Bulletin de la Classe des sciences

Remarques sur la formation des systèmes canonique et pluricanoniques de quelques surfaces algébriques (première note)

Lucien Godeaux

Résumé
Étude de la formation des systèmes canonique, bicanonique, tricanonique et 4-canonique d'une surface image d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique. Étude du rôle des composantes des points de diramation dans cette formation.

Citer ce document / Cite this document :

Godeaux Lucien. Remarques sur la formation des systèmes canonique et pluricanoniques de quelques surfaces algébriques (première note). In: Bulletin de la Classe des sciences, tome 42, 1956. pp. 1002-1011;

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1956.68479;

https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1956_num_42_1_68479;

Fichier pdf généré le 22/06/2023

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Remarques sur la formation des systèmes canonique et pluricanoniques de quelques surfaces algébriques,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(Première note).

Résumé. — Étude de la formation des systèmes canonique, bicanonique, tricanonique et 4-canonique d'une surface image d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique. Étude du rôle des composantes des points de diramation dans cette formation.

Nos recherches sur les involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique (1) nous ont conduit à l'étude des surfaces images de ces involutions et particulièrement à l'étude des systèmes canonique et pluricanoniques de ces surfaces. Les points de diramation d'une surface Φ image d'une involution sont équivalents à des ensembles de courbes rationnelles de degrés virtuels négatifs. Celles de ces courbes dont le degré virtuel est inférieur à -2 jouent un rôle dans la formation du système canonique et des systèmes pluricanoniques de la surface Φ. C'est ce rôle que nous nous proposons d'examiner ici dans le cas de surfaces possédant trois points de diramation et que nous avons rencontrées

(1) *Mémoire sur les surfaces multiples* (Mémoires in-8° de l'Acad. roy. de Belgique, 1953) ; *Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples* (Deuxième Colloque de Géométrie algébrique tenu à Liège en 1953 ; Liège, Thone et Paris, Masson, 1952).

dans des publications antérieures [1] sans nous arrêter cependant sur le problème examiné ici. Nous rencontrerons, dans les notes ultérieures, des surfaces qui contiennent des courbes rationnelles de degré virtuel — 1, sans que ces courbes soient exceptionnelles.

1. Considérons la surface algébrique F d'équation

$$a_1x_1^5x_2 + a_2x_2^5x_3 + a_3x_3^5x_1 + a_4x_4^6 + a_5x_1x_2x_3x_4^3 + a_6(x_1x_2x_3)^2 = 0.$$

Elle est transformée en soi par l'homographie

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} x_1 & \epsilon\, x_2 & \epsilon^3 x_3 & \epsilon^6 x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

de période sept, ϵ étant une racine primitive d'ordre sept de l'unité.

Sur F, H engendre une involution I d'ordre sept, présentant trois points unis $O_1(1, 0, 0, 0)$, O_2, O_3.

Commençons par construire un modèle projectif de la surface Φ image de l'involution.

Aux groupes de I dont un point appartient à une section plane D de F, correspond sur Φ une courbe Γ de genre dix. Il existe 18 groupes de I ayant deux de leurs points sur D et à ces groupes correspondent des points doubles de Γ. La courbe Γ engendrant un système continu rationnel et étant de genre virtuel 28, appartient totalement à un système linéaire complet $|\Gamma|$, de degré 42 et de genre 28. Aux courbes Γ correspondent sur F les courbes C, d'ordre 42, découpées par les surfaces d'ordre sept, transformées en elles-mêmes par H, ne passant pas par les points unis de H et ne contenant pas F comme partie. Il est facile de voir que ce système a la dimension 16. En rapportant projectivement les courbes Γ aux hyperplans d'un espace S_{16}, on obtient un modèle projectif de Φ, d'ordre 42.

(1) *Sur quelques surfaces algébriques représentant des involutions cycliques* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1951, pp. 819-825, 826-835, 938-949, 1106-1119) ; *Construction d'une surface dont le système canonique possède des composantes fixes* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1953, pp. 49-56) ; *Surfaces dont le système canonique contient quatre composantes fixes* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1956, pp. 761-770) ; *Sur une surface du cinquième ordre possédant une droite double tacnodale* (Ibid., 1956, pp. 584-905).

Nous désignerons par O'_1, O'_2, O'_3 les points de diramation correspondant respectivement aux points unis O_1, O_2, O_3.

2. A cause de la symétrie de l'équation de F, les points O_1, O_2, O_3 ont même structure et il suffira d'étudier l'un d'eux, O_1.

En utilisant les méthodes indiquées dans nos travaux cités plus haut, on voit que O_1 est caractérisé par les nombres $\alpha = 2, \beta = 4$.

Il existe un point $(\alpha, 1)$, infiniment voisin de O_1 sur la droite O_1O_3, uni de première espèce pour I, et une suite de trois points infiniment voisins successifs $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, $(\beta, 3)$ unis pour I, les deux premiers de seconde espèce, le dernier de première espèce. Le point $(\beta, 1)$ appartient à la droite O_1O_4. Les points $(\beta, 1, 1, 1)$ et $(\beta, 1, 4)$ sont également unis de première espèce.

Les courbes C passant par O_1 ont en ce point la multiplicité quatre et passent trois fois par $(\alpha, 1)$ et une fois par $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, $(\beta, 3)$.

Les courbes précédentes, assujetties à avoir en O_1 une tangente distincte de O_1O_3, O_1O_4, ont en O_1 la multiplicité cinq, passant deux fois par $(\alpha, 1)$, deux fois par $(\beta, 1)$, une fois par $(\beta, 1, 1)$ et $(\beta, 1, 1, 1)$.

Les courbes précédentes, assujetties à toucher en O_1 une droite distincte de O_1O_3, O_1O_4, ont la multiplicité six en O_1 et passent une fois par $(\alpha, 1)$, une fois par les points $(\beta, 1)$, $(\beta, 1, 1)$, ..., $(\beta, 1, 4)$.

Au domaine du point $(\alpha, 1)$ correspond sur la surface Φ une courbe rationnelle σ_α, infinitésimale, de degré virtuel — 4. Au domaine du point $(\beta, 3)$ correspond une courbe rationnelle infinitésimale de degré virtuel — 2. Nous désignerons cette courbe par σ_β.

Le point O'_1 est quadruple pour la surface Φ. Si nous projetons celle-ci de O_1 sur un hyperplan de S_{16}, nous obtenons une surface Φ' d'ordre 38, sur laquelle au domaine de $(\alpha, 1)$ correspond sur Φ' une cubique gauche σ_α et au domaine de $(\beta, 3)$, une droite σ_β rencontrant σ_α en un point .

Aux domaines des points $(\beta, 1, 1, 1)$ et $(\beta, 1, 4)$ correspondent sur Φ des courbes exceptionnelles. Précisément, au domaine de $(\beta, 1, 1, 1)$ correspond sur Φ' le domaine du point commun à σ_α, σ_β, qui est simple pour cette surface.

On obtient des résultats analogues pour O_2, O_3.

Nous désignerons par σ'_α, σ'_β les courbes qui correspondent à O_1, σ''_α et σ''_β celles qui correspondent à O_2 et enfin par σ'''_α, σ'''_β celles qui correspondent à O_3.

Si l'on projette Φ des points O'_1, O''_2, O'''_3 sur un espace S_{13}, on obtient une surface Φ_1, d'ordre 30, sur laquelle σ'_α, σ''_α, σ'''_α sont des cubiques gauches et σ'_β, σ''_β, σ'''_β des droites.

Les sections hyperplanes Γ' de Φ_1 sont données par

$$\Gamma \equiv \Gamma' + \sigma'_\alpha + \sigma''_\alpha + \sigma'''_\alpha + \sigma'_\beta + \sigma''_\beta + \sigma'''_\beta.$$

ce que nous écrirons

$$\Gamma \equiv \Gamma' + \Sigma\sigma_\alpha + \Sigma\sigma_\beta.$$

3. Nous aurons à utiliser, dans la suite, les transformations quadratiques

$$T_1 = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_2x_3 & x_1x_3 & x_3x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_2x_4 & x_3x_4 & x_1x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

La première fait correspondre au point $(\alpha, 1)$ le point O_1 $(1, 0, 0, 0)$ du nouvel espace et la seconde, au point $(\beta, 1)$, le point O_1.

On a

$$T_1^{-1} = \begin{pmatrix} x_1x_3 & x_1x_2 & x_3^2 & x_1x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

$$T_2^{-1} = \begin{pmatrix} x_1x_4 & x_2x_1 & x_3x_1 & x_4^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Appliquons la transformation T_1 à F ; mais obtenons la surface

$$a_1x_1^{10}x_2 + a_2x_1x_5^2x_3^5 + a_3x_1^7x_3^4 + a_4x_3^5x_4^6 + a_5x_1^3x_2x_3^4x_4^3 + a_6x_1^6x_2^2x_3^3 = 0.$$

A l'homographie H correspond l'homographie

$$\begin{pmatrix} x_1 & \epsilon^5x_2 & \epsilon^3x_3 & \epsilon^3x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

qui détermine, dans le plan tangent $x_2 = 0$ au point O_1 à la surface précédente, une homologie de centre O_1. Le point $(\alpha, 1)$ est donc bien uni de première espèce pour l'involution I.

Si nous appliquons trois fois de suite la transformation T_2 à la surface F, nous obtenons

$$a_1x_1^{20}x_2 + a_2x_2^5x_3x_4^{15} + a_3x_1^4x_3^5x_4^{12} + a_4x_4^{18}x_4^3 + a_5x_1^{13}x_2x_3x_4^6 + a_6x_1^8x_2^2x_3^2x_4^9 = 0.$$

A l'homographie H correspond l'homographie

$$\begin{pmatrix} x_1 & \epsilon^4x_2 & \epsilon^6x_3 & \epsilon^6x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Au point $(\beta, 3)$ correspond le point O_1 du nouvel espace. Dans le plan tangent $x_2 = 0$ en ce point à la transformée de F, la transformée de H détermine une homologie de centre O_1. Le point $(\beta, 3)$ est donc bien uni de première espèce.

4. Une courbe canonique de Φ, si elle existe, doit rencontrer en deux points chacune des courbes σ'_α, σ''_α, σ'''_α. Il lui correspond sur F une courbe canonique de cette surface qui doit passer deux fois par les points tels que $(\alpha, 1)$ et par suite deux fois par O_1, O_2, O_3.

Les courbes canoniques de F sont découpées par les quadriques et il existe une seule quadrique répondant aux conditions précédentes, c'est la quadrique $x_4^2 = 0$.

Appelons K_1 la section de F par le plan $x_4 = 0$ et K'_1 la courbe qui lui correspond sur Φ. La courbe K'_1 est d'ordre six et d'autre part elliptique, comme le montre l'application de la formule de Zeuthen. On a

$$\Gamma \equiv 7K'_1 + \lambda\Sigma\sigma_\alpha + \mu\Sigma\sigma_\beta,$$

λ et μ étant des entiers. Exprimons que σ_α rencontre K'_1 en un point et que σ_β ne rencontre pas cette courbe. On a

$$\lambda = 2\mu, \qquad 7 - 4\lambda + \mu = 0,$$

d'où $\mu = 1$, $\lambda = 2$. On a donc

$$\Gamma \equiv 7K'_1 + 2\Sigma\sigma_\alpha + \Sigma\sigma_\beta. \tag{I}$$

On déduit de cette relation que la courbe K'_1 a le degré virtuel zéro.

De la relation précédente, on déduit

$$\Gamma' = 7K'_1 + \Sigma\sigma_a \tag{I'}$$

Sur Φ, il existe un hyperplan ayant un contact du sixième ordre avec la surface le long de K'_1.

Sur Φ_1, il existe un hyperplan ayant un contact du sixième ordre avec la surface et contenant les cubiques gauches σ'_a, σ''_a, σ'''_a. Sur cette surface, K'_1 est une cubique plane.

5. Aux courbes bicanoniques de Φ correspondent sur F des courbes bicanoniques de cette surface découpées par un système linéaire de surfaces du quatrième ordre dont l'équation se reproduit lorsque l'on applique H. Ce système comprend la surface $x_4^4 = 0$ et par conséquent l'équation se reproduit multipliée par ϵ^3 lorsque l'on applique H.

Ce système a pour équation

$$\lambda_1 x_1^3 x_3 + \lambda_2 x_2^3 x_1 + \lambda_3 x_3^3 x_2 + \lambda_4 x_4^4 + \lambda_5 x_1 x_2 x_3 x_4 = 0. \tag{1}$$

Examinons le comportement de ces surfaces au point O_1 et appelons K_4 les courbes qu'elles découpent sur F.

Les courbes K_4 ne peuvent passer par le point $(\alpha, 1)$, situé sur la droite $x_2 = x_4 = 0$, mais passent simplement par le point $(\beta, 1)$, situé sur la droite $x_2 = x_3 = 0$. En effectuant trois fois de suite la transformation T_2, il correspond à la surface (1) la surface

$$x_1^{12}(\lambda_1 x_3 + \lambda_4 x_4) + \lambda_2 x_1^4 x_2^3 x_4^6 + \lambda_3 x_2 x_3^2 x_4^9 + \lambda_5 x_1^7 x_2 x_3 x_4^4 = 0.$$

Les courbes K_4 passent donc une fois par O_1, $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, $(\beta, 3)$ et ont un comportement analogue en O_2, O_3. Elles forment un système linéaire de degré 84 et de genre 73.

Les courbes K'_4 qui correspondent sur Φ aux courbes K_4 forment un système linéaire $|K'_4|$ de degré 12 et de genre 10. On a

$$4\Gamma \equiv 7K'_4 + \lambda\Sigma\sigma_a + \mu\Sigma\sigma_\beta,$$

avec

$$7 + \lambda - 2\mu = 0, \quad 4\lambda = \mu,$$

d'où

$$4\Gamma \equiv 7K'_4 + \Sigma\sigma_\alpha + 4\Sigma\sigma_\beta. \tag{II}$$

Les courbes K'_4 sur Φ sont d'ordre 24.

En comparant les relations fonctionnelles (I) et (II), on a

$$K'_4 \equiv 4K'_1 + \Sigma\sigma_\alpha.$$

Sur la surface Φ_1, on a

$$4\Gamma' + 3\Sigma\sigma_\alpha \equiv 7K'_4. \tag{II'}$$

6. Au système tricanonique de Φ correspondra sur F le système découpé par les surfaces du sixième ordre dont l'équation, quand on applique H, se reproduit multipliée par ϵ, c'est-à-dire le système de surface du sixième ordre dont F fait partie et dont on doit défalquer F. Ce système est donc

$$\begin{aligned} \lambda_2 x_2^5 x_3 + \lambda_3 x_3^5 x_1 + \lambda_4 x_4^6 + \lambda_5 x_1 x_2 x_4^3 + \lambda_6 (x_1 x_2 x_3)^2 \\ + x_4^3(\lambda_7 x_1^3 x_3 + \lambda_8 x_2^3 x_1 + \lambda_9 x_3^3 x_2) \\ + x_4(\lambda_{10} x_1^3 x_2^2 + \lambda_{11} x_2^3 x_3^2 + \lambda_{12} x_3^3 x_1^2) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Désignons par $|K_0|$ le système découpé sur F par les surfaces (1) et par $|K'_6|$ le système qui lui correspond sur Φ.

Si l'on applique T_1 à l'équation (1), on trouve le système

$$x_1^7(\lambda_3 x_3^2 + \lambda_7 x_4^2 + \lambda_{12} x_3 x_4) + \ldots = 0,$$

donc les courbes K_6 passent deux fois par le point $(\alpha, 1)$.

Si l'on applique trois fois T_2, on obtient

$$x_1^{18}(\lambda_4 x_4 + \lambda_7 x_3) + \ldots = 0,$$

donc les courbes K_6 passent une fois par le point $(\beta, 3)$. On en conclut qu'elles passent trois fois par le point O, deux fois par $(\alpha, 1)$ et une fois par les points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, $(\beta, 3)$.

On en conclut la relation fonctionnelle

$$6\Gamma \equiv 7K'_6 + 5\Sigma\sigma_\alpha + 6\Sigma\sigma_\beta. \tag{III}$$

Le système $|K'_6|$ a le degré 24 et le genre 10. Sur Φ, les courbes K'_6 ont l'ordre 36.

7. Nous nous occuperons encore du transformé $|K_8|$ sur F du système 4-canonique de Φ. Les courbes K_8 sont découpées sur F par les surfaces du huitième ordre dont l'équation, quand on applique l'homographie H, se reproduit multipliée par ϵ^6. Du système formé par ces surfaces, on doit défalquer celles qui contiennent F comme partie. L'équation de ces surfaces contient les termes $x_1^7 x_4$, $x_2^7 x_4$, $x_3^7 x_4$ et par conséquent les courbes K_8 passent simplement par le point $(\alpha, 1)$ et par les points analogues relatifs à O_2, O_3.

Les courbes K_8' qui correspondent sur Φ aux courbes K_8 rencontrent chacune des courbes σ_α en un point et ne rencontrent pas les courbes σ_β. Elles satisfont donc à la relation fonctionnelle

$$8\Gamma \equiv 7K_8' + 2\Sigma\sigma_\alpha + \Sigma\sigma_\beta. \qquad \text{(IV)}$$

Le système $|K_8'|$ a le degré 54 et le genre 34. Sur la surface Φ, les courbes K_3' ont l'ordre 48.

8. La courbe canonique de Φ ne peut être $2K_1'$, car alors $4K_1'$ serait une courbe bicanonique et on devrait avoir $K_4' \equiv 4K_1'$ alors que l'on a $K_4' \equiv 4K_1' + \Sigma\sigma_\alpha$. La courbe canonique de Φ doit donc comprendre comme parties les courbes σ_α', σ_α'', σ_α''' ; ce sera la courbe

$$L_1 \equiv 2K_1' + \Sigma\sigma_\alpha.$$

Les courbes bicanoniques sont alors

$$L_2 \equiv 4K_1' + 2\Sigma\sigma_\alpha \equiv K_4' + \Sigma\sigma_\alpha.$$

Observons que les courbes K_6' rencontrent une courbe K_4', de genre 10, en des groupes de 18 points formant la série canonique complète. Le système adjoint au système $|K_4'|$ peut donc être le système $|K_6'|$, mais on peut aussi prendre le système $|K_6' + \Sigma\sigma_\alpha|$ puisque les courbes σ_α', σ_α'', σ_α''' ne sont pas rencontrées par les courbes K_4'. Nous prendrons le système

$$|K_6' + \Sigma\sigma_\alpha|$$

de manière à avoir identiquement

$$K_6' + \Sigma\sigma_\alpha - (K_4' \equiv 2K_1' + \Sigma\sigma_\alpha.$$

On a en effet, par les relations (I), (II) et (III),

$$K'_6 \equiv K'_4 + 2K'_1.$$

Le système tricanonique de Φ sera

$$|L_3| = |6K'_1 + 3\Sigma\sigma_a| = |2K'_1 + K'_4 + 2\Sigma\sigma_a| = |K'_6 + 2\Sigma\sigma_a|.$$

On peut voir que les courbes bicanoniques L_2 sont en général irréductibles. Considérons la surface Φ_1, d'ordre 30, de S_{13}, dont les sections hyperplanes sont les courbes

$$\Gamma_1 = \Gamma - \Sigma\sigma_a - \Sigma\sigma_\beta.$$

On a

$$\Gamma_1 \equiv 7K'_1 + \Sigma\sigma_a$$

et il existe un hyperplan contenant les cubiques gauches σ'_a, σ''_a, σ'''_a et ayant un contrat d'ordre six avec la surface Φ_1 le long de la cubique plane K'_1. Les courbes K'_4 sont découpées sur cette surface par les hypersurfaces d'un certain ordre n, coupant encore Φ_1 suivant une courbe fixe. Les courbes L_2 seront découpées sur Φ_1 par les hypersurfaces d'ordre $n+1$, passant par la courbe fixe et par le plan de la cubique plane K'_1. Elles sont donc irréductibles comme les courbes K'_4.

Pour la surface Φ, qui est régulière comme F, on a

$$p_a = p_g = 1, \quad P_2 = 5, \quad P_3 = 11.$$

9. Des formules (I) à (IV), on déduit que l'on a

$$K'_8 \equiv 8K'_1 + 2\Sigma\sigma_a + \Sigma\sigma_\beta \equiv 2K'_4 + \Sigma\sigma_\beta \equiv 2K'_1 + K'_6 + \Sigma\sigma_a + \Sigma\sigma_\beta$$

et, également,

$$K'_8 \equiv \Gamma + K'_1.$$

Les courbes 4-canoniques sont

$$L_4 \equiv K'_8 + 2\Sigma\sigma_a - \Sigma\sigma_\beta \equiv \Gamma + K'_1 + 2\Sigma\sigma_a - \Sigma\sigma_\beta.$$

Le système $|K_8|$ est découpé sur F par les surfaces

$$\begin{gathered}\lambda_0 x_1 x_2 x_3 x_4^5 + x_4^4(\lambda_{41} x_1^3 x_3 + \lambda_{42} x_2^3 x_1 + \lambda_{43} x_3^3 x_2) \\ + x_4^3(\lambda_{31} x_1^3 x_2^2 + \lambda_{32} x_2^3 x_3^2 + \lambda_{33} x_3^3 x_1^2) \\ + x_4^2(\lambda_{21} x_1^5 x_2 + \lambda_{22} x_2^5 x_3 + \lambda_{23} x_3^5 x_1 + \lambda_{24} x_1^2 x_2^2 x_3^2) \\ + x_4(\lambda_{11} x_1^7 + \lambda_{12} x_2^7 + \lambda_{13} x_3^7) + x_1 x_2 x_3 x_4(\lambda'_{11} x_1^3 x_3 + \lambda'_{12} x_2^3 x_1 + \lambda'_{13} x_3^3 x_2) \\ + \lambda_1 x_1^6 x_3^2 + \lambda_2 x_2^6 x_1^2 + \lambda_3 x_3^6 x_2^2 + x_1 x_2 x_3(\lambda'_1 x_1^3 x_2^2 + \lambda'_2 x_2^3 x_3^2 + \lambda'_3 x_3^3 x_1^2) = 0.\end{gathered}$$

La surface Φ a donc le genre $P_4 = 23$.

Liège, le 21 octobre 1956.