Bulletin de la Classe des sciences

Sur une surface du cinquième ordre possédant une droite double tacnodale (seconde note)

Lucien Godeaux

Résumé
Suite de l'étude d'une surface algébrique dont la courbe canonique est formée de quatre courbes rationnelles, trois de degré virtuel — 3 ne se rencontrant pas deux à deux et une de degré virtuel — 1 rencontrant chacune des autres en un point.

Sur une surface du cinquième ordre possédant une droite double tacnodale,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(Seconde note).

Résumé. — Suite de l'étude d'une surface algébrique dont la courbe canonique est formée de quatre courbes rationnelles, trois de degré virtuel — 3 ne se rencontrant pas deux à deux et une de degré virtuel — 1 rencontrant chacune des autres en un point.

Pour compléter l'étude de la surface qui fait l'objet de notre première note (1), nous en construisons un modèle projectif hyperspatial sur lequel les points de diramation sont isolés. Chacun de ces trois points est triple pour la surface, le cône tangent étant formé d'un cône du second ordre et d'un plan rencontrant le cône précédent suivant une génératrice ; sur celle-ci, il existe un point double biplanaire infiniment voisin du sommet du cône et auquel est infiniment voisin un second point double biplanaire ordinaire. Chaque point de diramation est donc équivalent à un ensemble de six courbes rationnelles.

Nous déterminons les relations fonctionnelles liant les sections hyperplanes de la surface, les 18 composantes des points de diramation, et les courbes canonique, tricanoniques et 5-canoniques. Cela fait apparaitre que la droite g'' de la surface considérée dans notre première note (et que nous appelons K_1' pour uniformiser les notations), bien qu'étant de degré virtuel — 1, n'est pas exceptionnelle.

Nous terminons en construisant le système 13-canonique de la surface Φ. Sur un modèle projectif 13-canonique de Φ, il existe,

(1) La première note est parue dans le BULLETIN DE L'ACADÉMIE, 1956, pp. 67.

correspondant aux domaines de chaque point de diramation, trois ensembles d'une conique et d'une droite s'appuyant sur la conique.

1. Reprenons la surface F d'équation

$$a_1x_1^4x_2 + a_2x_2^4x_3 + a_3x_3^4x_1 + a_4x_4^5 + a_5x_1x_2x_3x_4^2 = 0,$$

sur laquelle l'homographie

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} x_1 & \epsilon x_2 & \epsilon^{10}x_3 & \epsilon^8 x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

de période 13, engendre une involution I possédant trois points unis O_1, O_2, O_3. Soit Φ une surface image de cette involution.

Désignons par C les sections planes de F. A une courbe C correspond sur Φ une courbe Γ et à la courbe Γ correspond sur F l'ensemble de la courbe C et de ses douze transformées C_1, C_2, ..., C_{12} par H, H^2, ..., H^{12}. A un point commun à C et C_1 correspond un point commun à C_{12} et C ; ces deux points appartiennent à un même groupe de I et il leur correspond un point double de Γ. Il existe 30 couples de points de C appartenant à un même groupe de I et la courbe Γ possède 30 points doubles (variables avec la courbe). La courbe Γ, de genre effectif 6, est donc de genre virtuel 36. Elle appartient à un système linéaire complet $|\Gamma|$, de degré 65 et de genre 36, dont la courbe générique est dépourvue de singularités. Le système $|\Gamma|$ a la dimension $r = 31$.

Rapportons projectivement les courbes Γ aux hyperplans d'un espace S_r à $r = 31$ dimensions. Nous obtenons ainsi un modèle projectif normal de la surface Φ. Nous désignerons respectivement par O'_1, O'_2, O'_3 les points de diramation de Φ qui correspondent à O_1, O_2, O_3.

2. Déterminons les singularités de Φ aux points O'_1, O'_2, O'_3 en appliquant la méthode indiquée dans nos travaux antérieurs, en conservant les notations de ceux-ci ([1]).

Occupons-nous du point O'_1. Désignons par C_0 les courbes qui

([2]) Voir notre *Mémoire sur les surfaces multiples* (MÉMOIRES IN-8° DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1953).

correspondent sur F aux sections hyperplanes Γ de Φ et par C_0' les courbes passant par O_1. En appliquant la méthode rappelée, le point uni O_1 étant caractérisé par $\alpha = 6$, $\beta = 11$, on voit que les courbes C_0' ont la multiplicité trois en O_1 et passent deux fois par les points $(\alpha, 1)$ $(\alpha, 2), \ldots, (\alpha, 5)$ infiniment voisins successifs de O_1 et une fois par les points $(\beta, 1), (\beta, 2), \ldots, (\beta, 10)$ infiniment voisins successifs de O_1. Le point $(\alpha, 1)$ se trouve sur la droite O_1O_3 et le point $(\beta, 1)$ sur la droite O_1O_4.

Si l'on désigne par Φ_1 la projection de Φ à partir de O_1' sur un hyperplan de S_r, surface dont les sections hyperplanes Γ_0' correspondent aux courbes C_0', au domaine du point $(\alpha, 5)$ correspond sur Φ_1 une conique σ_α et à celui de $(\beta, 10)$ correspond une droite σ_β rencontrant σ_α en un point A_1'. La surface Φ étant d'ordre 65, Φ_1 est d'ordre 62, comme on le vérifie aisément.

Appelons C_0'' les courbes C_0' touchant en O_1 une droite distincte de O_1O_3, O_1O_4. Les courbes C_0'' ont en O_1 la multiplicité six, elles passent trois fois par $(\alpha, 1)$, une fois par $(\alpha, 2), \ldots, (\alpha, 5)$, une fois par deux points $(\alpha, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 1, 1)$ infiniment voisins successifs de $(\alpha, 1)$, deux fois par $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, $(\beta, 3)$, une fois par $(\beta, 4)$ et par un point $(\beta, 4, 1)$ infiniment voisin de $(\beta, 4)$.

Si nous désignons par Φ_2 la projection de Φ_1 à partir de A_1' sur un hyperplan de l'espace ambiant, surface dont les sections hyperplanes Γ_0'' correspondent aux courbes C_0'', il correspond sur cette surface respectivement aux domaines des points $(\alpha, 5)$, $(\alpha, 1, 1, 1)$, $(\beta, 1, 1)$, une droite σ_α, une droite ρ_{11} rencontrant σ_α en un point, une droite ρ_{12} rencontrant ρ_{11} en un point A_2'. Le point A_1' est double biplanaire pour Φ_1 et Φ_2 est d'ordre 60.

Soient C_0''' les courbes C_0'' touchant en O_1 une droite distincte de O_1O_3, O_1O_4. Les courbes C_0''' ont en O_1 la multiplicité huit, elles passent une fois par $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, 5)$, quatre fois par $(\beta, 1)$, une fois par les points $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 2)$, $(\beta, 1, 3)$ inf. vois. succ. de $(\beta, 1)$, une fois par $(\beta, 2)$ et par deux points $(\beta, 2, 1)$, $(\beta, 2, 2)$ inf. vois. succ. de $(\beta, 2)$.

Sur la surface Φ_3, projection de Φ_2 à partir de A_2', il correspond aux domaines des points $(\alpha, 5)$, $(\beta, 1, 3)$, $(\beta, 2, 2)$ respectivement une droite σ_α, une droite ρ_{21} rencontrant σ_α, une droite ρ_{22}, rencontrant ρ_{21}. Le point A_2' est double biplanaire pour la surface Φ_2 et Φ_3 est d'ordre 58.

3. La structure du point O_1' est maintenant complètement déterminée. En effet si l'on appelle $C_0^{(4)}$ les courbes C_0''' touchant en O_1 une droite distincte de O_1O_3, O_1O_4, $C_0^{(5)}$ les courbes $C_0^{(4)}$ assujetties à la même condition, $C_0^{(6)}$ les courbes $C_0^{(5)}$ assujetties à la même condition, on voit que :

Les courbes $C_0^{(4)}$ passent neuf fois par O_1, quatre fois par $(\alpha, 1)$, deux fois par $(\alpha, 1, 1)$ et $(\alpha, 1, 1, 1)$, trois fois par $(\beta, 1)$, une fois par $(\beta, 2)$, $(\beta, 2, 1)$, $(\beta, 2, 2)$. Le système $|C_0^{(4)}|$ est de degré effectif 13×56.

Les courbes $C_0^{(5)}$ passent onze fois par O_1, deux fois par $(\alpha, 1)$, une fois par $(\alpha, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 1, 1)$, deux fois par $(\beta, 1)$, $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 2)$, $(\beta, 1, 3)$. Le système $|C_0^{(5)}|$ a le degré effectif 13×54.

Les courbes $C_0^{(6)}$ passent douze fois par O_1, une fois par $(\alpha, 1)$ et par sept points $(\alpha, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 2)$, ..., $(\alpha, 1, 7)$ inf. vois. succ. de $(\alpha, 1)$, une fois par $(\beta, 1)$, $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 2)$, $(\beta, 1, 3)$. Au domaine du point $(\alpha, 1, 7)$ correspond sur Φ une droite exceptionnelle. Le degré effectif de $|C_0^{(6)}|$ est 13×53.

Les courbes $C_0^{(7)}$ déduites de $C_0^{(6)}$ par le même procédé que plus haut, ont la multiplicité 13 en O_1 et des tangentes variables. Le degré effectif de $|C_0^{(7)}|$ est 13×52.

4. De ce qui précède, on conclut que le point de diramation O_1' est équivalent à un ensemble de six courbes rationnelles

$$\sigma_\alpha, \ \rho_{11}, \ \rho_{21}, \ \rho_{22}, \ \rho_{12}, \ \sigma_\beta$$

dont chacune rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres. On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_\alpha + \rho_{11} + \rho_{21} + \rho_{22} + \rho_{12} + \sigma_\beta$$

et on en conclut que σ_α a le degré virtuel -3, les autres courbes le degré virtuel -2.

Les points de diramation O_2', O_3' ont des structures analogues.

Nous désignerons dans la suite les courbes dont l'ensemble équivaut au point de diramation O_i' ($i = 1, 2, 3$), par

$$\sigma_\alpha^{(i)}, \ \rho_{11}^{(i)}, \ \rho_{21}^{(i)}, \ \rho_{22}^{(i)}, \ \rho_{12}^{(i)}, \ \sigma_\beta^{(i)}.$$

Dans notre première note, nous avons désigné par γ_1, γ_2, γ_3 les courbes σ_α', σ_α'', σ_α'''.

5. Désignons par K_1 la section de F par le plan $x_4 = 0$. Cette courbe est transformée en soi par H et passe simplement par les points O_1, $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, 5)$. Il lui correspond sur Φ une courbe K_1', d'ordre cinq, le long de laquelle un hyperplan a un contact d'ordre 12 avec la surface. Il existe donc une relation fonctionnelle de la forme

$$\begin{aligned} \Gamma \equiv 13K_1' + \lambda'\sigma_\alpha' + \lambda_1'\rho_{11}' + \lambda_2'\rho_{21}' + \lambda_3'\rho_{22}' + \lambda_4'\rho_{12}' + \lambda_5'\sigma_\beta' \\ + \lambda''\sigma_\alpha'' + \ldots + \lambda_5'''\sigma_\beta''', \end{aligned}$$

où les λ sont des entiers.

Prenons les intersections de la courbe précédente successivement avec les courbes σ_β', ρ_{12}', ..., ρ_{11}', σ_α'. On obtient

$$\lambda_4' - 2\lambda_5' = 0,\ \lambda_3' - 2\lambda_4' + \lambda_5' = 0,\ \lambda_2' - 2\lambda_3' + \lambda_4' = 0,$$
$$\lambda_1' - 2\lambda_2' + \lambda_3' = 0,\ \lambda' - 2\lambda_1' + \lambda_2' = 0$$

et, puisque K_1' rencontre σ_α' en un point,

$$13 - 3\lambda' + \lambda_1' = 0.$$

On en déduit

$$\lambda' = 6,\ \lambda_1' = 5,\ \lambda_2' = 4,\ \lambda_3' = 3,\ \lambda_4' = 2,\ \lambda_5' = 1.$$

Les nombres λ'', ..., λ''' se déterminent de la même manière et ont les mêmes valeurs.

Désignons par x le degré virtuel de K_1' et prenons les intersections de K_1' avec la courbe précédente, en tenant compte que K_1' rencontre en un point chacune des courbes σ_α', σ_α'', σ_α'''. On a

$$5 = 13x + 3.6,$$

d'où $x = -1$.

La courbe rationnelle K_1' *a le degrè virtuel* -1 *et rencontre en un point chacune des courbes rationnelles* σ_α', σ_α'', σ_α''' *de degré virtuel* -3.

Sur le modèle projectif de Φ de S_3, considéré dans notre première note, à la courbe K_1' correspond la droite g''.

La relation fonctionnelle satisfaite par K_1' s'écrit

$$\Gamma \equiv 13K_1' + \Sigma(6\sigma_\alpha + 5\rho_{11} + 4\rho_{21} + 3\rho_{22} + 2\rho_{12} + \sigma_\beta) \qquad \text{(I)}$$

6. Nous avons vu dans notre première note que les courbes K_3, découpées sur F par les surfaces cubiques

$$x_1x_2x_3 + \lambda x_4^3 = 0,$$

passaient simplement par le point $(\alpha, 1, 1, 1)$. D'une manière précise, elles passent trois fois par O_1, deux fois par $(\alpha, 1)$, une fois par $(\alpha, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 1, 1)$.

A la courbe K_3 correspond sur Φ une courbe K_3', d'ordre 15, le long de laquelle une hypersurface cubique a un contact d'ordre 12 avec la surface. On a donc une relation de la forme

$$3\Gamma \equiv 13K_3' + \lambda'\sigma_\alpha' + \lambda_1'\rho_{11}' + \lambda_2'\rho_{21}' + \lambda_3'\rho_{22}' + \lambda_4'\rho_{12}' + \lambda_5', \sigma_\beta' + \ldots$$

La courbe K_3' rencontre en un point les courbes $\rho_{11}', \rho_{11}', \rho_{11}'$ mais ne rencontre pas les autres composantes des points de diramation.

En procédant comme plus haut, on trouve

$$\lambda_4' = r\lambda_5', \ \lambda_3' = 3\lambda_5', \ \lambda_2' = 4\lambda_5', \ \lambda_1' = 5\lambda_5'$$

et ensuite, en coupant par $\rho_{11}', \sigma_\alpha'$,

$$13 + \lambda' - 2\lambda_1' + \lambda_2' = 0, \ -3\lambda' + \lambda_1' = 0.$$

On en déduit

$$\lambda' = 5, \lambda_1' = 15, \lambda_2' = 12, \lambda_3' = \varphi, \lambda_4' = 6, \lambda_5' = 3$$

et des valeurs analogues pour $\lambda'', \ldots, \lambda''', \ldots.$

On a donc

$$3\Gamma \equiv 13K_3' + 5\Sigma\sigma_\alpha + 3\Sigma(5\rho_{11} + 4\rho_{21} + 3\rho_{22} + 2\rho_{12} + \sigma_\beta). \quad \text{(II)}$$

On a vu que les courbes K_3' forment un faisceau. On vérifie par la relation (II) que ce faisceau est de degré zéro. On voit de plus que K_1' ne rencontre pas les courbes K_5' en des points variables.

De la comparaison des relations (I) et (II), on déduit

$$K_3' \equiv 3K_1' + \sigma_\alpha' + \sigma_\alpha'' + \sigma_\alpha'''. \quad \text{(III)}$$

7. Les courbes K_5 sont découpées sur F par les surfaces

$$\lambda_1x_1^4x_2 + \lambda_2x_2^4x_3 + \lambda_3x_3^4x_1 + \lambda_4x_4^5 = 0$$

et nous avons vu, dans notre première note, que ces courbes passent simplement par le point $(\beta, 1, 3)$. Elles passent précisément quatre fois par O_1 et une fois par $(\beta, 1)$, $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 2)$, $(\beta, 1, 3)$. Les courbes K_5' qui leur correspondent sur Φ sont d'ordre 25 et rencontrent en un point les courbes ρ_{21}', ρ_{21}'', ρ_{21}''', mais ne rencontrent pas les autres composantes des points de diramation. Le long d'une courbe K_5', il existe une hypersurface du cinquième ordre ayant un contact d'ordre 12 avec la surface. On a donc une relation de la forme

$$5\Gamma \equiv 13K_5' + \lambda'\sigma_\alpha' + \ldots + \lambda_5'''\sigma'''.$$

En procédant comme plus haut, on trouve que cette relation est

$$5\Gamma \equiv 13K_5' + 4\Sigma\sigma_\alpha + 12\Sigma\rho_{11} + 5\Sigma(4\rho_{21} + 3\rho_{22} + 2\rho_{12} + \sigma_\beta). \quad \text{(IV)}$$

On vérifie aisément, sur cette relation, que le système $|K_5'|$ est de degré cinq, que K_1' rencontre une courbe K_5' en un point et qu'une courbe K_3' rencontre une courbe K_5' en trois points variables.

Des relations (I) et (IV), on déduit

$$K_5' = 5K_1' + 2\Sigma\sigma_\alpha + \Sigma\rho_{11}. \quad \text{(V)}$$

8. De ce qui précède, on peut conclure que *la courbe* K_1', *rationnelle et de degré virtuel* — 1, *n'est pas exceptionnelle.*

En effet, cette courbe intervient dans la formation des systèmes *irréductibles* $|K_3'|$ et $|K_5'|$, d'après les relations fonctionnelles (III) et (V).

D'ailleurs, si la courbe K_1' était exceptionnelle, la courbe canonique de la surface Φ serait $\sigma_\alpha' + \sigma_\alpha'' + \sigma_\alpha'''$ (ou $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ suivant les notations de notre première note). La courbe supposée exceptionnelle K_1' ne devrait pas rencontrer la courbe canonique alors qu'elle la rencontre en trois points.

9. Pour terminer, nous examinerons la formation du système 13-canonique $|K_{13}'|$ de la surface Φ.

Le système $|K_{13}|$ qui correspond sur F au système $|K_{13}'|$, comprend les courbes $13K_1$, $4K_3 + K_1$, $K_5 + 2K_3 + 2K_1$,

$2K_5 + 3K_1$, $2K_5 + K_3$. Les deux premières ont la multiplicité 13 en O_1, la troisième la multiplicité 12, les deux dernières la multiplicité 11. Les trois premières sont donc des cas particuliers de l'une des dernières, puisque ces courbes appartiennent au même système linéaire.

Les courbes $2K_5 + 3K_1$ passent onze fois par O_1, trois fois par $(\alpha, 1)$, ..., $(\alpha, 5)$, deux fois par $(\beta, 1)$, $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 2)$, $(\beta, 1, 3)$. Les courbes $2K_5 + K_3$ passent onze fois par O_1, deux fois par $(\alpha, 1)$, une fois par $(\alpha, 1, 1)$ et $(\alpha, 1, 1, 1)$, deux fois par $(\beta, 1)$, $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 2)$, $(\beta, 1, 3)$. Les premières courbes sont obtenues en imposant aux courbes du système $|2K_5 + K_3|$ d'osculer en O_1 une branche linéaire de courbe passant par $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$.

Les courbes $|K_{13}| = |2K_5 + K_3|$ ont en O_1 le même comportement que les courbes $C_0^{(5)}$ (n° 3) ; elles doivent de plus avoir en O_2, O_3 le même comportement qu'en O_1. On a, sur la surface Φ, pour les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ qui correspondent aux courbes $C_0^{(5)}$,

$$\Gamma \equiv \Gamma_0^{'(5)} + \sigma_\alpha + 3\rho_{11} + 4\rho_{21} + 3\rho_{22} + 2\rho_{12} + \sigma_\beta$$

et par conséquent on aura

$$\Gamma \equiv K'_{13} + \Sigma(\sigma_\alpha + 3\rho_{11} + 4\rho_{21} + 3\rho_{22} + 2\rho_{12} + \sigma_\beta). \quad \text{(VI)}$$

Le système $|\Gamma_0^{'(5)}|$ étant de dimension 26, le système $|K'_{13}|$ est de dimension $31 - 3 \times 5 = 16$. Le système $|K'_{13}|$ est de degré 32.

Rapportons projectivement les courbes K'_{13} aux hyperplans d'un espace linéaire S_{16} à 16 dimensions. Il correspond à Φ une surface Φ_{13}, 13-canonique. Sur cette surface, les courbes ρ'_{11}, ρ''_{11}, ρ'''_{11} sont des droites ne se rencontrant pas deux à deux, les courbes ρ'_{21}, ρ''_{21}, ρ'''_{21} sont des coniques ne se rencontrant pas deux à deux, mais ρ'_{11}, ρ'_{21} se rencontrent en un point, de même que ρ''_{11} et ρ''_{21}, ρ'''_{11} et ρ'''_{21}. A la courbe σ'_α correspond le domaine d'un point singulier de Φ_{13}, situé sur la droite ρ'_{11} mais distinct du point d'appui de cette droite sur ρ'_{21}. On a des résultats analogues pour σ''_α, σ'''_α. Désignons par A', A'', A''' les trois points singuliers ainsi obtenus.

A la courbe K'_1 correspond sur Φ_{13} une conique située dans le plan A'A''A'''.

Des relations fonctionnelles (I) et (VI), on déduit

$$K'_{13} \equiv 13K'_1 + 5\Sigma\sigma_\alpha + 2\Sigma\rho_{11}.$$

Il en résulte qu'il existe un hyperplan ayant un contact d'ordre 12 avec Φ_{13} le long de la conique K_1' et touchant encore la surface le long des droites ρ_{11}', ρ_{11}'', ρ_{11}'''.

L'existence du système irréductible $|K_{13}'|$ confirme le fait que la courbe K_1' n'est pas exceptionnelle.

On obtient encore les relations fonctionnelles

$$K_{13}' \equiv 4K_3' + K_1' + \Sigma\sigma_a + 2\Sigma\rho_{11},$$

$$K_{13}' \equiv K_5' + 2K_3' + 2K_1' + \Sigma\sigma_a + \Sigma\rho_{11},$$

etc.

La surface Φ a le genre $P_{13} = 17$.

Les courbes C_0 sont de genre 456, les courbes $C_0^{(5)}$ de genre 396, par conséquent les courbes K_{13} sont de genre 276. L'application de la formule de Zeuthen montre que les courbes K_{13}' sont de genre 18. D'autre part, le degré de $|K_{13}'|$ est 32.

Liège, le 10 septembre 1956.