Bulletin de la Classe des sciences

Sur la théorie des congruences W (troisième note)

Lucien Godeaux

Résumé
Détermination d'un tétraèdre mobile attaché d'une manière intrinsèque à une droite d'une congruence W, les deux foyers jouant des rôles symétriques.

Citer ce document / Cite this document :

Godeaux Lucien. Sur la théorie des congruences W (troisième note). In: Bulletin de la Classe des sciences, tome 42, 1956. pp. 240-244;

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1956.68334;

https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1956_num_42_1_68334;

Fichier pdf généré le 22/06/2023

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Sur la théorie des congruences W,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(Troisième note)

Résumé. — Détermination d'un tétraèdre mobile attaché d'une manière intrinsèque à une droite d'une congruence W, les deux foyers jouant des rôles symétriques.

Dans nos recherches antérieures sur les congruences W (1), nous avons utilisé le tétraèdre mobile d'Elie Cartan attaché à un des foyers d'une droite d'une congruence. Il en résultait une sorte de disymétrie dans les calculs, les deux foyers de la droite ne jouant pas le même rôle. Dans cette note, nous définissons un tétraèdre mobile attaché à une droite d'une congruence W de la manière suivante :

Soient x, $\bar{x}$ les deux foyers d'une droite j d'une congruence W. Désignons par Φ, $\overline{\Phi}$ les quadriques de Lie attachées aux points x, $\bar{x}$ des surfaces (x), $(\bar{x})$. Ces quadriques ont en commun un quadrilatère gauche et par conséquent le produit des polarités par rapport à ces quadriques est une homographie biaxiale dont les axes r_1, r_2 forment, avec les côtés du quadrilatère, les arêtes d'un tétraèdre. Désignons par s_1 la droite passant par x et s'appuyant sur r_1, r_2, et par s_2 la droite passant par $\bar{x}$ et s'appuyant sur r_1, r_2 également. Soit alors $\overline{m}$ un point de s_1 qui, avec x, partage harmoniquement le couple des points d'appui de s_1 sur r_1 et r_2. Soit de même $\bar{n}$ le point de s_2 qui, avec $\bar{x}$, partage

(1) Les deux premières notes sont parues dans le BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROY. DE BELGIQUE, 1954, pp. 1028-1037 ; 1955, pp. 343-345. Voir aussi une note *Sulle congruenze* W en cours d'impression, dans les RENDICONTI DI MATEMATICA.

harmoniquement le couple des points d'appui de s_2 sur r_1, r_2. Le tétraèdre $x\bar{x}\bar{m}\bar{n}$ est défini d'une manière intrinsèque.

1. Soit (j) une congruence W dont nous désignerons par (x), $(\bar{x})$ les surfaces focales et par u, v les paramètres des asymptotiques de ces surfaces.

Attachons à un point x de la surface (x) le tétraèdre d'Elie Cartan, dont les sommets sont les points

$$x,\ m = x(\log a)^{10} - 2x^{10},\quad n = x(\log b)^{01} - 2x^{01},$$
$$y = [8ab - (\log a)^{10}(\log b)^{01}]x + 2x^{10}(\log b)^{01} + 2x^{01}(\log a)^{10} - 4x^{11}.$$

Tout point de l'espace a des coordonnées de la forme

$$z_1x + z_2m + z_3n + z_4y.$$

Au point x de la surface (x), nous avons attaché deux quadriques :

$$\begin{aligned}\Psi_0 &\equiv \lambda(z_1z_4 + z_2z_3) + \mu(z_2^2 + \beta z_4^2) + 2\mu_1z_2z_4 + \\ &\quad + 2[\mu_2 + \mu_1(\log bh_1)^{01}]z_4^2 = 0,\\ \Psi_{-0} &\equiv \mu(z_1z_4 + z_2z_3) + \lambda(z_3^2 + \alpha z_4^2) + 2\lambda_1z_3z_4 + \\ &\quad + 2[\lambda_2 + \lambda_1(\log ak_1)^{10}]z_4^2 = 0.\end{aligned}$$

Le produit des polarités par rapport à ces deux quadriques est une homographie n'ayant que deux points unis : les points x, $\bar{x}$, deux plans unis : les plans tangents en x, $\bar{x}$ respectivement aux surfaces (x), $(\bar{x})$, enfin, outre la droite $x\bar{x}$, une droite unie g_1, passant par x, d'équations

$$\frac{z_2}{\lambda\mu_1} = \frac{z_3}{\mu\lambda_1} = \frac{z_4}{-\lambda\mu}$$

et une droite unie g_2, passant par $\bar{x}$, d'équations

$$\lambda\mu z_1 - \mu\lambda_1z_2 - \lambda\mu_1z_3 = 0,\ z_4 = 0\ (^1).$$

Le point de rencontre de la droite g_1 avec la quadrique de Lie Φ, attachée au point x, en dehors de ce point, est donné par

$$\bar{m} = \lambda_1\mu_1x + \lambda\mu_1m + \mu\lambda_1n - \lambda\mu y.$$

(1) *Sur une homographie associée à une congruence W* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1955, pp. 870-874).

Le second point de rencontre de la droite g_2 avec la quadrique de Lie $\overline{\Phi}$ attachée au point $\bar{x}$ à la surface $(\bar{x})$ est donné par [1]

$$\bar{n} = (\lambda_1 M - \mu_1 L)x + \lambda M m - \mu L n.$$

2. A la droite j de la congruence W considérée, nous attacherons le tétraèdre $x\bar{m}\bar{n}\bar{x}$, qui est défini d'une manière intrinsèque.

Tout point de l'espace aura des coordonnées de la forme

$$z_1'x + z_2'\bar{m} + z_3'\bar{n} + z_4'\bar{x}.$$

Nous aurons

$$\begin{aligned}
\rho z_1' &= \lambda\mu z_1 - \mu\lambda_1 z_2 - \lambda\mu_1 z_3 - \lambda_1\mu_1 z_4,\\
\rho z_2' &= z_4,\\
\rho z_3' &= \mu z_2 - \lambda z_3 + (\lambda_1 + \mu_1)z_4,\\
\rho z_4' &= \mu L z_2 + \lambda M z_3 + (\mu_1 L + \lambda_2 M)z_4.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\rho' z_1 &= (M - L)z_1' + \lambda_1\mu_1(L - M)z_2' + (\lambda_1 M - \mu_1 L)z_3' - (\lambda_1 - \mu_1)z_4',\\
\rho' z_2 &= \lambda\mu_1(L - M)z_2' + \lambda M z_3' - \lambda z_4',\\
\rho' z_3 &= \mu\lambda_1(L - M)z_2' - \mu L z_3' + \mu z_4',\\
\rho' z_4 &= \lambda\mu(L - M)z_2'.
\end{aligned}$$

3. Nous pouvons maintenant former les équations des quadriques associées à la congruence W (Pour simplifier les notations, nous écrirons z au lieu de z').

La quadrique de Lie Φ, attachée au point x de la surface (x), a pour équation

$$(L - M)^2 z_1 z_2 - LM z_3^2 - z_4^2 + (L + M)z_3 z_4 = 0. \qquad (\Phi)$$

L'équation de la quadrique de Lie $\overline{\Phi}$ attachée au point $\bar{x}$ de la surface $(\bar{x})$ est

$$z_3 z_4 - LM z_2^2 - z_1^2 + (L + M)z_1 z_2 = 0. \qquad (\overline{\Phi})$$

[1] Nous avons établi l'équation de la quadrique de Lie $\overline{\Phi}$, rapportée au tétraèdre d'E. Cartan, dans notre note *Sur les quadriques de Lie des deux nappes d'une congruence W* (BULLETIN DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1955, pp. 1101-1103).

Les quadriques Ψ_0 et Ψ_{-0} ont respectivement pour équations

$$(L - M)z_1z_2 + M(L - M)z_2^2 - Mz_3^2 + z_3z_4 = 0, \qquad (\Psi_0)$$

$$(L - M)z_1z_2 + L(M - L)z_2^2 + Lz_3^2 - z_3z_4 = 0. \qquad (\Psi_{-0})$$

Nous pouvons changer de point unitaire en remplaçant z_3, z_4 respectivement par $\sqrt{L - M}z_3$, $\sqrt{L - M}z_4$. On obtient alors les équations plus symétriques

$$(L - M)z_1z_2 - LMz_3^2 - z_4^2 + (L + M)z_3z_4 = 0, \qquad (\Phi)$$

$$(L - M)z_3z_4 - LMz_2^2 - z_1^2 + (L + M)z_1z_2 = 0, \qquad (\overline{\Phi})$$

$$z_1z_2 + M(z_2^2 - z_3^2) + z_3z_4 = 0, \qquad (\Psi_0)$$

$$z_1z_2 + L(z_3^2 - z_2^2) - z_3z_4 = 0. \qquad (\Psi_{-0})$$

4. Sur l'hyperquadrique Q de S_5, la quadrique Φ est représentée par les sections de cette hyperquadrique par les plans UU_1U_2 et VV_1V_2 ; la quadrique $\overline{\Phi}$ par les sections de Q par les plans $\overline{U}\overline{U}_1\overline{U}_2$ et $\overline{V}\overline{V}_1\overline{V}_2$. Les plans UU_1U_2 et $\overline{U}\overline{U}_1\overline{U}_2$ se coupent suivant la droite J_1J_2 et les plans VV_1V_2, $\overline{V}\overline{V}_1\overline{V}_2$ suivant la droite $J_{-1}J_{-2}$. Par conséquent, les quadriques Φ, $\overline{\Phi}$ se coupent suivant quatre droites représentées sur Q par les points d'intersection de Q et des droites J_1J_2, $J_{-1}J_{-2}$. Ces quatre droites sont les côtés d'un quadrilatère gauche, arêtes d'un tétraèdre. Désignons par r_1, r_2 les deux autres arêtes de ce tétraèdre.

Il résulte de ce qui précède que le produit des polarités par rapport à Φ, $\overline{\Phi}$ est une homographie biaxiale d'axes r_1, r_2.

Les équations de cette homographie sont

$$\begin{aligned}
\rho(L - M)z_2' &= -2z_1 + (L + M)z_2,\\
\rho(L - M)z_1' &= (L + M)z_1 - 2LMz_2,\\
-2LMz_3' + (L+M)z_4' &= (L - M)z_4,\\
(L + M)z_3' - 2z_4' &= (L - M)z_3,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\rho z_1' &= (L + M)z_1 - 2LMz_2,\\
\rho z_2' &= -2z_1 + (L + M)z_2,\\
\rho z_3' &= (L + M)z_3 + 2z_4,\\
\rho z_4' &= 2LMz_3 - (L + M)z_4.
\end{aligned}$$

L'équation caractéristique de cette homographie est

$$[\rho^2 - 2(L + M)\rho + (L - M)^2]^2 = 0.$$

Les racines doubles de cette équation sont

$$\rho = L + M \pm 2\sqrt{LM}.$$

Les équations des droites r_1, r_2 sont respectivement

$$z_1 + z_2\sqrt{LM} = 0, \qquad z_3\sqrt{LM} - z_4 = 0, \qquad (r_1)$$

$$z_1 - z_2\sqrt{LM} = 0, \qquad z_3\sqrt{LM} + z_4 = 0. \qquad (r_2)$$

Les droites g_1 et g_2 sont les droites s'appuyant sur r_1 et r_2 et passant respectivement par les points x, $\bar{x}$.

On voit de plus que l'on a

$$[x, \bar{m}, (r_1, g_1), (r_2, g_1)] = -1,$$

$$[\bar{x}, \bar{n}, (r_1, g_2), (r_2, g_2)] = -1.$$

Le tétraèdre $x\bar{x}\bar{m}\bar{n}$ est ainsi défini d'une manière intrinsèque.

Liège, le 28 février 1956.