Bulletin de la Classe des sciences

Remarques sur la formation des systèmes canonique et pluricanoniques de quelques surfaces algébriques (deuxième note)

Lucien Godeaux

Résumé
Exemple d'une surface algébrique image d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique présentant trois points unis, où les composantes des points de diramation n'interviennent pas dans la formation des systèmes canonique et pluricanoniques.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Remarques sur la formation des systèmes canonique et pluricanoniques de quelques surfaces algébriques,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie,

(Deuxième note).

Résumé. — Exemple d'une surface algébrique image d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique présentant trois points unis, où les composantes des points de diramation n'interviennent pas dans la formation des systèmes canonique et pluricanoniques.

Nous nous proposons, dans cette seconde note [1], de montrer par un exemple, qu'il existe des surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation telles que les composantes de ces points n'interviennent pas dans la formation des systèmes canonique et pluricanoniques, bien que parmi ces composantes il y en ait des courbes de degré virtuel inférieur à — 2.

1. Considérons la surface F d'équation

$$\begin{aligned} & a_0x_4^8 + a_1x_1x_2x_3x_4^5 + x_4^4(a_{41}x_1^3x_3 + a_{42}x_2^3x_1 + a_{43}x_3^3x_2) \\ & + x_4^3(a_{31}x_1^3x_2^2 + a_{32}x_2^3x_3^2 + a_{33}x_3^3x_1) \\ & + x_4^2(a_{21}x_1^5x_2 + a_{22}x_2^5x_3 + a_{23}x_3^5x_1 + a_{20}x_1^2x_2^2x_3^2) \\ & + x_4(a_{11}x_1^7 + a_{12}x_2^7 + a_{13}x_3^7 + a_{14}x_1^4x_2x_3^2 + a_{15}x_2^4x_3x_1^2 + a_{16}x_3^4x_1x_2^2) \\ & + a_{01}x_1^6x_3^2 + a_{02}x_2^6x_1^2 + a_{03}x_3^6x_2^2 + a_{04}x_1^4x_2^3x_3 + a_{05}x_2^4x_3^3x_1 \\ & + a_{06}x_3^4x_1^3x_2 = 0. \end{aligned}$$

Elle est transformée en soi par l'homographie

$$H = \begin{pmatrix} x_1 & \epsilon x_2 & \epsilon^3 x_3 & \epsilon^6 x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

de période sept, ϵ étant une racine primitive septième de l'unité.

[1] La première note a paru dans les Bulletins de l'Académie, 1956, pp. 1002-1011.

Sur F, H détermine une involution I, d'ordre sept, ayant trois points unis, O_1, O_2, O_3. Chacun de ces points est simple par F.

Nous pouvons construire un modèle projectif de la surface Φ image de l'involution I, en procédant comme dans notre première note. On trouve, dans S_{17}, une surface d'ordre 56, dont les sections hyperplanes Γ ont le genre 45. Nous désignerons par O'_1, O'_2, O'_3 les points de diramation homologues de O_1, O_2, O_3 respectivement.

2. Commençons par étudier la structure des points de diramation ; il suffira de s'occuper de O'_1, les autres points O'_2, O'_3 ayant la même structure.

En O_1, le plan tangent à F est $x_4 = 0$ et le point uni O_1 est caractérisé par les entiers $\alpha = 3$, $\beta = 5$. Appelons C les courbes qui correspondent sur F aux sections hyperplanes Γ de Φ. Ce sont les courbes découpées sur F par les surfaces du septième ordre transformées en soi par H et qui ne passent pas par les points unis de cette homographie. Appelons C′ les courbes C passant par O_1 et C″ les courbes C′ touchant en O_1 une droite distincte de O_1O_2, O_1O_3.

Les courbes C′ ont la multiplicité trois en O_1, passent deux fois par deux points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$ infiniment voisins successifs de O_1, le premier se trouvant sur la droite O_1O_2, une fois par quatre points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, $(\beta, 3)$, $(\beta, 4)$ infiniment voisins successifs de O_1, le premier se trouvant sur la droite O_1O_3.

Les courbes C″ ont la multiplicité cinq en O_1, passant une fois par $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, deux fois par $(\beta, 1)$ et par un point $(\beta, 1, 1)$ infiniment voisin de $(\beta, 1)$.

Les points $(\alpha, 2)$, $(\beta, 4)$, $(\beta, 1, 1)$ sont unis de première espèce pour l'involution I. Sur la surface Φ_1, projection de Φ à partir de O'_1, il correspond aux domaines des points $(\alpha, 2)$, $(\beta, 4)$ respectivement une conique σ_α et une droite σ_β rencontrant σ_α en un point O''_1. Sur la surface Φ_2, projection de Φ_1 à partir du point O''_1, il correspond à $(\alpha, 2)$ une droite σ_α et à $(\beta, 1, 1)$ une conique τ_β.

Le point O'_1 est triple pour la surface Φ_1 et est équivalent à trois courbes rationnelles σ_α, τ_β, σ_β dont les degrés virtuels sont respectivement — 3, — 2 et — 2.

Les points O_2', O_3' ont des structures analogues. Nous désignerons par σ_α', τ_β', σ_β' les courbes équivalentes à O_1', par σ_α'', τ_β'', σ_β'' les courbes équivalentes à O_2', par σ_α''', τ_β''', σ_β''' les courbes équivalentes à O_3'.

3. Les courbes canoniques de Φ doivent rencontrer en un point chacune des courbes σ_α', σ_α'', σ_α''. Il leur correspond sur F des courbes canoniques de cette surface passant par le point $(\alpha, 2)$ donc par le point $(\alpha, 1)$ et par le point O_1, et de même par les points O_2, O_3.

Il en résulte que ces courbes cononiques de F sont découpées par les surfaces

$$\lambda_1 x_1^3 x_3 + \lambda_2 x_2^3 x_1 + \lambda_3 x_3^3 x_2 + \lambda_4 x_1 x_2 x_3 x_4 + \lambda_5 x_4^4 = 0. \tag{1}$$

Effectuons d'ailleurs la transformation

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1^3 : x_1^2 x_2 : x_2^2 x_3 : x_2^2 x_4. \tag{2}$$

dont l'inverse est

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 x_2^2 : x_2^3 : x_1^2 x_3 : x_1^2 x_4,$$

qui fait correspondre au point $(\alpha, 2)$ le point $O_1(1, 0, 0, 0)$ du nouvel espace.

A la surface F correspond la surface

$$a_{01} x_1^{21} x_4 + \ldots = 0,$$

à la surface (1) la surface

$$x_1^3(\lambda_1 x_3 + \lambda_2 x_2) + \ldots = 0$$

et à l'homographie H, l'homographie

$$(x_1 \qquad \epsilon x_2 \qquad \epsilon x_3 \qquad \epsilon^4 x_4).$$

Dans le plan tangent $x_4 = 0$ en O_1 à la transformée de F, cette homographie détermine une homologie de centre O_1 et la courbe découpée sur la transformée de F par celle de la surface (1) passe simplement par O_1.

Si nous appelons K_4' les courbes qui correspondent sur Φ aux courbes K_4 découpées sur F par les surfaces (1), nous avons

$$4\Gamma \equiv 7K_4' + 3\Sigma\sigma_\alpha + 2\Sigma\tau_\beta + \Sigma\sigma_\beta. \tag{I}$$

Sur Φ, les courbes K_4' sont d'ordre 32, de degré 17 et de genre 18.

4. Aux courbes bicanoniques de Φ correspondent sur F les courbes découpées par le double du système (1), c'est-à-dire par les surfaces contenant F. De ce système, on doit défalquer la surface F et il reste le système

$$\lambda_{01}x_1^6x_3^2 + \lambda_{02}x_2^6x_1^2 + \lambda_{04}x_1^4x_2^3x_3 + \ldots = 0 \tag{3}$$

(on supprime dans l'équation de F le terme en $x_1^7x_4$ et on remplace les coefficients par des coefficients variables).

A la surface (3), la transformation (1) fait correspondre la surface

$$x_1^{18}(\lambda_{01}x_3^2 + \lambda_{02}x_2^2 + \lambda_{04}x_2x_3) \ldots = 0.$$

Cela montre que les courbes K_8 découpées sur F par les surfaces (3) passent deux fois par les points O_1, $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$ et ont un comportement analogue en O_2, O_3.

On en conclut que les courbes K_8' qui correspondent sur Φ aux courbes K_8 vérifient l'équation fonctionnelle

$$8\Gamma \equiv 7K_8' + 6\Sigma\sigma_\alpha + 4\Sigma\tau_\beta + 2\Sigma\sigma_\beta. \tag{II}$$

Sur Φ_1 les courbes K_8' ont l'ordre 64, le degré 4.17 et le genre 52.

5. Nous allons montrer que les systèmes canonique et bicanonique de Φ sont respectivement

$$|L_1| = |K_4'|, \; |L_2| = |K_8'|.$$

Observons en premier lieu que les courbes K_4' font certainement partie des courbes canoniques L_1 de Φ. D'autre part les courbes K_8' rencontrent les courbes K_4' en des groupes de 34 points. Si les courbes K_8' découpaient sur une courbe K_4', de genre 18, une série paracanonique, c'est-à-dire une série g_{34}^{16}, il y aurait ∞^5 courbes $K_8' - K_4'$. Or, des relations (I) et (II), on déduit

$$|K_8'| = |2K_4'|,$$

donc $|K'_8 - K'_4| = |K'_4|$ et le système $|K'_4|$ ayant la dimension quatre, on serait conduit à une absurdité. Les courbes K'_8 découpent donc sur une courbe K'_4 la série canonique g^{17}_{34}. On en conclut que le système canonique de Φ est $|K'_4|$ et le système bicanonique $|K'_8|$.

Les genres de la surface Φ, qui est régulière comme F, sont

$$p_a = p_g = 5, \quad p^{(1)} = 18, \quad P_2 = 23.$$

6. Le plan $x_4 = 0$ coupe F suivant une courbe K_1 qui passe deux fois par O_1, $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$ et qui a un comportement analogue en O_2, O_3. La courbe K'_1 qui lui correspond sur Φ satisfait à la relation fonctionnelle

$$\Gamma \equiv 7K'_1 + 6\Sigma\sigma_\alpha + 4\Sigma\tau_\beta + 2\Sigma\sigma_\beta.$$

La courbe K'_1 est rationnelle et de degré virtuel — 4.

Liège, le 11 novembre 1956.