5/12	13/12	1/4			
	3	-1/4	13/12	-23/12	25/12			
5	-1	137/60	-163/60	137/60	-21/20	1/5		
	0	1/5	77/60	-43/60	17/60	-1/20		
	1	-1/20	9/20	47/60	-13/60	1/30		
	2	1/30	-13/60	47/60	9/20	-1/20		
	3	-1/20	17/60	-43/60	77/60	1/5		
	4	1/5	-21/20	137/60	-163/60	137/60		
6	-1	49/20	-71/20	79/20	-163/60	31/30	-1/6	
	0	1/6	29/20	-21/20	37/60	-13/60	1/30	
	1	-1/30	11/30	19/20	-23/60	7/60	-1/60	
	2	1/60	-2/15	37/60	37/60	-2/15	1/60	
	3	-1/60	7/60	-23/60	19/20	11/30	-1/30	
	4	1/30	-13/60	37/60	-21/20	29/20	1/6	
	5	-1/6	31/30	-163/60	79/20	-71/20	49/20	
7	-1	363/140	-617/140	853/140	-2341/420	667/210	-43/42	1/7
	0	1/7	223/140	-197/140	153/140	-241/420	37/210	-1/42
	1	-1/42	13/42	153/140	-241/420	109/420	-31/420	1/105
	2	1/105	-19/210	107/210	319/420	-101/420	5/84	-1/140
	3	-1/140	5/84	-101/420	319/420	107/210	-19/210	1/105
	4	1/105	-31/420	109/420	-241/420	153/140	13/42	-1/42
	5	-1/42	37/210	-241/420	153/140	-197/140	223/140	1/7
	6	1/7	-43/42	667/210	-2341/420	853/140	-617/140	363/140

FIG. C.6 – Table des constantes $c_{r,j}$ pour un maillage uniforme

C.4.2 Approximation *ENO* et *WENO* en 1D

Nous savons que la solution des équations de conservation hyperboliques peut être lisse par partie. Si la fonction $u(x)$ est de ce type, une approximation sur un domaine d'interpolation fixe n'est pas adéquate près des discontinuités. On observe en effet des oscillations, appelées *phénomène de Gibbs*, telles que représentées sur la figure C.7. Ces oscillations parasites se développent principalement parce que le domaine d'interpolation contient la cellule discontinue. Cette constatation est à la base des schémas *ENO*. L'idée est d'éviter d'inclure les cellules discontinues dans le domaine d'interpolation.

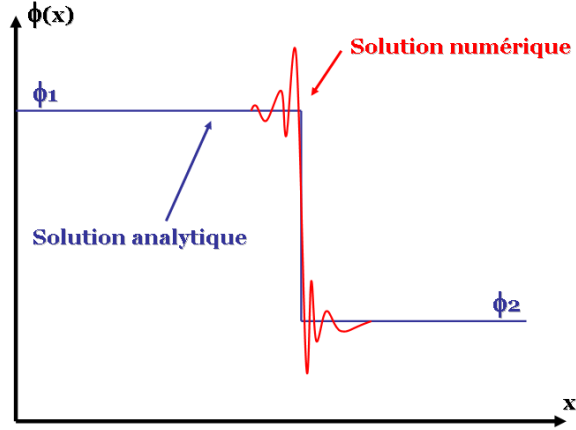


FIG. C.7 – Phénomène de Gibbs

Différences divisées de Newton

Avant de décrire le principe du schéma *ENO*, il convient de rappeler quelques notions sur les *différences divisées de Newton*. Ce concept est défini de manière inductive comme suit :

1. La différence divisée de degré 0 de la fonction $V(x)$ ² est définie par

$$V[x_{i-1/2}] \equiv V(x_{i-1/2}) \quad (\text{C.41})$$

2. La différence divisée de degré j ($j \geq 1$) de la fonction $V(x)$ est définie inductivement par

$$V[x_{i-1/2}, \dots, x_{i+j-1/2}] \equiv \frac{V[x_{i+1/2}, \dots, x_{i+j-1/2}] - V[x_{i-1/2}, \dots, x_{i+j-3/2}]}{x_{i+j-1/2} - x_{i-1/2}} \quad (\text{C.42})$$

La forme de Newton du polynôme d'interpolation d'ordre k , qui approxime $V(x)$ en $k + 1$ points, s'écrit

$$P(x) = \sum_{j=0}^k V[x_{i-r-1/2}, \dots, x_{i-r+j-1/2}] \prod_{m=0}^{j-1} (x - x_{i-r+m-1/2}) \quad (\text{C.43})$$

² $V(x)$ est la primitive de $u(x)$ et la définition des différences divisées de $u(x)$ est parfaitement analogue

Par différentiation, nous obtenons une expression du polynôme $p(x)$ qui approxime $u(x)$:

$$p(x) = \sum_{j=1}^k V \left[x_{i-r-1/2}, \dots, x_{i-r+j-1/2} \right] \sum_{m=0}^{j-1} \prod_{l=0/l \neq m}^{j-1} (x - x_{i-r+l-1/2}) \quad (\text{C.44})$$

Sur base de ces définitions, nous pouvons noter que

$$V \left[x_{i-1/2}, x_{i+1/2} \right] = \frac{V(x_{i+1/2}) - V(x_{i-1/2})}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} = \bar{u}_i \quad (\text{C.45})$$

i.e la différence divisée de degré 0 de \bar{u} est égale à la différence divisée de degré 1 de la primitive $V(x)$. Il est donc possible d'écrire les différences divisées de $V(x)$ par l'intermédiaire de celles de \bar{u} .

En outre, rappelons la propriété importante suivante des différences divisées :

$$V \left[x_{i-1/2}, \dots, x_{i+j-1/2} \right] = \frac{V^{(j)}(\zeta)}{j!} \quad (\text{C.46})$$

pour un ζ appartenant au domaine d'interpolation $x_{i-1/2} < \zeta < x_{i+j-1/2}$, pour autant que $V(x)$ soit lisse dans ce domaine. Si $V(x)$ est discontinu en un point du domaine d'interpolation, il est aisé de montrer que

$$V \left[x_{i-1/2}, \dots, x_{i+j-1/2} \right] = O\left(\frac{1}{\Delta x_j}\right) \quad (\text{C.47})$$

En conclusion, la différence divisée de $V(x)$ ou $\bar{u}(x)$ est une mesure de la régularité de la fonction dans le domaine d'interpolation.

Procédure d'approximation *ENO*

Supposons que notre objectif soit de trouver un domaine d'interpolation de $k + 1$ points consécutifs incluant $x_{i-1/2}$ et $x_{i+1/2}$ et de telle sorte que $V(x)$ soit le plus lisse dans ce domaine en comparaison aux autres domaines possibles. Ce travail est réalisé par étape, en ajoutant seulement un point au domaine d'interpolation à chaque phase. Ainsi, nous démarrons avec le domaine à deux points :

$$\tilde{S}_2(i) = \{x_{i-1/2}, x_{i+1/2}\} \quad (\text{C.48})$$

où nous avons utilisé \tilde{S} pour dénoter un domaine d'interpolation de la fonction primitive $V(x)$. Sur base des résultats du paragraphe C.4.2, nous savons en effet que le domaine d'interpolation \tilde{S} pour V correspond à un domaine d'interpolation S pour \bar{u} . Par exemple, le domaine (C.48) correspond pour \bar{u} au domaine à cellule unique

$$S(i) = \{I_i\} \quad (\text{C.49})$$

L'interpolation linéaire dans le domaine d'interpolation \tilde{S}_2 (C.48) peut s'écrire sous la forme d'un polynôme de Newton :

$$P^1(x) = V [x_{i-1/2}] + V [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] (x - x_{i-1/2}) \quad (\text{C.50})$$

A l'étape suivante, nous n'avons que deux choix possibles pour étendre le domaine d'interpolation en ajoutant un point. Nous pouvons ajouter le voisin de gauche $x_{i-3/2}$, générant l'interpolation quadratique suivante :

$$R(x) = P^1(x) + V [x_{i-3/2}, x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] (x - x_{i-1/2}) (x - x_{i+1/2}) \quad (\text{C.51})$$

ou ajouter le voisin de droite $x_{i+3/2}$, générant l'interpolation quadratique suivante :

$$S(x) = P^1(x) + V [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}, x_{i-3/2}] (x - x_{i-1/2}) (x - x_{i+1/2}) \quad (\text{C.52})$$

Il a été montré dans le paragraphe C.4.2 que la différence divisée de $V(x)$ dans le domaine d'interpolation correspond à une mesure de la régularité de la fonction dans ce domaine. Puisque nous souhaitons choisir le domaine où la fonction est la plus lisse, il est évident que nous opérons par comparaison des deux différences divisées et choisissons celle qui possède la plus petite valeur absolue :

$$\begin{aligned} \text{Si } \left| V [x_{i-3/2}, x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \right| < \left| V [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}, x_{i-3/2}] \right| & \quad \tilde{S}_3(i) = \{x_{i-3/2}, x_{i-1/2}, x_{i+1/2}\} \\ \text{Si } \left| V [x_{i-3/2}, x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \right| > \left| V [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}, x_{i-3/2}] \right| & \quad \tilde{S}_3(i) = \{x_{i-1/2}, x_{i+1/2}, x_{i+3/2}\} \end{aligned} \quad (\text{C.53})$$

Cette procédure peut être poursuivie en ajoutant au domaine d'interpolation un point à chaque étape, sur base de la comparaison des différences divisées, jusqu'à ce que le nombre de points nécessaires pour atteindre l'ordre de précision voulu soit compris dans le domaine.

Pour une fonction lisse par partie $V(x)$, l'interpolation *ENO* démarrant avec deux points dans le domaine d'interpolation $\tilde{S}_2(i) = \{x_{i-1/2}, x_{i+1/2}\}$ possède alors les propriétés intéressantes suivantes :

1. La condition de précision $P_i(x) = V(x) + O(\Delta x^{k+1})$, $x \in I_i$, est valide pour toute cellule I_i qui ne contient pas de discontinuité. La procédure *ENO* permet donc de recouvrir le plein ordre de précision directement au droit de la discontinuité.
2. $P_i(x)$ est monotone dans chaque cellule I_i qui ne contient pas de discontinuité.
3. La reconstruction est TVB (*Total Variation Bounded*) pour toute cellule I_i , même celles qui contiennent des discontinuités.

Procédure d'approximation *WENO*

Présentés initialement dans [Shu,1990], les schémas *Weighted Essentially Non-Oscillatory* fournissent une méthode simple pour augmenter l'ordre de précision des schémas *ENO* sans complexifier notablement la discrétisation. La modification se fonde sur les remarques suivantes concernant la performance des schémas *ENO* tels qu'ils sont étudiés dans le paragraphe C.4.2 :

1. Les valeurs de la *mesure de régularité* (i.e différence divisée) de la fonction dans les différents domaines d'interpolation possibles sont extrêmement proches dans les zones où la fonction est lisse. Dès lors, le choix du domaine d'interpolation est peu robuste et dépend en partie des erreurs de troncatures dans les zones lisses, alors que cette adaptation du domaine n'est justement pas nécessaire dans ces zones.
2. L'Hamiltonien numérique résultant n'est pas lisse puisque le domaine d'interpolation varie entre noeuds voisins.
3. Dans la procédure de choix du domaine d'interpolation 1D, k domaines d'interpolation candidats sont considérés, couvrant $2k - 1$ mailles. Cependant, un seul domaine est retenu pour évaluer le flux numérique, ce qui fournit un ordre de précision k . Si toutes les $2k - 1$ cellules étaient utilisées, un ordre de précision $2k - 1$ pourrait être atteint.
4. L'utilisation d'opérateurs *SI* est coûteuse en temps de calcul.

L'idée de base du schéma *WENO* est assez simple. Au lieu d'utiliser un seul domaine d'interpolation candidat pour générer la reconstruction, une combinaison convexe de tous les domaines d'interpolation candidats de l'approche *ENO* est employée. Pour être plus précis, notons les k domaines d'interpolation candidats :

$$S_r(i) = \{x_{i-r}, \dots, x_{i-r+k-1}\} \quad r = 0, \dots, k-1 \quad (\text{C.54})$$

et les valeurs reconstruites selon le schéma *ENO* pour le décentrement à gauche r :

$$u_{i+1/2}^{(r)} = \sum_{j=0}^{k-1} c_{r,j} \bar{u}_{i-r+j} \quad (\text{C.55})$$

La reconstruction *WENO* a recours à la combinaison convexe de tous les $u_{i+1/2}^{(r)}$ définis par (C.55) comme nouvelle approximation de la valeur à la frontière de la cellule :

$$u_{i+1/2} = \sum_{r=0}^{k-1} w_r u_{i+1/2}^{(r)} \quad (\text{C.56})$$

La clé du succès du schéma *WENO* est clairement le choix des poids de la combinaison convexe w_r . Évidemment, nous imposons que

$$w_r \geq 0, \quad \sum_{r=0}^{k-1} w_r = 1 \quad (\text{C.57})$$

pour la stabilité et la consistance. En outre, si la fonction $u(x)$ est lisse dans tous les domaines d'interpolation candidats, on peut montrer qu'il existe des constantes d_r telles que

$$u_{i+1/2} = \sum_{r=0}^{k-1} d_r u_{i+1/2}^{(r)} = u(x_{i+1/2}) + O(\Delta x^{2k-1}) \quad (\text{C.58})$$

ce qui justifie notre tentative. Evidemment, lorsque la fonction $u(x)$ présente une discontinuité dans un ou plusieurs domaines d'interpolation candidats, nous souhaiterions que les poids correspondants s'annulent.

Toutes ces considérations conduisent à la définition suivante pour les poids w_r :

$$w_r = \frac{\alpha_r}{\sum_{s=0}^{k-1} \alpha_s} \quad (\text{C.59})$$

$$\alpha_r = \frac{d_r}{\epsilon + \beta_r} \quad (\text{C.60})$$

où $\epsilon > 0$ est introduit pour éviter que le dénominateur ne s'annule. La valeur $\epsilon = 10^{-6}$ est généralement prise en pratique. β_r est appelé *indicateur de régularité* du domaine d'interpolation $S_r(i)$. Cette formulation du poids w_r de la combinaison convexe nous assure que :

1. Si $v(x)$ est une fonction lisse dans le domaine d'interpolation $S_r(i)$, alors l'*indicateur de régularité* est choisi de telle sorte que $\beta_r = O(\Delta x^2)$ si bien que $w_r = O(1)$.
2. Si $v(x)$ est discontinue dans le domaine d'interpolation $S_r(i)$, alors l'*indicateur de régularité* est choisie de telle sorte que $\beta_r = O(1)$ si bien que $w_r = O(\Delta x^4)$.

Puisque la *Variation Totale* est une bonne mesure de la régularité (paragraphe C.3.2 page XXXVIII), il serait désirable de choisir l'*indicateur de régularité* de manière à la minimiser à l'intérieur de la cellule I_i . Des considérations sur un flux monotone et le rôle des variations d'ordres élevés ont mené Shu à définir

$$\beta_r = \sum_{l=1}^{k-1} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \Delta x^{2l-1} \left(\frac{\partial^l p_r(x)}{\partial^l x} \right)^2 dx \quad (\text{C.61})$$

Le membre de droite de l'équation (C.61) correspond juste à la somme des normes L^2 de toutes les dérivées du polynôme d'interpolation $p_r(x)$ sur l'intervalle $(x_{i+1/2}, x_{i-1/2})$. Le facteur Δx^{2l-1} est introduit pour enlever toute dépendance en Δx dans les dérivées de sorte que l'auto-similarité est préservée.

Pour $k = 2$, l'expression (C.61) fournit

$$\begin{aligned} \beta_0 &= (\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i)^2 \\ \beta_1 &= (\bar{u}_i - \bar{u}_{i-1})^2 \end{aligned} \quad (\text{C.62})$$

Pour $k = 3$, l'expression (C.61) fournit

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{13}{12} (\bar{u}_i - 2\bar{u}_{i+1} + \bar{u}_{i+2})^2 + \frac{1}{4} (3\bar{u}_i - 4\bar{u}_{i+1} + \bar{u}_{i+2})^2 \\ \beta_1 &= \frac{13}{12} (\bar{u}_{i-1} - 2\bar{u}_i + \bar{u}_{i+1})^2 + \frac{1}{4} (\bar{u}_{i-1} - \bar{u}_{i+1})^2 \\ \beta_2 &= \frac{13}{12} (\bar{u}_{i-2} - 2\bar{u}_{i-1} + \bar{u}_i)^2 + \frac{1}{4} (3\bar{u}_{i-2} - 4\bar{u}_{i-1} + 3\bar{u}_i)^2 \end{aligned} \quad (\text{C.63})$$

C.4.3 Schémas *ENO* et *WENO* pour les lois de conservation 1D

Dans cette section, nous décrivons l'application des schémas *ENO* et *WENO* présentés précédemment pour la résolution des lois de conservation hyperboliques 1D :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial f}{\partial x}(u(x, t)) = 0 \quad (\text{C.64})$$

munies des conditions initiales et aux limites adéquates.

Le grid est supposé uniforme et l'équation (C.64) est discrétisée en utilisant la formulation conservative suivante :

$$\frac{du_i(t)}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} (f_{i+1/2}^* - f_{i-1/2}^*) \quad (\text{C.65})$$

où $u_i(t)$ est l'approximation numérique de la valeur ponctuelle $u(x_i, t)$ et le flux numérique

$$f_{i+1/2}^* = f^*(u_{i-r}, \dots, u_{i+s}) \quad (\text{C.66})$$

satisfait les conditions suivantes :

- f^* est une fonction Lipschitz continue³ en tous ses arguments.
- f^* est consistant avec le flux physique f , $f^*(u, \dots, u) = f(u)$
- f^* est un flux monotone⁴ (i.e. fonction non-décroissante en son premier terme et non-croissante en son dernier terme).

Dans le paragraphe C.3, le flux numérique $f_{i+1/2}^*$ est obtenu par application d'un flux monotone résolvant le problème de Riemann avec les valeurs aux frontières obtenues par reconstruction constante. Grâce aux schémas *ENO* et *WENO*, le flux monotone est appliqué sur les valeurs à la frontière $u_{i+1/2}$ reconstruites grâce à la procédure présentée au paragraphe C.4.2 page XLIII :

$$f_{i+1/2}^* = h(u_{i+1/2}^-, u_{i+1/2}^+) \quad (\text{C.67})$$

Le fait que les valeurs à la frontière soient reconstruites en évitant les domaines d'interpolation non-lisses nous assure de la monotonicité de la solution numérique.

Les flux monotones f^* classiquement utilisés sont les mêmes que pour les schémas de Godunov, à savoir le *flux de Osher* et le *flux de Osher-Engquist* qui sont présentés dans le paragraphe C.2.3.

³En mathématique, la continuité Lipschitz est une condition de régularité pour les fonctions plus forte que la continuité régulière. La fonction f est dite Lipschitz continue s'il existe une constante $K \geq 0$ pour tout x_1, x_2 tel que

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$$

Intuitivement, la condition Lipschitz continue signifie que le taux de variation de la fonction $f(x)$ est limité : une ligne joignant deux points quelconques sur le graphe n'a jamais une pente plus grande que la constante de Lipschitz K . Le théorème de Cauchy-Kovakeskaïa assure l'existence et l'unicité de la solution aux équations différentielles partielles lorsque l'Hamiltonien est Lipschitz continu.

⁴Le lecteur notera que la condition de monotonicité n'est pas indispensable dans le cas d'un schéma différence finie. Celle-ci est en effet un peu sévère et il est possible de la remplacer par une condition de décentrement amont simple. Néanmoins, l'utilisation exclusive de schémas monotones nous assure que les oscillations resteront bornées. C'est pourquoi j'ai choisi de n'envisager que ceux-ci

Procédure ENO pour la résolution de l'équation de conservation hyperbolique 1D

1. Reconstruire les valeurs $u_{i+1/2}^-$ et $u_{i+1/2}^+$ pour toutes les valeurs de i selon la procédure de reconstruction ENO :
 - (a) Calculer les *différences divisées* de la fonction primitive $V(x)$ pour $k = 1, \dots, k$ sur base de \bar{u}_i grâce aux formules (C.42) et (C.45) page XLIV.
 - (b) Dans la cellule I_i , démarrer avec le domaine d'interpolation $\tilde{S}_2(i) = \{x_{i-1/2}, x_{i+1/2}\}$ pour $V(x)$, ce qui est équivalent au domaine $S_1(i) = \{I_i\}$ pour \bar{u} .
 - (c) Pour $l = 2, \dots, k$ et en supposant que $\tilde{S}_l(i) = \{x_{j+1/2}, x_{j+l-1/2}\}$ est connu, ajouter un des deux points voisins $x_{j-1/2}$ ou $x_{j+l-1/2}$ au domaine d'interpolation suivant la valeur de la *différence divisée* :
 - i. Si $\left|V \left[x_{i-3/2}, x_{i-1/2}, x_{i+1/2}\right]\right| < \left|V \left[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}, x_{i-3/2}\right]\right|$, ajouter $x_{j-1/2}$ au domaine d'interpolation $\tilde{S}_l(i)$ pour obtenir $\tilde{S}_{l+1}(i) = \{x_{j-1/2}, \dots, x_{j+l-1/2}\}$
 - ii. Sinon, ajouter $x_{j+l+1/2}$ au domaine d'interpolation $\tilde{S}_l(i)$ pour obtenir $\tilde{S}_{l+1}(i) = \{x_{j+1/2}, \dots, x_{j+l+1/2}\}$
 - (d) Utiliser la formule de Newton (C.44) pour obtenir $p_i(x)$, qui est un polynôme de degré au plus $k - 1$ dans I_i et satisfaisant $p_i(x) = u(x) + O(\Delta x^k)$ tant que $u(x)$ est lisse dans I_i . $p_i(x)$ est alors utilisé pour trouver les approximations $u_{i+1/2}^- = p_i(x_{i+1/2})$ et $u_{i-1/2}^+ = p_i(x_{i-1/2})$.
Néanmoins, il s'avère souvent plus facile, une fois le domaine d'interpolation connu, de calculer directement

$$u_{i+1/2}^- = \sum_{j=0}^{k-1} c_{r,j} \bar{u}_{i-r+j}$$

$$u_{i-1/2}^+ = \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{c}_{r,j} \bar{u}_{i-r+j}$$

en utilisant les coefficient $c_{r,j}$ trouvés dans le tableau C.6 page XLII.

2. Choisir un flux monotone (*Osher, Osher-Engquist, Lax-Friedrichs*) et calculer la valeur de $f_{i+1/2}^*$ pour tout i :

$$f_{i+1/2}^* = h \left(u_{i+1/2}^-, u_{i+1/2}^+ \right)$$

3. Résoudre l'équation (C.65)

Procédure WENO pour la résolution de l'équation de conservation hyperbolique 1D

1. Reconstruire les valeurs $u_{i+1/2}^-$ et $u_{i+1/2}^+$ pour toutes les valeurs de i selon la procédure de reconstruction WENO :

- (a) Obtenir les k valeurs reconstruites $u_{i+1/2}^{(r)}$ d'ordre de précision k relatives aux domaines d'interpolation $S_r(i) = \{x_{i-r}, \dots, x_{i-r+k-1}\}$ $r = 0, \dots, k-1$; ainsi que les valeurs $u_{i-1/2}^{(r)}$. Pour ce faire, il suffit d'appliquer k fois la routine ENO décrite dans le paragraphe C.4.3.
- (b) Trouver les constantes d_r et \tilde{d}_r telles que

$$u_{i+1/2} = \sum_{r=0}^{k-1} d_r u_{i+1/2}^{(r)} = u(x_{i+1/2}) + O(\Delta x^{2k-1})$$

$$u_{i-1/2} = \sum_{r=0}^{k-1} \tilde{d}_r u_{i-1/2}^{(r)} = u(x_{i-1/2}) + O(\Delta x^{2k-1})$$

Par symétrie, $\tilde{d}_r = d_{k-1-r}$.

- (c) Trouver l'indicateur de régularité β_r grâce à (C.61) pour $r = 0, \dots, k-1$.
- (d) Calculer les poids w_r et \tilde{w}_r en utilisant (C.59) et (C.60) pour $r = 0, \dots, k-1$.
- (e) Calculer les reconstructions à l'ordre de précision $2k-1$

$$u_{i+1/2}^- = \sum_{r=0}^{k-1} w_r u_{i+1/2}^{(r)} \quad u_{i-1/2}^+ = \sum_{r=0}^{k-1} \tilde{w}_r u_{i-1/2}^{(r)}$$

2. Choisir un flux monotone (*Osher*, *Osher-Engquist*, *Lax-Friedrichs*) et calculer la valeur de $f_{i+1/2}^*$ pour tout i :

$$f_{i+1/2}^* = h(u_{i+1/2}^-, u_{i+1/2}^+)$$

3. Résoudre l'équation (C.65)

Conditions aux limites

L'implémentation des conditions aux limites est assez aisée dans les schémas ENO et WENO. Il suffit généralement de créer autant de *cellules fantômes* qu'il est nécessaire pour atteindre l'ordre de précision voulue. La valeur imposée dans ces cellules est liée aux propriétés de symétrie, antisymétrie, d'écoulement imposé,... Dans les schémas ENO, la manière la plus naturelle de traiter les conditions aux limites est d'utiliser les seuls domaines d'interpolation ne contenant que des cellules réelles.

C.4.4 Schémas *ENO* et *WENO* pour les lois de conservation 2D

Dans cette section, nous décrivons la manière dont la procédure de reconstruction *ENO* présentée au paragraphe C.4.3 est étendue aux espaces de dimensions supérieures à un. En particulier, les raisonnements sont présentés pour le cas 2D car la généralisation aux dimensions supérieures est identique.

Connaissant la valeur moyenne d'une fonction $u(x, y)$ sur une cellule $I_{i,j}$

$$\bar{u}_{i,j} \equiv \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(\zeta, \eta) d\zeta d\eta \quad i = 1, \dots, N_x \ ; \ j = 1, \dots, N_y \quad (C.68)$$

le problème posé par la reconstruction est de trouver un polynôme $p_{i,j}(x, y)$, de préférence de degré au plus k , tel qu'il soit une approximation à l'ordre de précision k de la fonction $u(x, y)$ dans $I_{i,j}$:

$$p_{i,j}(x, y) = u(x, y) + O(\Delta^k) \quad (x, y) \in I_{i,j} \quad i = 1, \dots, N_x \ ; \ j = 1, \dots, N_y \quad (C.69)$$

En particulier, sur base de ce polynôme, il est possible d'obtenir les approximations de $u(x, y)$ aux frontières de la cellule

$$u_{i\mp 1/2, j}^{\pm} = p_{i,j}(x_{i\mp 1/2}, y) = u(x_{i\mp 1/2}, y) + O(\Delta^k) \quad i = 1, \dots, N_x \ ; \ y_{j-1/2} \leq y \leq y_{j+1/2} \quad (C.70)$$

$$u_{i, j\mp 1/2}^{\pm} = p_{i,j}(x, y_{i\mp 1/2}) = u(x, y_{i\mp 1/2}) + O(\Delta^k) \quad j = 1, \dots, N_y \ ; \ x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2} \quad (C.71)$$

Connaissant la position $I_{i,j}$ et l'ordre de précision voulu k , nous pouvons de nouveau choisir un domaine d'interpolation sur base des $\frac{k(k+1)}{2}$ cellules voisines. La collection de ces cellules est toujours notée $S(i, j)$. Nous souhaitons donc trouver le polynôme $p_{i,j}(x, y)$ tel que

$$\bar{u}_{l,m} \equiv \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{y_{m-1/2}}^{y_{m+1/2}} \int_{x_{l-1/2}}^{x_{l+1/2}} p_{i,j}(\zeta, \eta) d\zeta d\eta \quad \text{si } I_{l,m} \in S(i, j) \quad (C.72)$$

Avant de poursuivre plus en avant, signalons deux difficultés majeures qui apparaissent en 2D par rapport au 1D et dont la preuve est faite dans [Shu,1997,page34] :

1. Tous les domaines d'interpolation ne peuvent pas être utilisés pour obtenir un polynôme $p(x, y)$ de degré au plus $k - 1$ satisfaisant la condition (C.73).
2. Même si un tel polynôme est obtenu, rien ne garantit que la condition de précision (C.69) soit conservée.

Sur les maillages rectangulaires, ces deux difficultés sont dépassées en utilisant le produit tensoriel de polynômes 1D (i.e utiliser des polynômes dans Q^{k-1}) :

$$p(x, y) = \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{l=0}^{k-1} a_{l,m} x^l y^m \quad (C.73)$$

Shu montre que l'utilisation de ces polynômes simplifie fortement la reconstruction en 2D. **Nous réalisons d'abord une reconstruction 1D, selon la direction y par exemple, obtenant ainsi des cellules unidimensionnelles moyennes de la fonction dans l'autre direction (selon x dans notre exemple). Nous réalisons ensuite une reconstruction selon l'autre direction.**

Appliquons maintenant cette idée à la résolution des lois de conservation hyperboliques 2D :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) + \frac{\partial f}{\partial x}(u(x, y, t)) + \frac{\partial g}{\partial y}(u(x, y, t)) = 0 \quad (\text{C.74})$$

munies des conditions initiales et aux limites adéquates.

Le grid étant supposé uniforme, l'équation (C.74) est discrétisée en utilisant la formulation conservative suivante :

$$\frac{du_i(t)}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} (f_{i+1/2,j}^* - f_{i-1/2,j}^*) - \frac{1}{\Delta y} (g_{i,j+1/2}^* - g_{i,j-1/2}^*) \quad (\text{C.75})$$

où $u_{i,j}(t)$ est l'approximation numérique de la valeur ponctuelle $u(x_i, y_j, t)$ et les flux numériques

$$\begin{aligned} f_{i+1/2,j}^* &= f^*(u_{i-r,j}, \dots, u_{i+s,j}) \\ g_{i,j+1/2}^* &= g^*(u_{i,j-r'}, \dots, u_{i,j+s'}) \end{aligned} \quad (\text{C.76})$$

satisfont les conditions suivantes :

- f^* et g^* sont des fonctions Lipschitz continues en tous ses arguments.
- f^* et g^* sont consistants avec le flux physique f , $f^*(u, \dots, u) + g^*(u, \dots, u) = f(u)$
- f^* et g^* sont des flux monotones⁵ (i.e fonction non-décroissante en son premier terme et non-croissante en son dernier terme).

Les flux monotones sont appliqués sur les valeurs aux frontières $u_{i+1/2,j}$ et $u_{i,j+1/2}$ reconstruites grâce à la procédure 1D présentée au paragraphe C.4.2 page XLIII appliquée successivement à la fonction $u(x) = f(u(x, y_j, t))$ avec j fixé puis à la fonction $u(y) = f(u(x_i, y, t))$ avec i fixé :

$$f_{i+1/2,j}^* = h(u_{i+1/2,j}^-, u_{i+1/2,j}^+) \quad (\text{C.77})$$

$$g_{i,j+1/2}^* = h(u_{i,j+1/2}^-, u_{i,j+1/2}^+) \quad (\text{C.78})$$

Le fait que les valeurs à la frontière soient reconstruites en évitant les domaines d'interpolation non-lisses nous assure de la monotonicité de la solution numérique.

Les flux monotones f^* classiquement utilisés sont les mêmes que pour les schémas de Godunov, à savoir le *flux de Osher* et le *flux de Osher-Engquist* qui sont présentés dans le paragraphe C.2.3.

⁵Le lecteur notera que la condition de monotonicité n'est pas indispensable dans le cas d'un schéma différence finie. Celle-ci est en effet un peu sévère et il est possible de la remplacer par une condition de décentrement amont simple. Néanmoins, l'utilisation exclusive de schémas monotones nous assure que les oscillations resteront bornées. C'est pourquoi j'ai choisi de n'envisager que ceux-ci

C.5 Discrétisation temporelle

Pour atteindre un ordre de précision élevé également lors de la discrétisation temporelle, il a été choisi d'utiliser des schémas de Runge-Kutta d'ordre de précision adapté à l'ordre de la discrétisation spatiale. Il faut cependant insister sur le fait que la discrétisation temporelle introduit aussi des oscillations dans la solution numérique. Les schémas de Runge-Kutta choisis doivent donc présenter des propriétés particulières de régularité. On parle à nouveau de schémas *Total Variation Diminishing*. Les schémas de Runge-Kutta *TVD* présentés dans ce mémoire sont issus de [Shu,1988] et [Shu,1989].

Notons l'équation différentielle partielle décrivant la loi de conservation hyperbolique sous la forme canonique résultant d'une approximation spatiale type *method of lines* :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(u) \quad (\text{C.79})$$

La forme générale de la discrétisation temporelle de Runge-Kutta, de manière tout à fait classique, s'écrit :

$$\begin{aligned} u^{(i)} &= \sum_{k=0}^{i-1} \left(\alpha_{ik} u^{(k)} + \Delta t \beta_{ik} L(u^{(k)}) \right) \\ u^{(0)} &= u^n \quad , \quad u^{(0)} = u^{n+1} \end{aligned} \quad (\text{C.80})$$

La différence entre les schémas traités dans ce chapitre et les schémas classiques de Runge-Kutta réside dans la volonté d'utiliser des schémas dont on peut s'assurer a priori que la *Variation Totale* diminue avec temps. Pour prouver la propriété *TVD*, Shu se base sur les résultats théoriques obtenus pour la discrétisation décentrée amont du premier ordre d'Euler

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t L(u^n) \quad (\text{C.81})$$

Si nous supposons que cette discrétisation est stable pour une certaine norme $\|u^{n+1}\| \leq \|u^n\|$ (classiquement la norme TV) sous la restriction $\Delta t \leq \Delta t_1$, alors le schéma de Runge Kutta (C.80) maintient la même stabilité sous la restriction $\Delta t \leq c\Delta t_1$. Shu montre ainsi que la discrétisation de Runge-Kutta (C.80) est *TVD* sous le coefficient

$$c = \min_{i,k} \frac{\alpha_{i,k}}{\beta_{i,k}} \quad (\text{C.82})$$

pourvu que $\alpha_{i,k} \geq 0$ et $\beta_{i,k} \geq 0$.

Shu montre que le schéma *TVD* de Runge-Kutta d'ordre 2 optimal est donné par

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{(1)} &= u_{i,j}^n + \Delta t L(u^n) \\ u_{i,j}^{n+1} &= \frac{1}{2} u_{i,j}^n + \frac{1}{2} u_{i,j}^{(1)} + \frac{1}{2} \Delta t L(u^{(1)}) \end{aligned} \quad (\text{C.83})$$

pour un coefficient CFL $c = 1$.

Il montre également que le schéma *TVD* de Runge-Kutta d'ordre 3 optimal est donné par

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{(1)} &= u_{i,j}^n + \Delta t L(u^n) \\ u_{i,j}^{(2)} &= \frac{3}{4}u_{i,j}^n + \frac{1}{4}u_{i,j}^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(u^{(1)}) \\ u_{i,j}^{n+1} &= \frac{1}{3}u_{i,j}^n + \frac{2}{3}u_{i,j}^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(u^{(2)}) \end{aligned} \quad (\text{C.84})$$

pour un coefficient CFL $c = 1$.

Malheureusement, il est prouvé dans [Gottlieb,1998] qu'aucun schéma de Runge-Kutta à 4 pas n'est *TVD* pour des coefficients $\alpha_{i,k}$ et $\beta_{i,k}$ non-négatifs. Pour pouvoir utiliser des valeurs négatives de $\beta_{i,k}$ ($\alpha_{i,k} \geq 0$), l'opérateur adjoint \tilde{L} doit être défini. La condition pour \tilde{L} est d'approximer la même dérivée spatiale que L , mais d'être *TVD* pour le schéma d'Euler décentré aval en temps :

$$u^{n+1} = u^n - \Delta t \tilde{L}(u^n) \quad (\text{C.85})$$

Shu montre alors que la discrétisation de Runge-Kutta (C.80) est *TVD* sous le coefficient

$$c = \min_{i,k} \frac{\alpha_{i,k}}{\beta_{i,k}} \quad (\text{C.86})$$

pourvu que $\alpha_{i,k} \geq 0$ et L soit remplacé par \tilde{L} si $\beta_{i,k} < 0$.

Une recherche complète réalisée par Gottlieb et Shu dans [Gottlieb,1998] montre que le schéma *TVD* de Runge-Kutta d'ordre 4 optimal est donné par

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{(1)} &= u_{i,j}^n + \frac{1}{2}\Delta t L(u^n) \\ u_{i,j}^{(2)} &= \frac{649}{1600}u_{i,j}^n - \frac{10890423}{25193600}\Delta t \tilde{L}(u^n) + \frac{951}{1600}u_{i,j}^{(1)} + \frac{5000}{7873}\Delta t L(u^{(1)}) \\ u_{i,j}^{(3)} &= \frac{53989}{2500000}u_{i,j}^n - \frac{102261}{5000000}\Delta t \tilde{L}(u^n) + \frac{4806213}{20000000}u_{i,j}^{(1)} - \frac{5121}{20000}\Delta t \tilde{L}(u^{(1)}) \\ &\quad + \frac{23619}{32000}u_{i,j}^{(2)} + \frac{7873}{10000}\Delta t L(u^{(2)}) \\ u_{i,j}^{n+1} &= \frac{1}{5}u_{i,j}^n + \frac{1}{10}\Delta t L(u^n) + \frac{6127}{30000}u_{i,j}^{(1)} + \frac{1}{6}\Delta t L(u^{(1)}) + \frac{7873}{30000}u_{i,j}^{(2)} \\ &\quad + \frac{1}{3}u_{i,j}^{(3)} + \frac{1}{6}\Delta t L(u^{(3)}) \end{aligned} \quad (\text{C.87})$$

pour un coefficient CFL $c = 0,936$.

Enfin, dans [Shu,1988], il est exposé que le schéma *TVD* de Runge-Kutta d'ordre 5 optimal est donné par

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{(1)} &= u_{i,j}^n + \frac{1}{2}\Delta t L(u^n) \\ u_{i,j}^{(2)} &= \frac{3}{4}u_{i,j}^n + \frac{1}{4}u_{i,j}^{(1)} + \frac{1}{8}\Delta t L(u^{(1)}) \\ u_{i,j}^{(3)} &= \frac{3}{8}u_{i,j}^n - \frac{1}{8}\Delta t \tilde{L}(u^n) + \frac{1}{8}u_{i,j}^{(1)} - \frac{1}{16}\Delta t \tilde{L}(u^{(1)}) + \frac{1}{2}u_{i,j}^{(2)} + \frac{1}{2}\Delta t L(u^{(2)}) \\ u_{i,j}^{(4)} &= \frac{1}{4}u_{i,j}^n - \frac{5}{64}\Delta t \tilde{L}(u^n) + \frac{1}{8}u_{i,j}^{(1)} - \frac{13}{64}\Delta t \tilde{L}(u^{(1)}) + \frac{1}{8}u_{i,j}^{(2)} + \frac{1}{8}\Delta t L(u^{(2)}) \\ &\quad + \frac{1}{2}u_{i,j}^{(3)} + \frac{9}{16}\Delta t L(u^{(3)}) \\ u_{i,j}^{(5)} &= \frac{89537}{2880000}u_{i,j}^n + \frac{2276219}{40320000}\Delta t L(u^n) + \frac{407023}{2880000}u_{i,j}^{(1)} + \frac{407023}{672000}\Delta t L(u^{(1)}) + \frac{1511}{12000}u_{i,j}^{(2)} \\ &\quad + \frac{1511}{2800}\Delta t L(u^{(2)}) + \frac{87}{200}u_{i,j}^{(3)} - \frac{261}{140}\Delta t \tilde{L}(u^{(3)}) + \frac{4}{15}u_{i,j}^{(4)} + \frac{8}{7}\Delta t L(u^{(4)}) \\ u_{i,j}^{n+1} &= \frac{4}{9}u_{i,j}^n + \frac{1}{15}u_{i,j}^{(1)} - \frac{8}{45}\Delta t \tilde{L}(u^{(1)}) + \frac{8}{45}u_{i,j}^{(3)} + \frac{2}{3}\Delta t L(u^{(3)}) + \frac{14}{15}u_{i,j}^{(5)} + \frac{7}{90}\Delta t L(u^{(5)}) \end{aligned} \quad (\text{C.88})$$

pour un coefficient CFL $c = \frac{7}{30}$.