Sur la structure des points de diramation d'une surface multiple, d'ordre 157

Lucien Godeaux

Résumé

On montre que la surface image d'une involution cyclique d'ordre 157, appartenant à une surface d'ordre 14, considérée par M. Hutcherson, possède trois points de diramation multiples d'ordre six pour la surface. On détermine complètement la structure de ces points.

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur la structure des points de diramation d'une surface multiple, d'ordre 157,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — On montre que la surface image d'une involution cyclique d'ordre 157, appartenant à une surface d'ordre 14, considérée par M. Hutcherson, possède trois points de diramation multiples d'ordre six pour la surface. On détermine complètement la structure de ces points.

Dans une note récente (1), M. Hutcherson a remarqué que la surface F,

$$a_1x_1^{13}x_2 + a_2x_2^{13}x_3 + a_3x_3^{13}x_1 + a_4x_4^{14} = 0$$

était transformée en soi par l'homographie H,

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 : \epsilon x_2 : \epsilon^{145}x_3 : \epsilon^{101}x_4 ,$$

où ϵ est une racine primitive d'ordre 157 de l'unité. Sur F, H engendre une involution I d'ordre 157 présentant trois points unis : $O_1(1, 0, 0, 0)$, $O_2(0, 1, 0, 0)$ et O_3 $(0, 0, 1, 0)$. Ces trois points ont même structure et celle-ci peut être déterminée par les méthodes que nous avons exposées dans nos travaux antérieurs (2) ; c'est ce que nous nous proposons de montrer dans cette note. En même temps, nous établirons que l'on peut prendre

(1) *Su alcune involuzioni cicliche totale di periodo non inferiore a 157* (LE MATEMATICHE, 1955, pp. 15-17).

(2) *Mémoire sur les surfaces multiples* (MÉMOIRES IN-8° DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1952) ; *Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples* (DEUXIÈME COLLOQUE DE GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE DU C. B. R. M., Liège, Thone et Paris, Masson, 1952).

comme image de l'involution I une surface normale Φ présentant trois points de diramation. Chacun de ceux-ci est multiple d'ordre six pour la surface Φ, le cône tangent se décomposant en un cône du second ordre, un cône rationnel du troisième ordre rencontrant le précédent suivant une génératrice et un plan contenant une génératrice du cône cubique.

Nous utiliserons les notations de nos travaux précédents sans les définir à nouveau.

1. Le plan tangent au point uni O_1 de l'involution I, à F, est $x_2 = 0$. Si nous posons $\eta = \epsilon^{145}$, H détermine dans ce plan l'homographie

$$x_1' : x_3' : x_4' = x_1 : \eta x_3 : \eta^{57} x_4 .$$

Les équations de cette homographie peuvent aussi s'écrire en posant $\zeta = \epsilon^{101}$,

$$x_1' : x_3' : x_4' = x_1 : \zeta^{146} x_3 : \zeta x_4 .$$

Les nombres qui déterminent la structure du point uni O_1 sont donc, d'après nos notations, $\alpha = 57$, $\beta = 146$.

Nous avons $157 = 2 \times 57 + 43 = 146 + 11$, donc $a = 2$, $b' = 1$. La solution λ, μ des congruences

$$\lambda + 57\mu \equiv 0, \quad \mu + 146\lambda \equiv 0, \quad (\text{mod. } 157) \quad (1)$$

telle que $\lambda + \mu$ soit minimum est $\lambda = 1$, $\mu = 11$.

Désignons par $|C|$ le système découpé sur F par les surfaces d'ordre 157. Ce système contient un système linéaire partiel $|C_0|$, dépourvu de points-base, appartenant à l'involution I. Soit Φ la surface normale, image de I_0 dont les sections hyperplanes Γ_0 correspondent aux courbes C_0. Aux points unis O_1, O_2, O_3 de I correspondent sur Φ des points de diramation isolés O_1', O_2', O_3'. Nous étudierons la structure du point O_1'.

Les courbes C_0', c'est-à-dire les courbes C_0 passant par O_1 ont en ce point la multiplicité 12 ; elles passent 11 fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, $(\alpha, 3)$, 8 fois par le point $(\alpha, 4)$, deux fois par les points $(\alpha, 5)$, ..., $(\alpha, 56)$, trois fois par les points $(\alpha, 4, 1)$, $(\alpha, 4, 1, 1)$, enfin une fois par les points $(\beta, 1)$ $(\beta, 2)$ ..., $(\beta, 145)$.

Appelons Φ_1 la projection de Φ à partir de O_1' sur un hyperplan de l'espace ambiant, surface dont les sections hyperplanes Γ_0' correspondent aux courbes C_0'. Aux domaines des points $(\alpha, 56)$, $(\alpha, 4, 1, 1)$, $(\beta, 145)$ correspondent respectivement sur Φ_1 une conique σ_α, une cubique gauche τ_α rencontrant σ_α en un point, une droite σ_β rencontrant τ_α en un point mais ne rencontrant pas σ_α.

Le point O_1' est donc multiple d'ordre six pour Φ, le cône tangent en ce point étant formé des cônes projetant σ_α, τ_α, σ_β du point O_1'.

2. Les congruences (1) admettent les solutions

$$\lambda = i, \quad \mu = 11i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 13).$$

Les courbes $C_0^{(*)}$ qui correspondent à la solution $\lambda = i, \mu = 11i$ passent $12i$ fois par O_1, i fois par les points $(\beta, 1), (\beta, 2), \ldots, (\beta, x)$, y fois par le point $(\beta, x+1)$ et on doit avoir

$$12i + ix + y = 157.$$

En procédant suivant la méthode habituelle, on obtiendra ainsi un point uni $(\beta, x+1, \ldots)$ du domaine de $(\beta, x+1)$. A ce point uni correspondra sur Φ une courbe rationnelle infiniment petite que nous désignerons par ρ_{i-1}. On pourra constater que les différentes courbes ρ_i sont des droites. D'une manière précise, ρ_1 correspond au domaine du point $(\beta, 67, 1)$, ρ_2 à celui du point $(\beta, 41, 2)$, ρ_3 à $(\beta, 28, 3)$, ρ_4 à $(\beta, 20, 2, 1)$, ρ_5 à $(\beta, 15, 5)$, ρ_6 à $(\beta, 11, 2, 2)$, ρ_7 à $(\beta, 9, 1, 1, 1, 1)$, ρ_8 à $(\beta, 6, 2, 3)$, ρ_9 à $(\beta, 4, 1, 2, 2)$, ρ_{10} à $(\beta, 3, 3, 1, 1)$, ρ_{11} à $(\beta, 2, 11)$, enfin ρ_{12} à $(\beta, 1, 12)$.

Les courbes C_0'' passent 23 fois par O_1, 8 fois par $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, $(\alpha, 3)$, 6 fois par $(\alpha, 4)$, deux fois par $(\alpha, 5), \ldots, (\alpha, 56)$, deux fois par $(\alpha, 4, 1)$, $(\alpha, 4, 1, 1)$, 3 fois par $(\beta, 1)$, deux fois par $(\beta, 2), \ldots, (\beta, 66)$, une fois par $(\beta, 67)$ et $(\beta, 67, 1)$, une fois par $(\beta, 1, 1), \ldots, (\beta, 1, 12)$.

Si Φ_2 est la projection de Φ_1 à partir du point commun à τ_α, σ_β, on a sur cette surface une conique σ_α, une conique τ_α, une droite ρ_{12} correspondant au domaine de $(\beta, 1, 12)$ et une droite ρ_1 correspondant au domaine de $(\beta, 67, 1)$.

Les courbes C_0''' passent 24 fois par O_1, deux fois par $(\beta, 1), \dots,$ $(\beta, 66)$, une fois par $(\beta, 67)$, $(\beta, 67, 1)$. On est donc conduit à écrire

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_\alpha + \tau_\alpha + \rho_{12} + \rho_{11} + \dots + \rho_2 + \rho_1 + \sigma_\beta,$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0'' + \sigma_\alpha + \tau_\alpha + 2(\rho_{12} + \dots + \rho_1) + \sigma_\beta.$$

Les courbes σ_α, τ_α ont respectivement les degrés virtuels -3, -5 ; les autres ont le degré virtuel -2.

3. Les courbes $\rho_2, \rho_3, \dots, \rho_{11}$ s'introduiront successivement une par une dans les systèmes $|\Gamma_0^{(4)}|$, $|\Gamma_0^{(5)}|$, ... Nous négligerons les systèmes qui n'introduisent que des courbes exceptionnelles et nous indiquerons les autres par $|\overline{\Gamma}|$ affecté d'un indice. De plus, nous supprimerons l'indice 0 dans Γ_0, aucune confusion n'étant possible.

On aura ainsi

$$\Gamma \equiv \overline{\Gamma}_3 + \sigma_\alpha + \tau_\alpha + 3(\rho_{12} + \rho_{11} + \dots + \rho_2) + 2\rho_1 + \sigma_\beta.$$

Les courbes $\overline{\Gamma}_3$ rencontrent σ_α en deux points, τ_α en un point, ρ_{12} en deux points, ρ_2 en un point et ne rencontrent pas les autres.

$$\Gamma \equiv \overline{\Gamma}_4 + \sigma_\alpha + \tau_\alpha + 4(\rho_{12} + \rho_{11} + \dots + \rho_3) + 3\rho_2 + 2\rho_1 + \sigma_\beta.$$

Les courbes $\overline{\Gamma}_4$ rencontrent σ_α en deux points, ρ_{12} en trois points, ρ_3 en un point et ne rencontrent pas les autres composantes.

$$\Gamma \equiv \overline{\Gamma}_5 + \sigma_\alpha + 2\tau_\alpha + 4(\rho_{12} + \rho_{11} + \dots + \rho_3) + 3\rho_2 + 2\rho_1 + \sigma_\beta.$$

Les courbes $\overline{\Gamma}_5$ rencontrent σ_α en un point, τ_α en cinq points, ρ_{12} en deux points, ρ_3 en un point et ne rencontrent pas les autres courbes.

$$\Gamma \equiv \overline{\Gamma}_6 + \sigma_\alpha + 2\tau_\alpha + 5(\rho_{12} + \rho_{11} + \dots + \rho_4) + 4\rho_3 + 3\rho_2 + 2\rho_1 + \sigma_\beta.$$

Les courbes $\overline{\Gamma}_6$ rencontrent σ_α en un point, τ_α en quatre points, ρ_{12} en trois points, ρ_4 en un point et ne rencontrent pas les autres.

$$\Gamma \equiv \overline{\Gamma}_7 + \sigma_\alpha + 2\tau_\alpha + 6(\rho_{12} + \rho_{11} + \dots + \rho_5) + 5\rho_4 + 4\rho_3 + 3\rho_2 + 2\rho_1 + \sigma_\beta.$$

Les courbes $\overline{\Gamma}_7$ rencontrent σ_α en un point, τ_α en trois points, ρ_{12} en quatre points, ρ_5 en un point et ne rencontrent pas les autres courbes.

$$\Gamma \equiv \overline{\Gamma}_8+\sigma_\alpha+2\tau_\alpha+7(\rho_{12}+\ldots+\rho_6)+6\rho_5+5\rho_4+4\rho_3+3\rho_2+2\rho_1+\sigma_\beta.$$

Les courbes $\overline{\Gamma}_8$ rencontrent σ_α en un point, τ_α en deux points, ρ_{12} en cinq points, ρ_6 en un point et ne rencontrent pas les autres courbes.

$$\Gamma \equiv \overline{\Gamma}_9+\sigma_\alpha + 2\tau_\alpha + 8(\rho_{12} + \ldots + \rho_7) + 7\rho_6+6\rho_5+\ldots+2\rho_1+\sigma_\beta.$$

Les courbes $\overline{\Gamma}_9$ rencontrent σ_α en un point, τ_α en un point, ρ_{12} en six points, ρ_7 en un point et ne rencontrent pas les autres.

$$\Gamma \equiv \overline{\Gamma}_{10}+\sigma_\alpha+2\tau_\alpha+9(\rho_{12}+\ldots+\rho_8)+8\rho_7+7\rho_6+\ldots+2\rho_1+\sigma_\beta.$$

Les courbes $\overline{\Gamma}_{10}$ rencontrent σ_α en un point, ρ_{12} en sept points, ρ_8 en un point et ne rencontrent pas les autres courbes.

$$\Gamma \equiv \overline{\Gamma}_{11} + \sigma_\alpha + 3\tau_\alpha + 9(\rho_{12} + \ldots + \rho_8) + 8\rho_7 \ldots + \sigma_\beta.$$

Les courbes $\overline{\Gamma}_{11}$ ne rencontrent plus σ_α ; elles rencontrent τ_α en cinq points, ρ_{12} en six points, ρ_8 en un point et ne rencontrent pas les autres.

$$\Gamma \equiv \overline{\Gamma}_{12} + \sigma_\alpha + 3\tau_\alpha + 10(\rho_{12} + \ldots + \rho_9) + 9\rho_8 + 8\rho_7 + \ldots + \sigma_\beta.$$

Les courbes $\overline{\Gamma}_{12}$ rencontrent τ_α en quatre points, ρ_{12} en sept points, ρ_9 en un point et ne rencontrent pas les autres.

$$\Gamma \equiv \overline{\Gamma}_{13} + \sigma_\alpha + 3\tau_\alpha + 11(\rho_{12} + \rho_{11} + \rho_{10}) + 10\rho_9 + \ldots + \sigma_\beta.$$

Les courbes $\overline{\Gamma}_{13}$ rencontrent τ_α en trois points, ρ_{12} en huit points, ρ_{10} en un point et ne rencontrent pas les autres courbes.

$$\Gamma \equiv \overline{\Gamma}_{14} + \sigma_\alpha + 3\tau_\alpha + 12(\rho_{12} + \rho_{11}) + 11\rho_{10} + 10\rho_9 + \ldots + \sigma_\beta.$$

Les courbes $\overline{\Gamma}_{14}$ rencontrent τ_α en deux points, ρ_{12} en neuf points et ρ_{11} en un point; elles ne rencontrent pas les autres courbes.

$$\Gamma \equiv \overline{\Gamma}_{15} + \sigma_\alpha + 3\tau_\alpha + 13\rho_{12} + 12\rho_{11} + 11\rho_{10} + \ldots + \sigma_\beta .$$

Les courbes $\overline{\Gamma}_{15}$ rencontrent τ_α en un point, ρ_{12} en dix points et ne rencontrent pas les autres courbes.

Appelons $\overline{\Phi}_{15}$ la surface, projection de Φ, dont les sections hyperplanes sont les courbes $\overline{\Gamma}_{15}$. Sur cette surface sont tracées une droite τ_α et une courbe rationnelle du dixième ordre ρ_{12}, rencontrant τ_α en un point A. On considèrera les sections de $\overline{\Phi}_{15}$ faites par les hyperplans passant par A, touchant ρ_{12} en A, osculant ρ_{12} en A, ..., ayant un contact du huitième ordre avec ρ_{12} en A. A ce dernier système correspondra sur F le système $|C_0^{(78)}|$ dont les courbes ont la multiplicité 156 en O_1, passent simplement par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 1, 1)$, ..., $(\alpha, 1, 142)$ et par les points $(\beta, 1)$, $(\beta, 1, 1)$, ..., $(\beta, 1, 12)$.

Les points $(\alpha, 1, 1, 1, 2, 2)$, $(\alpha, 1, 3, 2, 3)$, $(\alpha, 1, 5, 1, 1, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 8, 2, 2)$, $(\alpha, 1, 12, 5)$, $(\alpha, 1, 17, 3, 1)$, ..., $(\alpha, 1, 142)$ sont unis de première espèce par l'involution I et donnent naissance sur Φ à des courbes exceptionnelles.

Le point $(\alpha, 1)$ se trouve sur la droite O_1O_3.

4. De ce qui précède, on conclut qu'en un point de diramation de Φ, sextuple pour cette surface, le cône tangent dégénère en un cône quadratique (σ_α), un cône cubique rationnel (τ_α) et un plan (σ_β).

Au point de diramation sont infiniment voisins successifs six points doubles biplanaires dont le premier est situé sur la droite commune au cône (τ_α) et au plan (τ_β).

Liège, le 6 avril 1956.