Bulletin de la Classe des sciences

Surfaces dont le système canonique contient quatre composantes fixes

Lucien Godeaux

Résumé
Construction d'une surface algébrique dont le système bicanonique est irréductible et dont le système canonique contient quatre composantes fixes.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Surfaces dont le système canonique contient quatre composantes fixes.

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Construction d'une surface algébrique dont le système bicanonique est irréductible et dont le système canonique contient quatre composantes fixes.

Dans quelques notes récentes (1), nous avons construit des surfaces algébriques dont le système canonique est formé de courbes fixes non exceptionnelles et d'une partie variable composée au moyen d'un faisceau de courbes elliptiques, le système bicanonique étant irréductible. Ces surfaces représentaient des involutions cycliques, ayant trois points unis et d'ordre premier, appartenant à une surface algébrique ayant une équation de la forme

$$a_1x_1^{\nu}x_2 + a_2x_2^{\nu}x_3 + a_3x_3^{\nu}x_4 + a_4x_4^{\nu+1} = 0.$$

Dans cette note, nous considérons une surface obtenue par le même procédé et dont les systèmes canonique et bicanonique possèdent des propriétés analogues. La surfaces d'où nous partons a l'équation précédente où ν est de la forme $3t + 2$, l'involution considérée sur cette surface ayant l'ordre $p = 3t^2 + 3t + 1$.

(1) *Sur quelques surfaces algébriques représentant des involutions cycliques* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1951, pp. 819-825, 826-835, 938-949, 1106-1119), *Construction d'une surface dont le système canonique possède des composantes fixes* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1953, pp. 49-56).

1. Considérons la surface F d'équation

$$a_1x_1^{3\nu+2}x_2 + a_2x_2^{3\nu+2}x_3 + a_3x_3^{3\nu+3}x_1 + a_4x_4^{3\nu+3} + \sum_{i=1}^{\nu+1} a_{4+i}(x_1x_2x_3)^i\, x_4^{3(\nu-\ +1)} = 0,$$

où ν est un entier tel que $p = 3\nu^2 + 3\nu + 1$ soit premier. Cette surface, d'ordre $3\nu + 3$, est dépourvue de points multiples et est transformée en soi par l'homographie

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2\epsilon & x_3\epsilon^{3\nu^2} & x_4\epsilon^{3\nu^2+2\nu+1} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

où ϵ est une racine primitive d'ordre p de l'unité.

L'homographie T engendre sur F une involution I d'ordre p possédant trois points unis $O_1(1, 0, 0,0)$, $O_2(0, 1, 0, 0)$, $O_3(0, 0, 1, 0)$. Nous désignerons par Φ une surface normale, image de cette involution, sur laquelle les points de diramation O_1', O_2', O_3', homologues de O_1, O_2, O_3., sont isolés.

Au point O_1, la surface F a comme plan tangent $x_2 = 0$ et dans ce plan, T détermine une homographie que l'on peut représenter par

$$\mathrm{T}^1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2\eta & x_3\eta^{\nu+1} \\ x_1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

en posant $\eta = \epsilon^{3\nu^2}$, ou, par

$$\mathrm{T}^1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_3\zeta^{3\nu^2+1} & x_4\zeta \\ x_1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

en posant $\zeta = \epsilon^{3\nu^2+2\nu+1}$

Par conséquent, suivant notre terminologie (¹), au point uni O_1 de I sont attachés les nombres $\alpha = \nu + 1$.. $\beta = 3\nu^2 + 1$. En

(¹) *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités scient., nº 270, Paris, Hermann, 1935) ; *Mémoire sur les surfaces multiples* (MÉMOIRES IN-8º DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1953) ; *Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples;* Deuxième Colloque de Géométrie algébrique tenu à Liège en 1952 (Liège, Thone et Paris, Masson, 1952, pp. 225-241). Voir également une série de notes parues depuis 1954 dans le BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

appliquant la théorie développée dans les travaux qui viennent d'être cités, on voit qu'au point O_1 sont infiniment voisins d'une part ν points unis de seconde espèce sauf le dernier qui est de première espèce, le premier se trouvant sur la droite O_1O_3, d'autre part $3\nu^2$ points unis de seconde espèce sauf le dernier qui est de première espèce, le premier étant sur la droite O_1O_4. Aux sections de Φ par les hyperplans passant par O'_1 correspondent sur F des courbes ayant la multiplicité $3\nu+1$ en O_1, la multiplicité 3ν aux points de la première suite et passant simplement par les points de la seconde suite.

On en conclut que le point O'_1 est multiple d'ordre $3\nu+1$ pour Φ et que ce point est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle γ_1, d'ordre 3ν, à une droite et éventuellement à une seconde droite. La courbe γ_1 a le degré virtuel $-(3\nu+1)$, les droites ont le degré virtuel -2.

On établit de même que les points O'_2, O'_3 sont multiples d'ordre $3\nu+1$ pour Φ. Dans le domaine de O'_2 se trouve une courbe rationnelle γ_2 de degré virtuel $-(3\nu+1)$ et dans le domaine de O'_3, une courbe rationnelle γ_3 de degré virtuel $-(3\nu+1)$.

2. Désignons par L′ une courbe canonique de Φ. On sait que cette courbe rencontre une courbe de degré virtuel $-m$ en $m-2$ points, par conséquent la courbe L′ rencontre en $3\nu-1$ points chacune des courbes γ_1, γ_2, γ_3. A la courbe L′ correspond sur F une courbe canonique L passant $3\nu-1$ fois par les points O_1, O_2, O_3 et le même nombre de fois par ν points infiniment voisins successifs de chacun de ces points, unis pour l'involution I et rencontrés plus haut.

Les courbes L sont découpées sur F par des surfaces d'ordre $3\nu-1$ (adjointes à F) formant un système linéaire appartenant à l'involution engendrée dans S_3 par l'homographie T. Parmi ces surfaces se trouve la surface $x_4^{3\nu-1}=0$. On en conclut que le système linéaire en question a pour équation

$$x_4^2 \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i (x_1x_2x_3)^{\nu-i} x_4^{3(i-1)} = 0. \qquad (1)$$

Le genre géométrique de Φ est donc $p_g=\nu$.

La partie variable du système (1) est composée au moyen du faisceau de surfaces

$$x_1x_2x_3 + \lambda x_4^3 = 0.$$

Désignons par K les courbes découpées sur F par les surfaces de ce faisceau.

3. Pour déterminer le genre des courbes K, posons $\lambda = -1$ et représentons la surface cubique ainsi obtenue sur un plan en posant

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1^2y_2 : y_2^2y_3 : y_3^2y_1 : y_1y_2y_3.$$

A la courbe découpée par F sur cette surface correspond dans le plan la courbe

$$a_1y_1^{6\nu+3}y_2^{3\nu+3} + a_2y_2^{6\nu+3}y_3^{3\nu+3} + a_3y_3^{6\nu+3}y_1^{3\nu+3}$$
$$+ (y_1y_2y_3)^{3\nu+2}\sum_{i=0}^{\nu+1} a_{4+i} = 0.$$

Sur cette courbe, le point O_1 par exemple est l'origine d'une branche superlinéaire. Le point est multiple d'ordre $3\nu + 3$, il lui est infiniment voisin un point multiple d'ordre 3ν et à celui-ci font suite ν points triples. La courbe possède la même singularité en O_2, O_3 et par conséquent, les courbes K sont de genre

$$\frac{1}{2}\cdot 27\nu(\nu + 1) + 1.$$

Une courbe K est transformée en soi par T et il lui correspond sur Φ une courbe K'. Par la formule de Zeuthen, on en conclut que les courbes K' sont elliptiques.

La partie variable du système canonique $|L'|$ de Φ se compose de $\nu - 1$ courbes du faisceau $|K'|$ de courbes elliptiques.

4. Les courbes bicanoniques 2L' de Φ ont pour transformées sur F les courbes découpées sur cette surface par un système linéaire de surfaces appartenant à l'involution engendrée par l'homographie T dans S_3. Ces surfaces sont d'ordre $6\nu - 2$, ne peuvent contenir F comme partie et l'une d'entre elle est $x_4^{6\nu-2}=0$. Si l'on applique T à l'équation d'une de ces surfaces, elle se reproduit multipliée par $\varepsilon^{8\nu+2}$.

On trouve, parmi ces surfaces,

$$(x_1x_2x_3)^{\nu-1}(\mu_1x_1^{2\nu+1}x_3^\nu + \mu_2x_2^{2\nu+1}x_1^\nu + \mu_3x_3^{2\nu+1}x_2^\nu) = 0.$$

L'équation du système de surfaces cherché est donc

$$x_4^4 \sum_{i=-1}^{2\nu-2} \lambda_i(x_1x_2x_3)^{2\nu-2-i}x_4^{3i} + (x_1x_2x_3)^{\nu-1}(\mu_1x_1^{2\nu+1}x_3^\nu + \mu_2x_2^{2\nu+1}x_1^\nu + \mu_3x_3^{2\ +1}x_2^\nu) = 0.$$

Ces surfaces découpent, sur F, le système transformé du système bicanonique de Φ. On en conclut que ce dernier système est irréductible.

Désignons par K_0 la courbe découpée sur F par le plan $x_4 = 0$ et par K_0' la courbe qui lui correspond sur Φ. En appliquant la formule de Zeuthen, on voit que la courbe K_0' est elliptique.

On voit donc que le système canonique de Φ a comme composantes fixes les courbes rationnelles $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ de degré virtuel $-(\nu + 1)$ et la courbe elliptique K_0 comptée deux fois.

Le bigenre de la surface Φ est $P_2 = 2\nu + 3$.

5. On peut voir sans difficulté que la surface F contient bien une suite de ν points unis infiniment voisins successifs de O_1 dont le premier appartient à O_1O_3 et dont le dernier est uni de première espèce.

La transformation

$$\theta = \begin{pmatrix} y_1^2 & y_2y_3 & y_1y_3 & y_3y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

fait correspondre au point infiniment voisin de O_1 sur O_1O_3 le $y_1 = 1$, $y_2 = y_3 = y_4 = 0$.

Effectuons ν fois la transformation θ sur F, c'est-à-dire la transformation

$$\theta^\nu = \begin{pmatrix} y_1^{\nu+1} & y_2y_3^\nu & y_1^\nu y_3 & y_3^\nu y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

dont l'inverse est

$$\theta^{-\nu} = \begin{pmatrix} x_1 x_3^\nu & x_2 x_3^\nu & x_3^{\nu+1} & x_1^\nu x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}.$$

A la surface F correspond la surface

$$a_1 y_1^{3\nu^2+5\nu+2} y_2 + a_2 y_1^\nu y_2^{3\nu+2} y_3^{3\nu^2+\nu+1} + a_3 y_1^{3\nu^2+3\nu+1} y_3^{2\nu+2}$$
$$+ \sum_{i=0}^{\nu+1} a_{4+i} (y_1^{2\nu+1} y_2 y_3^\nu)^i y_3^{3\nu^2-3\nu i+2\nu} y_4^{3(\nu-i+1)} = 0.$$

A l'homographie T correspond l'homographie

$$\mathrm{T}' = \begin{pmatrix} 2^{2\nu} y_1 & y_2 & \epsilon^{3\nu^2+2\nu} y_3 & \epsilon^{3\nu^2+2\nu} y_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}.$$

Le plan tangent à la surface au point O_1' $(1, 0, 0, 0)$ est le plan $y_2 = 0$ et dans ce plan, T′ donne bien une homologie de centre O_1', ce qu'il fallait établir.

6. Examinons en particulier le cas $\nu = 1$. F est alors la surface du sixième ordre

$$a_1 x_1^5 x_2 + a_2 x_2^5 x_3 + a_3 x_3^5 x_1 + a_4 x_4^6 + a_5 x_1 x_2 x_3 x_4^3 + a_6 (x_1 x_2 x_3)^2 = 0.$$

et on a

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} x_1 & \epsilon x_2 & \epsilon^3 x_3 & \epsilon^6 x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

$p = 7$.

La surface Φ contient une seule courbe canonique dont la transformée sur F est donnée par $x_4^2 = 0$.

Le transformé du système bicanonique de Φ est découpé sur F par le système linéaire

$$\lambda_1 x_1^3 x_3 + \lambda_2 x_2^3 x_1 + \lambda_3 x_3^3 x_2 + \lambda_4 x_4^4 + \lambda_5 x_1 x_2 x_3 x_4 = 0.$$

En rapportant projectivement ces surfaces aux hyperplans d'un espace S_4, on obtient un modèle projectif bicanonique de la surface Φ.

Posons

$$\frac{X_1}{x_1^3 x_3} = \frac{X_2}{x_2^3 x_1} = \frac{X_3}{x_3^3 x_2} = \frac{X_4}{x_4^4} = \frac{X_0}{x_1 x_2 x_3 x_4}\,.$$

Les équations de Φ sont

$$X_1X_2X_3X_4 = X_0^4.$$

$$a_1X_1^2X_2 + a_2X_2^2X_3 + a_3X_3^2X_1 + a_4X_4^3 + a_5X_0^3 + a_6X_1X_2X_3 = 0.$$

On a $P_2 = 5$.

Liège, le 20 juin 1956.