Bulletin de la Classe des sciences

Sur une surface du cinquième ordre possédant une droite double tacnodale (première note)

Lucien Godeaux

Résumé
Étude d'une surface algébrique dont la courbe canonique est formée de quatre courbes rationnelles et ayant les genres pa = pg = P2 = 1, P3 = P4 = 2, P3 = 4, P6 = 5, P7 = 8 ....

Citer ce document / Cite this document :

Godeaux Lucien. Sur une surface du cinquième ordre possédant une droite double tacnodale (première note). In: Bulletin de la Classe des sciences, tome 42, 1956. pp. 884-896;

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1956.68455;

https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1956_num_42_1_68455;

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur une surface du cinquième ordre possédant une droite double tacnodale,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(Première note).

Résumé. — Étude d'une surface algébrique dont la courbe canonique est formée de quatre courbes rationnelles et ayant les genres $p_a = p_g = P_2 = 1$, $P_3 = P_4 = 2$, $P_5 = 4$, $P_6 = 5$, $P_7 = 8$ ....

Comme applications de nos recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et n'ayant qu'un nombre fini de points unis (¹), nous avons construit des surfaces dont le système canonique possède des composantes fixes rationnelles non exceptionnelles et dont le système bicanonique est irréductible (²). Cette note est consacrée à l'étude d'un cas particulier présentant un certain intérêt.

Nous partons d'une surface F contenant une involution cyclique d'ordre treize présentant trois points unis. L'image de cette involution est une surface Φ du cinquième ordre possédant

(¹) *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités Scient., n° 270 ; Paris, Hermann, 1935) ; *Mémoire sur les surfaces multiples* (Mémoires in-8° de l'Acad. roy. de Belgique, 1953) ; *Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples* (Deuxième Colloque de Géométrie algébrique tenu a Liège en 1952, Liège, Thone et Paris, Masson, 1952, pp. 225-241).

(²) *Sur quelques surfaces algébriques représentant des involutions cycliques* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1951, pp. 819-825, 826-835, 938-949, 1106-1119) ; *Construction d'une surface dont le système canonique possède des composantes fixes* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1953, pp. 49-56) ; *Surfaces dont le système canonique contient quatre composantes fixes* Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1956, pp. 576).

une droite double tacnodale et trois points triples sur cette droite. La détermination des courbes canoniques et pluricanoniques de la surface Φ peut se faire de deux manières : soit en partant des courbes canoniques et pluricanoniques de la surface F transformées des courbes cherchées, soit en considérant les adjointes et les pluriadjointes à la surface Φ. La comparaison de ces deux procédés fait l'objet de cette note.

La surface Φ possède une seule courbe canonique formée de quatre courbes rationnelles, une seule courbe bicanonique double de la précédente. Mais dès le système tricanonique, apparaissent des composantes variables irréductibles. Les sections planes de la surface Φ en sont les courbes 5-canoniques. La surface a les genres $p_a = p_g = P_2 = 1$, $P_3 = P_4 = 2$, $P_5 = 4$, $P_6 = 5$, $P_7 = 8$.

Dans une seconde note, nous étudierons les relations fonctionnelles liant les courbes pluricanoniques aux composantes des points de diramation.

1. Considérons la surface F, du cinquième ordre, d'équation

$$a_1x_1^4x_2 + a_2x_2^4x_3 + a_3x_3^4x_1 + a_4x_4^5 + a_5x_1x_2x_3x_4^2 = 0.$$

Elle est transformée en soi par l'homographie

$$H = \begin{pmatrix} x_1 & \epsilon x_2 & \epsilon^{10}x_3 & \epsilon^8 x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

de période 13, ϵ étant une racine primitive d'ordre 13 de l'unité.

Sur F, H détermine une involution I, d'ordre 13, présentant trois points unis, $O_1(1, 0, 0, 0)$, $O_2(0, 1, 0, 0)$, $O_3(0, 0, 1, 0)$, simples pour la surface.

Pour obtenir un modèle projectif Φ image de l'involution I, posons

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = x_1^4x_2 : x_2^4x_3 : x_3^4x_1 : x_4^5,$$
$$a_5\varphi = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4.$$

La surface Φ a pour équation

$$X_1X_2X_3X_4^2 + \varphi^5 = 0\,;$$

elle est du cinquième ordre et possède une droite double g, d'équations $X_4 = \varphi = 0$. Cette droite double est tacnodale ; dans le plan $X_4 = 0$, la surface Φ possède une droite double g' infiniment voisine de g et une droite simple g'' infiniment voisine de g'.

Désignons respectivement par A_1, A_2, A_3 les points de rencontre de la droite g avec les plans $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$. Ces points sont triples pour la surface Φ ; le cône tangent en A_1 est $X_1X_4^2=0$, le cône tangent en A_2 est $X_2X_4^2 = 0$ et le cône tangent en A_3, $X_3X_4^2 = 0$.

Observons que l'on a

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : \varphi = x_1^4x_2 : x_2^4x_3 : x_3^4x_1 : x_4^5 : - x_1x_2x_3x_4^2.$$

2. Nous étudierons la structure des points unis de l'involution I et celle des points de diramation correspondants sur Φ. A cause de la symétrie des équations, il suffira d'ailleurs d'étudier le point O_1 et le point de diramation homologue.

Le point O_1 est simple pour F et le plan tangent en ce point est $x_2 = 0$. Dans ce plan, H détermine l'homographie

$$(x_1 \qquad \epsilon^{10}x_3 \qquad \epsilon^8x_4)$$

c'est-à-dire, en posant $\eta = \epsilon^{10}$, l'homographie

$$(x_1 \qquad \eta x_3 \qquad \eta^6x_4)$$

ou, en posant $\xi = \epsilon^8$, l'homographie

$$(x_1 \qquad \xi^{11}x_3 \qquad \xi x_4).$$

Suivant nos notations, les nombres attachés au point O_1 sont $\alpha = 6$, $\beta = 11$.

Construisons sur F un système linéaire $|C|$, transformé en soi par H, contenant 13 systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I, l'un d'eux, $|C_0|$, étant dépourvu de point-base. Il suffit de prendre par exemple pour $|C|$ le système découpé sur F par les surfaces du treizième ordre.

Désignons par C_0' les courbes C_0 passant par O_1. Les courbes C_0' ont la multiplicité trois et passent deux fois par cinq points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$,..., $(\alpha, 5)$ infiniment voisins successifs de O_1, le premier se trouvant sur la droite $x_2 = x_4 = 0$, une fois par dix points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, 10)$ infiniment voisins successifs de O_1, le premier se trouvant sur la droite $x_2 = x_3 = 0$.

Désignons par Φ_1 le modèle projectif de la surface Φ obtenue en rapportant projectivement les courbes C_0' aux hyperplans d'un espace ayant la même dimension que $|C_0'|$. Au domaine du point $(\alpha, 5)$ correspond sur Φ_1 une conique σ_α et à celui du point $(\beta, 10)$, une droite σ_β rencontrant σ_α en un point. La conique σ_α est de degré virtuel — 3 et la droite σ_β, de degré virtuel — 2.

On peut voir que le point commun à σ_α et σ_β est double biplanaire pour Φ_1 et que cette surface possède un second point double biplanaire ordinaire infiniment voisin du premier. On en conclut que le point de diramation de Φ homologue de O_1 est équivalent à six courbes rationnelles : l'une, σ_α, est de degré virtuel -3, les autres sont de degré virtuel -2. Seule la première nous intéresse et nous la désignerons par γ_1.

Sur la surface Φ, nous avons donc trois courbes rationnelles γ_1, γ_2, γ_3, de degré virtuel -3, correspondant respectivement aux points unis O_1, O_2, O_3. Ces courbes ne peuvent se rencontrer deux à deux.

3. S'il existe, sur la surface Φ, une courbe canonique, celle-ci doit rencontrer chacune des courbes γ_1, γ_2, γ_3 en un point. Il lui correspond donc, sur F une courbe K passant par le point $(\alpha, 5)$ et par conséquent par les points $(\alpha, 4)$, ..., $(\alpha, 1)$, O_1. De même, la courbe K doit passer par les points O_2, O_3. Comme d'autre part la courbe K doit être une courbe canonique de F et que celles-ci sont les sections planes de la surface, la courbe K est la courbe découpée sur F par $x_4 = 0$.

A la courbe K correspond la section de Φ par le plan $X_4 = 0$, c'est-à-dire, en dehors des droites doubles, la droite g''. D'après la formule de Zeuthen, l'involution déterminée par H sur la courbe K est d'ailleurs rationnelle et représentée par g''. Cependant, on ne peut affirmer dès à présent que g'' est une courbe exceptionnelle.

A une courbe i-canonique de Φ correspond sur F une courbe i-canonique K_i de cette surface découpée par un système linéaire de surfaces transformées en elles-mêmes par H et contenant la surface $x_4^i = 0$. Si l'on applique H à l'équation d'une de ces surfaces, cette équation se reproduit multipliée par ϵ^{8i}. Les surfaces envisagées sont évidemment d'ordre i et, si $i \geqslant 5$, elles ne comprennent pas F comme partie.

Les courbes K_2 sont donc découpées sur F par les quadriques dont l'équation, lorsque l'on applique H, se reproduit multipliée par $\epsilon^{16} = \epsilon^3$. Il existe une seule quadrique répondant à cette condition, c'est la quadrique $x_4^2 = 0$.

De ce qui précède, on conclut que la surface Φ a les genres $p_g = P_2 = 1$. Comme la surface Φ, de même que la surface F, est régulière, le genre arithmétique de Φ est $p_a = 1$.

4. Aux courbes tricanoniques de Φ correspondent sur F des courbes K_3 découpées par les surfaces cubiques dont l'équation se reproduit multipliée par ϵ^{11} lorsque l'on applique H. On trouve un faisceau de telles surfaces, à savoir

$$x_1x_2x_3 + \lambda x_4^3 = 0. \qquad (1)$$

Le genre de la courbe K_3 se calcule aisément en considérant la représentation plane de la surface (1). A une courbe K_3 correspond une courbe plane d'ordre 12, possédant trois points quintuples à chacun desquels sont infiniment voisins successifs deux points doubles. Les courbes K_3 sont donc de genre 19.

Aux courbes K_3 correspondent sur Φ les courbes découpées par les plans

$$\varphi - \lambda X_4 = 0$$

et que nous désignerons par K_3'. Les courbes K_3' sont des cubiques elliptiques (on défalque de l'intersection la droite double g). Si d'ailleurs, on applique la formule de Zeuthen à la correspondance (1, 13) existant entre une courbe K_3' et la courbe K_3 homologue, on trouve une confirmation de ce résultat.

Sur Φ, il existe donc un faisceau de courbes tricanoniques et la surface a donc le trigenre $P_3 = 2$.

Aux courbes 4-canoniques de Φ correspondent sur F des courbes K_4 découpées par les surfaces du quatrième ordre dont l'équation se reproduit multipliée par ϵ^6 quand on applique H. On trouve les surfaces

$$x_4(x_1x_2x_3 + \lambda x_4^3) = 0.$$

La surface Φ a donc le genre $P_4 = 2$.

Les courbes 5-canoniques de Φ ont pour transformées sur F les courbes K_5 découpées par les surfaces du cinquième ordre dont l'équation se reproduit multipliée par ϵ quand on applique H. Le système formé par ces surfaces ne peut comprendre F et a donc pour équation

$$\lambda_1 x_1^4 x_2 + \lambda_2 x_2^4 x_3 + \lambda_3 x_3^4 x_1 + \lambda_4 x_4^5 = 0.$$

A ces courbes correspondent les sections planes K_5' de Φ et pour cette surface, on a $P_5 = 4$.

5. Recherchons encore les genres P_6 et P_7 de Φ.

Aux courbes 6-canoniques de Φ correspondent sur F les courbes 6-canoniques K_6 découpées par les surfaces du sixième ordre dont l'équation se reproduit multipliée par ϵ^9 après application de H. De plus, aucune de ces surfaces ne doit comprendre F comme partie.

On trouve

$$x_4(\lambda_1 x_1^4 x_2 + \lambda_2 x_2^4 x_3 + \lambda_3 x_3^4 x_1 + \lambda_4 x_4^5) + \lambda_5 x_1^2 x_2^2 x_3^2 = 0.$$

A ces courbes correspondent sur Φ les courbes K_6' découpées par les surfaces

$$\Psi_6 \equiv X_4(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4) + \lambda_5 \varphi^2 = 0. \qquad (1)$$

Pour la surface Φ, on a donc $P_6 = 5$.

On observera que les surfaces (1) découpent sur Φ les adjointes aux sections planes K_5'.

Aux courbes 7-canoniques de Φ correspondent sur F les courbes K_7 découpées par les surfaces

$$\begin{gathered} x_4^2(\lambda_1 x_1^4 x_2 + \lambda_2 x_2^4 x_3 + \lambda_3 x_3^4 x_1 + \lambda_4 x_4^5) \\ + \lambda_5 x_2^3 x_3^4 + \lambda_6 x_3^3 x_1^4 + \lambda_7 x_1^3 x_2^4 + \lambda_8 x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4 = 0. \end{gathered}$$

Aux courbes K_7 correspondent sur Φ les courbes K_7' découpées par les surtaces

$$\begin{gathered} \Psi_7 \equiv X_4\varphi(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4) \\ - X_4(\lambda_5 X_2 X_3 + \lambda_6 X_3 X_1 + \lambda_7 X_1 X_2) + \lambda_8 \varphi^3 = 0. \end{gathered}$$

Les courbes K_7 sont les adjointes aux courbes K_6' et pour la surface Φ, on a $P_7 = 8$.

6. Nous allons maintenant rechercher ce qui correspond, sur le modèle projectif de Φ considéré, aux courbes $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

La transformation quadratique

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1^2 : y_2y_3 : y_1y_3 : y_3y_4$$

fait correspondre au point $(\alpha, 1)$, infiniment voisin de O_1 sur la droite $x_2 = x_4 = 0$, le point $y_2 = y_3 = y_4 = 0$.

Effectuons trois fois de suite la transformation précédente, c'est-à-dire la transformation

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1^4 : y_2y_3^3 : y_1^3y_3 : y_3^2y_4,$$

dont l'inverse est

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1x_3^3 : x_1^3x_2 : x_3^4 : x_1^3x_4.$$

A la surface F correspond la surface F'

$$y_1^{16}(a_1y_2 + a_3y_3) + a_2y_1^3y_2^4y_3^{10} + a_4y_3^{12}y_4^5 + a_5y_1^7y_2y_3^7y_4^2 = 0.$$

et à l'homographie H, l'homographie

$$\text{H}' = \begin{pmatrix} y_1 & \epsilon^{10}y_2 & \epsilon^{10}y_3 & \epsilon^4 y_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}.$$

Au point $(\alpha, 3)$ correspond le point O_1' $(y_2 = y_3 = y_4 = 0)$ et au point $(\alpha, 4)$, le point de F' infiniment voisin de O_1' sur la droite

$$a_1y_2 + a_3y_3 = 0, \ y_4 = 0.$$

Observons que dans le plan tangent $a_1y_2 + a_3y_3 = 0$ à F' en O_1', H' détermine une homographie non homologique.

Pour faire apparaitre le point $(\alpha, 5)$, effectuons deux fois de suite la transformation

$$y_1' : a_1y_2' + a_3y_3' : y_3' : y_4' = y_1^2 : (a_1y_2 + a_3y_3)y_3 : y_1y_3 : y_3y_4,$$

c'est-à-dire la transformation

$$y_1' : a_1y_2' : y_3' : y_4' = y_1^3 : (a_1y_2y_3 + a_3y_3^2 - a_3y_1^2)y_3 : y_1^2y_3 : y_3^2y_4,$$

dont l'inverse est

$$y_1 : a_1y_2 : y_3 : y_4 = y_1'y_3'^2 : (a_1y_2' + a_3y_3')y_1'^2 - a_3y'^3 : y_3'^3 : y_1'^2y_4'$$

A la surface F′ correspond la surface F″ d'équation

$$y_1^{24}(a_1y_2 + a_3y_3) + a_2y_6^5\left(\frac{a_1y_2y_3 + a_3y_3^2 - a_3y_1^2}{a_1}\right)^4 y_3^{12} + a_4y_3^{10}y_5^4$$
$$+ a_5y_1^{11}\frac{a_1y_2y_3 + a_3y_3^2 - a_3y_1^2}{a_1}y_3^{10}y_4^2 = 0$$

et à l'homographie H′, l'homographie H″,

$$y_1' : a_1y_2' + a_3y_3' : y_3' : y_4' = y_1 : \epsilon^3(a_1y_2 + a_3y_3) : \epsilon^{10}y_3 : \epsilon^{10}y_4.$$

Au point $(\alpha, 5)$ correspond le point O_1'' (1, 0, 0, 0). Dans le plan tangent $a_1y_2 + a_3y_3 = 0$ en ce point à F″, l'homographie H″ détermine une homologie de centre O_1''. Le point $(\alpha, 5)$ est donc bien un point uni de première espèce de l'involution I.

Nous avons

$$\rho X_1 = y_1^{24}\frac{a_1y_2y_3 + a_3y_3^2 - a_3y_1^2}{a_1},$$
$$\rho X_2 = y_1^5y_3^{13}\left(\frac{a_1y_2y_3 + a_3y_3^2 - a_3y_1^2}{a_1}\right)^4,$$
$$\rho X_3 = y_1^{26}.$$
$$\rho X_4 = y_3^{21}y_4^5,$$
$$-\rho\varphi = y_1^{11}y_3^{11}y_4^2\frac{a_1y_2y_3 + a_3y_3^2 - a_3y_1^2}{a_1}.$$

Introduisons, dans ces équations, la condition $a_1y_1 + a_3y_3 = 0$. Nous avons

$$a_1X_1 + a_3X_3 = 0$$

et

$$\frac{X_2}{a_3^4y_1^{13}y_3^2} = \frac{X_4}{a_1^4y_3^{10}y_5^4} = \frac{\varphi}{a_1^3a_3y_1^{13}y_4^2}.$$

Dans ces dernières équations, posons $y_4 = \lambda y_3$, mais faisons tendre y_3 vers zéro. Il vient $X_4 = 0$ et $a_3X_2 - a_1\varphi = 0$, c'est-à-dire, en tenant compte des équations précédentes $(a_3a_5 - a_1a_2)X_2 = 0$. On en conclut qu'à la courbe γ_1 correspond sur Φ le point A_2.

De même, à la courbe γ_2 correspond le point A_3 et à la courbe γ_3, le point A_1.

7. On peut, par un procédé analogue, rechercher ce qui correspond sur Φ au domaine du point $(\beta, 10)$. Nous nous bornerons à indiquer les transformations à effectuer.

On effectue d'abord quatre fois la transformation

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1^2 : y_2y_4 : y_3y_4 : y_1y_4,$$

et ensuite six fois la transformation

$$y_1' : a_1y_2' + a_4y_4' : y_3' : y_4' = y_1^2 : (a_1y_2 + a_4y_4)y_4 : y_3y_4 : y_1y_4.$$

A la surface F correspond la surface

$$y_1^{44}(a_1y_1 + a_4y_4) + a_2[(a_1y_1 + a_4y_4)y_4^5 - a_4y_1^6]^4y_3y_4^{20} +$$
$$a_3y_1^{11}y_3^4y_4^{30} + a_5[(a_1y_2 + a_4y_4)y_4^5 - a_4y_1^6]y_3y_4^7 = 0.$$

A l'homographie H correspond l'homographie

$$y_1' : a_1y_2' + a_4y_4' : y_3' : y_4' = y_1 : \epsilon^{12}(a_1y_2 + a_4y_4) : \epsilon^8y_3 : \epsilon^8y_4.$$

Au point $(\beta, 10)$ correspond le point $O_1(1, 0, 0, 0)$ et dans le plan tangent $a_1y_2 + a_4y_4 = 0$ à la surface en ce point, l'homographie détermine une homologie de centre O_1. Au point $(\beta, 10)$, c'est-à-dire à la courbe σ_β, correspond le point

$$a_1X_1 + a_1X_4 = 0, X_2 = X_3 = 0.$$

Ce point est double pour la surface Φ, le cône tangent étant $X_2X_3 = 0$.

On observera que la droite

$$X_2 = 0, \quad a_1X_1 + a_3X_3 + a_4X_4 = 0,$$

qui joint le point trouvé ici au point A_2, appartient à Φ.

8. Les adjointes à Φ sont des plans qui doivent passer une fois par les droites doubles g, g' de la surface. Il existe donc une seule de ces adjointes : le plan $X_4 = 0$ et on a bien $p_g = 1$.

De même, il existe une seule biadjointe, la quadrique dégénérée $X_4^2 = 0$ et on a bien $P_2 = 1$.

Une i-adjointe à Φ est une surface d'ordre i qui doit passer par la droite g de telle sorte que dans l'intersection, cette droite compte pour une courbe d'ordre $4i$. Si donc les i-adjointes passent h_1 fois par g, h_2 fois par g' et h_3 fois par g'', on doit avoir

$$2(h_1 + h_2) + h_3 = 2i.$$

Cela étant, les triadjointes à Φ sont les surfaces cubiques

$$X_4^2(\varphi - \lambda X_4) = 0,$$

qui passent trois fois par g, deux fois par g' et g''. On a bien $6 + 4 + 2 = 12$ et $P_3 = 2$.

Les 4-adjointes à Φ sont

$$X_4^3(\varphi - \lambda X_4) = 0,$$

qui passent 4 fois par g, 3 fois par g' et g''. On a $P_4 = 2$.

Les 5-adjointes à Φ sont

$$X_4^4(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4) = 0.$$

qui passent 4 fois par g, g' et g''. On a $P_5 = 4$.

Les 6-adjointes à Φ ont pour équation $X_4^4 \Psi_6 = 0$. Elles passent cinq fois par g, g' et quatre fois par g''. En effet, les surfaces $\Psi_6 = 0$ passent par g et g'. On a $P_6 = 5$.

Les 7-adjointes à Φ sont $X_1^4 \Psi_7 = 0$; elles passent cinq fois par les droites g, g', g'', car les surfaces $\Psi_7 = 0$ passent une fois par ces droites. On a $P_7 = 8$.

9. Nous devons maintenant expliquer le comportement des courbes K_3' et K_5' aux points A_2, A_2, A_3.

Si l'on poursuit l'examen de la structure du point uni O_1, on trouve que le point $(\alpha, 1, 1, 1)$ est uni de première espèce. Pour mettre cette particularité en évidence sur la surface F, effectuons la transformation

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1^2 : y_2 y_3 : y_1 y_3 : y_3 y_4, \tag{1}$$

puis la transformation

$$y_1' : y_2' : y_3' : y_4' = y_1^2 : y_2 y_4 : y_3 y_4 : y_1 y_4, \tag{2}$$

puis de nouveau la transformation (1). Nous obtenons comme transformée de F la surface

$$a_1 y_1^{24}\, y_2 + a_3 y_2^4 y_3^{14}\, y_4^7 + a_3 y_1^{19}\, y_3^4 y_4^2 + a_4 y_1^6 y_{33}^{11} y_4^8 + a_5 y_1^{11} y_2 y_3^8 y_4^5 = 0 \quad (3)$$

et comme transformée de H, l'homographie

$$\begin{pmatrix} y_1 & \epsilon^7 y_2 & \epsilon^{11} y_3 & \epsilon^{11} y_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}.$$

Le point $(\alpha, 1, 1, 1)$ a pour homologue le point $O_1(1, 0, 0, 0)$. On voit donc bien que ce point est uni de première espèce, l'homographie précédente donnant, dans le plan tangent $y_2 = 0$ à la surface (3) en O_1, une homologie de centre O_1.

Les mêmes transformations font correspondre à la surface

$$x_1 x_2 x_3 + \lambda x_4^3 = 0,$$

la surface

$$y_1^5 y_2 + \lambda y_3^3 y_4^3 = 0. \quad (4)$$

Les surfaces (3) et (4) ont même plan tangent en O_1 ; elles contiennent toutes deux la droite $y_2 = y_3 = 0$. Elles se rencontrent donc en dehors de cette droite, suivant une courbe ayant un point simple en O_1. On en conclut que les courbes K_3 ne rencontrent pas γ_1.

Nous avons vu que les courbes K_3' touchent le plan $X_2 = 0$ en A_2. Par conséquent, aux points infiniment voisins de A_2 situés dans le plan $X_2 = 0$ correspondent les points du domaine de $(\alpha, 1, 1, 1)$. Il en résulte qu'aux points de γ_1 correspondent les points infiniment voisins de A_2 situés dans le plan $X_4 = 0$.

10. Considérons maintenant le système $|K_5|$, découpé sur F par les surfaces

$$\lambda_1 x_1^4 x_2 + \lambda_2 x_2^4 x_3 + \lambda_3 x_3^4 x_1 + \lambda_4 x_4^5 = 0. \quad (5)$$

Lorsque l'on étudie la structure du point O_1, on trouve que le point $(\beta, 1, 3)$ est uni de première espèce.

Si l'on effectue une fois la transformation (2), puis trois fois la transformation (1), la surface F se transforme en la surface

$$a_1 y_1^{29}\, y_2 + a_2 y_2^4 y_3^{22} y_4^4 + a_3 y_1^{17}\, y_3^{10} y_4^3 + a_4 y_1^{17}\, y_3^9 y_4^4 + a_5 y_1^{16}\, y_2 y_3^{10} y_4^3 = 0 \quad (6)$$

et l'homographie H donne l'homographie

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \epsilon^2 y_3 & \epsilon^2 y_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}.$$

Au point $(\beta, 1, 3)$ correspond le point $O_1(1, 0, 0, 0)$ et dans le plan tangent $y_2 = 0$ à la surface (6) en ce point, l'homographie détermine une homologie de centre O_1.

A la surface (5) correspond la surface

$$\lambda_1 y_1^{29} y_2 + \lambda_2 y_2^4 y_3^{22} y_4^4 + \lambda_3 y_1^{17} y_3^{10} y_4^3 + \lambda_4 y_1^{17} y_3^{15} y_4^4 = 0,$$

qui coupe la surface (6) suivant une courbe ayant en O_1 la tangente $y_2 = 0$, $\lambda_3 y_3 + \lambda_4 y_4 = 0$. Il en résulte que les courbes K_5 passent par le point $(\beta, 1, 3)$. Elles ne passent pas par les points $(\alpha, 5)$, $(\alpha, 1, 1, 1)$, ce qui explique que les courbes K_5' ne passent pas par le point A_2.

On démontre de même qu'elles ne passent pas par A_3, A_1.

11. On pourrait continuer cette recherche pour les systèmes $|K_6'|$ et $|K_7'|$. On trouverait par exemple que les courbes K_6 passent par le point $(\alpha, 5)$.

Le plan $X_4 = 0$ coupe la surface Φ suivant la courbe

$$g'' + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3. \qquad (1)$$

Les courbes γ_1, γ_2, γ_3, de degré virtuel -3, ne peuvent être exceptionnelles, mais la droite g'' pourrait être exceptionnelle (¹).

Si g'' était exceptionnelle, elle devrait appartenir cinq fois au système découpé sur Φ par les cinq-adjointes, c'est-à-dire par les surfaces

$$X_4^4(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4) = 0.$$

Or, les courbes découpées par ces surfaces ne comprennent que quatre fois la droite g'', donc *cette droite n'est pas exceptionnelle.*

(¹) Dans notre note *Sur les involutions de genre un appartenant à une surface algébrique* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1938, pp. 308-313), nous avions cru pouvoir conclure que la droite g était exceptionnelle et que, la surface Φ ayant une courbe canonique d'ordre zéro, avait les genres $p_4 = P_4 = 1$.

Les courbes γ_1, γ_2, γ_3 n'interviennent que quatre fois également dans les courbes découpées par les 5-adjointes à Φ, donc ces courbes doivent appartenir à des composantes irréductibles des systèmes pluricanoniques.

La courbe (1) est donc finalement la courbe canonique de la surface Φ [1].

Liège, le 28 août 1956.

(1) Cette note a fait l'objet d'une communication au quatrième congrès de la Société Mathématique autrichienne (Vienne, 17-22 septembre 1956).