Bulletin de la Classe des sciences

Remarques sur les involutions cycliques appartenant à une variété algébrique à trois dimensions

Lucien Godeaux

Résumé

On considère une variété algébrique à trois dimensions contenant une involution cyclique d'ordre premier n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Quelques remarques sur la structure des points unis dans le domaine desquels l'involution détermine une homographie (périodique) non homologique.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Remarques sur les involutions cycliques appartenant à une variété algébrique à trois dimensions.

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — On considère une variété algébrique à trois dimensions contenant une involution cyclique d'ordre premier n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Quelques remarques sur la structure des points unis dans le domaine desquels l'involution détermine une homographie (périodique) non homologique.

Dans un travail antérieur, nous avons commencé l'étude des points unis, supposés en nombre fini, d'une involution cyclique d'ordre premier impair appartenant à une variété algébrique V à trois dimensions [1]. Ces points se partagent en trois espèces suivant que la transformation birationnelle de V en soi, génératrice de l'involution, détermine dans le domaine du point l'identité, ou une homologie, ou une homographie non homologique. Nous avions, dans le travail précité, considéré les points des deux premières espèces.

Dans cette note, nous faisons quelques observations sur les points unis de troisième espèce, en utilisant les résultats que nous avons obtenu sur les points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique [2]. Il semble fort difficile de

(1) *Sur les points unis des involutions cycliques appartenant à une variété algébrique à trois dimensions* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1948, pp. 419-425, 518-530, 695-700).

(2) *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités scient., n° 270, Paris, Hermann, 1935) ; *Mémoire sur les surfaces multiples* (MÉMOIRES IN-8° DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1953) ; *Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples;* Deuxième Colloque de Géométrie

construire une théorie générale des points unis de troisième espèce et sans doute l'étude d'exemples particuliers sera nécessaire. La théorie des homographies cycliques n'ayant que des points unis isolés de l'espace ordinaire sera à cet égard très utile.

1. Considérons une variété algébrique V_3 à trois dimensions, contenant une involution cyclique I, d'ordre premier impair p, n'ayant qu'un nombre fini de point unis. Nous pouvons prendre, comme modèle projectif de la variété V_3, une variété normale V, dans un espace S_r, où r est aussi grand qu'on le veut, sur laquelle l'involution est déterminée par une homographie T de S_r, de période p, possédant p axes ponctuels $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$. De plus, seul le premier de ces espaces, ξ_0, rencontre V (aux points unis de l'involution) et la dimension r_0 de cet espace peut-être supposée aussi grande qu'on le veut. Nous supposerons que les points de rencontre de V et de ξ_0 sont simples pour V et que l'espace S_3 tangent à V en un de ces points unis ne rencontre ξ_0 qu'au point de contact.

Soient A un point uni de I et η l'espace S_3 tangent à V en A. Cet espace η est transformé en soi par T et trois cas peuvent se présenter :

1° L'espace η rencontre suivant un plan un des espaces $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}$. Soit ζ ce plan d'appui. Dans η, T détermine une homologie de centre A et de plan ζ. Nous dirons que A est un point uni de *première espèce.*

2° L'espace η rencontre un des espaces $\xi_1, \xi, \ldots_2, \xi_{p-1}$ suivant un point A_1 et un autre de ces espaces suivant une droite a. Dans η, T détermine une homographie axiale d'axes AA_1 et a. Nous dirons que A est un point uni de *seconde espèce.*

3° L'espace η s'appuie en un point sur trois des espaces $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}$. Nous dirons que A est un point uni de *troisième espèce.*

Projetons la variété V du point A sur un hyperplan de l'espace ambiant ; nous obtenons une variété V' sur laquelle, au domaine

---

algébrique tenu à Liège en 1952 (Liège, Thone et Paris, Masson, 1952, pp. 225-241). Voir également une série de notes parues depuis 1954 dans le BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

du point A correspond un plan α. Si A n'est pas un point uni de première espèce, il existe au moins dans α un point uni A' isolé de l'involution I' qui correspond à I sur V'. Nous dirons que A' est de première, seconde ou troisième espèce dans les mêmes conditions que A. Et ainsi de suite.

D'une manière générale, nous dirons qu'un point, propre ou impropre de V, uni pour I, est de première, seconde ou troisième espèce suivant que T détermine, dans le domaine du premier ordre de ce point, l'identité, une homologie ou une homographie non homologique.

2. Désignons par F les sections hyperplanes de V. Dans le système linéaire $|F|$, il y a p systèmes linéaires appartenant à l'involution I. Chacun d'eux est découpé par les hyperplans passant par $p-1$ des espaces $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$. Nous désignerons par $|F_i|$ le système de surfaces découpées par les hyperplans passant par $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_{p-1}$. Le système $|F_0|$ est dépourvu de point-base, les systèmes $|F_1|, |F_2|, \ldots, |F_{p-1}|$ ont comme points-base les points unis de I.

Rapportons projectivement les surfaces F_0 aux hyperplans d'un espace linéaire à r_0 dimensions ou, si l'on préfère, projetons F sur ξ_0 à partir de l'espace de dimension minimum contenant $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}$. A la variété V correspond une variété à trois dimensions Ω, image de l'involution I. A un point de Ω correspond un groupe de I et inversement à un groupe de I correspond un point de Ω.

Nous désignerons par $|\Phi_0|, |\Phi_1|, |\Phi_2|, \ldots, |\Phi_{p-1}|$ les systèmes linéaires complets de surfaces qui correspondent sur Ω respectivement aux systèmes $|F_0|, |F_1|, |F_2|, \ldots, |F_{p-1}|$. Le système $|\Phi_0|$ est celui des sections hyperplanes de Ω.

Nous désignerons par A' le point de diramation qui correspond sur Ω à A. Nous conviendrons de dire que A' est de la même espèce que A.

Si ϵ est une racine primitive d'ordre p de l'unité, nous pouvons attacher à chacun des axes $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$ de l'homographie T respectivement les nombres $\epsilon^0 = 1, \epsilon, \epsilon^2, \ldots, \epsilon^{p-1}$,

3. Supposons que A soit un point uni de troisième espèce. L'espace tangent η à V en A s'appuie en un point sur trois des espaces ξ_1, ξ_2, ..., ξ_{p-1}. Nous pouvons toujours supposer, en changeant éventuellement de notation, que l'un de ces espaces est ξ_1, les autres étant ξ_α, ξ_β. Désignons par A_1, A_α, A_β ces points d'appui.

Dans l'espace η, T détermine une homographie qui peut être représentée par les formules

$$x'_0 : x'_1 : x'_\alpha : x'_\beta = x_0 : \epsilon x_1 : \epsilon^\alpha x_\alpha : \epsilon^\beta x_\beta.$$

possédant comme points unis A, A_1, A_α, A_β.

Les hyperplans passant par ξ_0, ξ_2, ..., ξ_{p-1} découpent sur V les surfaces F_α qui passent en général simplement par A en touchant en ce point le plan $AA_\alpha A_\beta$.

Les hyperplans passant par ξ_0, ξ_1, ..., ξ_{p-1} sauf par ξ_α découpent sur V les surfaces F_α, passant en général simplement par A en y touchant le plan AA_1A_β.

Enfin les hyperplans passant par ξ_0, ξ_1, ..., ξ_{p-1} sauf par ξ_β découpent sur V les surfaces F_β, passant simplement par A en y touchant le plan AA_1A_α.

Sur chacune des surfaces F_1, F_α, F_β, l'homographie T détermine une involution cyclique n'ayant qu'un nombre fini de points unis et nous pouvons appliquer à ces surfaces les résultats que nous avons obtenus sur ces involutions.

4. Considérons une surface F_α déterminée et examinons l'involution déterminée par T sur cette surface.

Posons $\eta = \epsilon^\beta$. Il existe un nombre β', compris entre 1 et p, tel que $\eta\beta' = \epsilon$. On a d'ailleurs $\beta\beta' - 1 \equiv 0$ (mod. p).

Les surfaces F_β coupent F_α suivant une courbe ayant un point simple en A et passant par une suite de points fixes $(\beta', 1)$, $(\beta', 2)$, ..., $(\beta', \beta' - 1)$, unis pour l'involution appartenant à F_α, infiniment voisins successifs de A. Les $\beta' - 2$ premiers de ces points sont unis de seconde espèce, le dernier uni de première espèce sur la surface F_α considérée.

Considérons maintenant une surface F_β déterminée et l'involution déterminée sur cette surface par l'homographie T.

Soit α' le nombre compris entre 0 et p tel que $\alpha\alpha' - 1$ soit multiple de p. Les surfaces F_α coupent F_β suivant des courbes ayant un point simple en A et passant par une suite de points

$(\alpha', 1)$, $(\alpha', 2)$, ..., $(\alpha', \alpha' - 1)$, infiniment voisins successifs de A, unis pour l'involution appartenant à F_β, les $\alpha' - 2$ premiers de seconde espèce, le dernier de première espèce.

Supposons $\alpha' \geqslant \beta'$. Les points $(\beta', 1)$, $(\beta', 2)$, ..., $(\beta', \beta' - 1)$ coïncident respectivement avec les points $(\alpha', 1)$, $(\alpha', 2)$, ..., $(\alpha', \beta' - 1)$. En effet, si on fixe une surface F_α, ces points appartiennent à toutes les surfaces F_β et si l'on fixe une surface F_β, ces points appartiennent à toutes les surfaces F_α. Ce sont nécessairement, sauf $(\alpha', \beta' - 1)$, des points unis de troisième espèce pour l'involution I.

5. Supposons en premier lieu $\alpha' = \beta'$.

Sur une surface F_α, tous les points infiniment voisins de $(\alpha', \alpha' - 1)$ ou $(\beta', \beta' - 1)$ sont unis pour l'involution. De même sur une surface F_β, tous les points infiniment voisins du même point sont unis pour l'involution. Il en résulte que, sur V, tous les points infiniment voisins de $(\alpha', \alpha' - 1)$ sont unis et que ce point est donc uni de première espèce pour l'involution I.

Observons que l'hypothèse $\alpha' = \beta'$ entraîne $\alpha = \beta$ et le point A serait alors uni de seconde espèce alors que nous avons supposé qu'il était uni de troisième espèce. Nous devons donc supposer, dans cette dernière hypothèse, α' distinct de β' et par exemple $\alpha' > \beta'$.

6. Supposons donc $\alpha' > \beta'$. Sur une surface F_α, l'homographie T détermine l'identité dans le domaine du premier ordre de $(\alpha', \beta' - 1)$.

Considérons une surface F_α et une surface F_β. Elles ont en commun les points A, $(\alpha', 1)$, $(\alpha', 2)$, ..., $(\alpha', \beta' - 1)$; soit P leur point commun infiniment voisin de $(\alpha', \beta' - 1)$.

Lorsque F_α reste fixe et que F_β varie, le point P varie, mais lorsque F_β reste fixe et que F_α varie, le point P reste fixe et coïncide avec (α', β'). On en conclut que toutes les surfaces F_α ont en commun tous les points infiniment voisins de $(\alpha', \beta' - 1)$ sur l'une d'entre elles. En d'autres termes, le point $(\alpha', \beta' - 1)$ est uni de seconde espèce pour l'involution I.

Ce raisonnement peut être généralisé. Reprenons la courbe commune à deux surfaces F_α, F_β et considérons les points (α', β'), $(\alpha', \beta' + 1)$, ..., $(\alpha', \alpha' - 1)$. Lorsque F_α reste fixe et que F_β

varie, ces points varient et décrivent, sur F_α, des courbes rationnelles infiniment petites $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{\alpha'-1}$, infiniment voisines successives du point $(\alpha', \beta' - 1)$. Lorsque F_β reste fixe et que F_α varie, les points considérés $(\alpha', \beta'), \ldots, (\alpha', \alpha' - 1)$ restent fixes. Par conséquent, toutes les surfaces F_α passent par les courbes $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{\alpha'-1}$.

Lorsque F_α et F_β varient, les points infiniment voisins d'un point $(\alpha', \alpha' - 1)$ de la courbe $\gamma_{\alpha'-1}$ varient et l'homographie T détermine l'identité dans le domaine de ce point. Tous les points de $\gamma_{\alpha'-1}$ sont unis de première espèce.

7. L'étude des courbes communes aux surfaces F_1 et F_α, ou F_1 et F_β se fera de la même manière, mais pour cela il faudra déterminer deux entiers α_1, β_1, compris entre 1 et p, tels que $\alpha\alpha_1 - \beta$ et $\beta\beta_1 - \alpha$ soient multiples de p.

Une fois cette étude faite, il faudra considérer les surfaces F_0 passant par A. Ces surfaces ont un point multiple en A ; désignons les par F'_0.

Envisageons par exemple une surface F_1 et désignons par I_1 l'involution déterminée par T sur cette surface. Le point A est un point uni de I' caractérisé par les nombres α_1, β_1, et dont la structure peut donc être déterminée.

Les surfaces F_0 découpent sur la surface F_1 un système linéaire $|(F_1, F_0)|$ appartenant à l'involution I_1. On pourra déterminer, par le procédé que nous avons indiqué, la singularité en A des courbes (F_1, F'_0), qui sont les courbes du système précédent passant par A. Mais il faut remarquer ici que les surfaces F'_0 peuvent toucher le plan $AA_\alpha A_\beta$ en A. De toute manière, il importe de remarquer qu'édifier un procédé général pour déterminer la structure du point uni A sur la variété V paraît très compliqué.

Liège, le 24 janvier 1956.