Sur une homographie associée à une congruence W

Lucien Godeaux

Résumé
A chaque droite d'une congruence W, on associe une homographie dont les points et les plans unis sont les foyers et les plans focaux de la droite.

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Sur une homographie associée à une congruence W,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — A chaque droite d'une congruence W, on associe une homographie dont les points et les plans unis sont les foyers et les plans focaux de la droite.

Dans une note récente, nous avons associé, à une congruence W, quatre suites de Laplace appartenant à l'espace à cinq dimensions, en relation avec l'hyperquadrique Q de Klein, représentant l'espace réglé [1].

Deux de ces suites, que nous avons désignées par $\mathcal{J}$ et $\mathcal{P}$, sont conjuguées par rapport à Q. Trois points consécutifs J_n, J_{n+1}, J_{n+2} de la première suite et les trois points consécutifs P_{-n}, P_{-n-1}, P_{-n-2} de la seconde déterminent deux plans conjugués par rapport à Q. Les sections de cette hyperquadrique par ces plans représentent les séries réglées d'une quadrique Ψ_n. Si n prend toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$, nous avons ainsi une suite de quadriques sur laquelle nous avons attiré l'attention autrefois [2] ; nous y sommes revenu récemment dans une communication faite au *Convegno di Geometria proiettivo-differenziale* de Pavie (sept.-oct. 1955). Dans cette note, nous considérons les quadriques Ψ_0 et Ψ_{-0} ; le produit des polarités relatives à ces quadriques est une homographie qui a comme éléments unis les foyers et les plans focaux de la congruence.

---

(1) *Sur quatre suites de Laplace associées à une congruence* W (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1954, pp. 880-885). Dans la note actuelle, nous avons écrit P_{-n} au lieu de P_n pour uniformiser les notations.

(2) *Sur quelques familles de quadriques associées aux points d'une surface* (Annales de la Soc. Polonaise de Mathématiques, 1928, pp. 213-226). Voir également notre exposé sur *la théorie des surfaces et l'espace réglé* (Actualités scient., n° 138, Paris, Hermann, 1934).

Dans le cours de cette note, nous utilisons les notations employées dans nos travaux précédents, notamment dans l'exposé qui vient d'être cité. Pour ne pas allonger inutilement ce travail, nous n'en donnerons plus les définitions.

1. Soit (j) une congruence W ; nous désignerons par (x) et $(\overline{x})$ ses surfaces focales, par u, v les asymptotiques de ces surfaces.

A la congruence (j) nous avons associé quatre suites de Laplace, de l'espace à cinq dimensions S_5, en relation avec l'hyperquadrique de Klein Q qui représente dans cet espace les droites de l'espace ordinaire.

1) La suite

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots, \tag{L}$$

associée à la surface (x), les points U, V représentant les tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01} à la surface (x) en un point x.

2) La suite

$$\ldots, \overline{U}_n, \ldots, \overline{U}_1, \overline{U}, \overline{V}, \overline{V}_1, \ldots, \overline{V}_n, \ldots, \tag{$\overline{L}$}$$

associée de la même manière à la surface $(\overline{x})$.

3) La suite

$$\ldots, J_n, \ldots, J_1, J, J_{-1}, \ldots, J_{-n}, \ldots \tag{$\mathcal{J}$}$$

déterminée par le point J image de la droite j sur Q.

4) La suite

$$\ldots, P_n, \ldots, P_1, P, P_{-1}, \ldots, P_{-n}, \ldots \tag{$\mathcal{P}$}$$

déterminée par le point P seconde image dans S_5 du complexe linéaire osculateur à la congruence (j) le long de la droite j.

Dans ces quatre suites, chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

Rappelons que les suites L et $\overline{L}$ sont autopolaires par rapport à Q. Le point U_n (ou $\overline{U}_n$) est le pôle de l'hyperplan

$$V_{n-2}V_{n-1}V_nV_{n+1}V_{n+2} \text{ (ou } \overline{V}_{n-2}\overline{V}_{n-1}\overline{V}_n\overline{V}_{n+1}\overline{V}_{n+2})$$

et le point V_n (ou $\overline{V}_n$) celui de

$$U_{n-2}U_{n-1}U_nU_{n+1}U_{n+2} \text{ (ou } \overline{U}_{n-2}\overline{U}_{n-1}\overline{U}_n\overline{U}_{n+1}\overline{U}_{n+2}).$$

Les suites $\mathcal{J}$ et $\mathcal{P}$ sont conjuguées par rapport à Q. Le point P est le pôle de l'hyperplan $J_2J_1JJ_{-1}J_{-2}$, P_n celui de

$$J_{-n-2}J_{-n-1}J_{-n}J_{-n+1}J_{-n+2} \text{ et } P_{-n} \text{ celui de } J_{n-2}J_{n-1}J_nJ_{n+1}J_{n+2}.$$

Le point P_n est l'intersection des droites $U_n\overline{U}_n$, $U_{n-1}\overline{U}_{n-1}$ et P_{-n}, celui des droites $V_n\overline{V}_n$, $V_{n-1}\overline{V}_{n-1}$.

2. Ces points rappelés, considérons les plans JJ_1J_2 et $PP_{-1}P_{-2}$. Ils sont conjugués par rapport à Q et les sections de cette hyperquadrique par ces plans représentent les générations rectilignes des deux modes d'une quadrique Ψ_0.

De même, les sections de Q par les plans conjugués $JJ_{-1}J_{-2}$ et PP_1P_2 représentent les deux systèmes de génératrices rectilignes d'une quadrique Ψ_{-0}.

Nous allons considérer la polarité θ_0 par rapport à Ψ_0 et la polarité θ_{-0} par rapport à Ψ_{-0}, puis l'homographie $H = \theta_0\theta_{-0}$ produit de ces deux polarités.

Dans S_5, il correspond à θ_0 une homographie biaxiale harmonique d'axes JJ_1J_2 et $PP_{-1}P_{-2}$, que nous désignerons par θ_0' et à θ_{-0}, une homographie biaxiale harmonique d'axes $JJ_{-1}J_{-2}$, PP_1P_2, que nous désignerons par θ_{-0}'.

Le plan $PP_{-1}P_{-2}$ contient les points V, V_1, $\overline{V}$, $\overline{V}_1$. L'espace à trois dimensions U_1UVV_1 coupe JJ_1J_2 suivant la droite JJ_1 et le plan $PP_{-1}P_{-2}$ suivant la droite $PP_{-1} = V\overline{V}$, par conséquent il est transformé en soi par θ_0'. Le même espace à trois dimensions coupe le plan $JJ_{-1}J_{-2}$ suivant la droite JJ_{-1} et le plan PP_1P_2 suivant la droite $PP_1 = U\overline{U}$; il est donc également transformé en soi par θ_{-0}' et par suite par $H' = \theta_0'\theta_{-0}'$.

L'espace U_1UVV_1 coupe Q suivant deux plans : l'un représente la gerbe de droites de sommet x et l'autre le plan réglé tangent $xx^{10}x^{01}$ à la surface (x) au point x. Les homographies θ_0' et θ_{-0}' échangent ces plans entre eux, par conséquent chacun de ces plans est unis pour H'.

On peut faire le même raisonnement pour l'espace à trois dimensions $\overline{U_1}\overline{U}\overline{V}\overline{V_1}$, qui coupe Q suivant deux plans dont l'un représente la gerbe de droite de sommet $\bar{x}$ et l'autre le plan réglé $x\bar{x}^{10}\bar{x}^{01}$ tangent à la surface $(\bar{x})$ au point $\bar{x}$.

On en conclut que l'homographie H possède comme points unis les foyers x, $\bar{x}$ de la droite j et comme plans unis, les plans focaux de cette droite.

Le point J_1 appartient aux plans JJ_1J_2, PP_1P_2 et le point J_{-1} aux plans $JJ_{-1}J_{-2}$, $PP_{-1}P_{-2}$. Par conséquent, ces points sont unis à la fois pour θ'_0 et θ'_{-0} et la droite J_1J_{-1} est unie pour H'. Il en résulte que les points de rencontre G_1, G_2 de cette droite avec Q sont unis pour H'. A ces points correspondent deux droites g_1, g_2 unies pour H et passant, l'une g_1 par le point x, l'autre g_2 par le point $\bar{x}$.

3. La traduction analytique des considérations précédentes permet de préciser les éléments unis de l'homographie H.

Associons à la droite j de la congruence W donnée le tétraèdre d'Élie Cartan attaché au foyer x. Ce tétraèdre a pour sommets les points

$$x,\ m = x\,(\log a)^{10} - 2x^{10},\ n = x\,(\log b)^{01} - 2x^{01},$$
$$y = [8ab - (\log a)^{10}\,(\log b)^{01}]x + 2x^{10}\,(\log b)^{01} + 2x^{01}\,(\log a)^{10} - 4x^{11},$$

le point x satisfaisant aux équations

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1x = 0,\ x^{02} + 2ax^{10} + c_2x = 0.$$

Tout point de l'espace a des coordonnées de la forme

$$z_1x + z_2m + z_3n + z_4y.$$

Les quadriques Ψ_0 et Ψ_{-0} ont respectivement pour équations

$$\lambda(z_2z_3 + z_1z_4) + \mu(z_2^2 + \beta z_4^2) + 2\mu_1z_2z_4 + 2[\mu_2 + \mu_1\,(\log bh_1)^{01}]z_4^2 = 0,$$
$$\mu(z_2z_3 + z_1z_4) + \lambda(z_3^2 + \alpha z_4^2) + 2\lambda_1z_3z_4 + 2[\lambda_2 + \lambda_1\,(\log ak_1)^{10}]z_4^2 = 0.$$

Par conséquent, l'homographie H a pour équations

$$\begin{aligned}
&\rho[\mu z'_1 + 2\lambda_1z'_3 + 2\{2\lambda_2 + 2\lambda_1\,(\log ak_1)^{10} + \alpha\lambda\}z'_4] = \\
&\quad = \lambda z_1 + 2\mu_1z_2 + 2[2\mu_2 + 2\mu_1\,(\log bh_1)^{01} + \beta\mu]z_4,\\
&\rho(\mu z'_2 + 2\lambda z'_3 + 2\lambda_1z'_4) = \lambda z_2,\\
&\rho\mu z'_3 = 2\mu z_2 + \lambda z_3 + 2\mu_4z_4,\\
&\rho\mu z'_4 = \lambda z_4.
\end{aligned}$$

L'équation caractéristique de cette homographie est

$$(\lambda - \rho\mu)^2(\lambda + \rho\mu)^2 = 0.$$

L'homographie H ne possède donc que deux points unis, deux plans unis et deux droites unies.

Les points unis sont les foyers x et

$$\bar{x} = (\lambda_1 - \mu_1)x + \lambda m - \mu n$$

de la droite j. Les plans unis sont les plans focaux $xx^{10}x^{01}$ ou $z_4 = 0$ et le plan $\bar{x}\bar{x}^{10}\bar{x}^{01}$ ou

$$\mu z_2 + \lambda z_3 + (\lambda_1 + \mu_1)z_4 = 0.$$

4. Pour obtenir les droites unies g_1, g_2, remarquons que nous avons

$$J_1 = \mu U_1 - \mu_1 U, \quad J_{-1} = \lambda V_1 - \lambda_1 V$$

et, si $\Omega(p, q) = 0$ est la condition pour que deux points p, q soient conjugués par rapport à $\underset{\sim}{Q}$,

$$\Omega(J_1, J_1) = -2\Delta\mu^2, \quad \Omega(J_{-1}, J_{-1}) = 2\Delta\lambda^2, \quad \Omega(J_1, J_{-1}) = 0,$$

où

$$\Delta = \left| x \quad x^{10} \quad x^{01} \quad x^{11} \right|.$$

On en conclut

$$G_1 = \lambda\mu(U_1 + V_1) - \lambda\mu_1 U - \mu\lambda_1 V,$$
$$G_2 = \lambda\mu(U_1 - V_1) - \lambda\mu_1 V + \mu\lambda_1 V.$$

La droite g_1 a pour équations

$$\frac{z_2}{\lambda\mu_1} = \frac{z_3}{\mu\lambda_1} = \frac{z_4}{-\lambda\mu};$$

elle passe par le point x et est située dans le plan $\bar{x}\bar{x}^{10}\bar{x}^{01}$.

La droite g_2 a pour équation

$$\lambda\mu z_1 - \mu\lambda_1 z_2 - \lambda\mu_1 z_3 = 0, \quad z_4 = 0;$$

elle passe par le point $\bar{x}$ et est située dans le plan $xx^{10}x^{01}$.

Liège, le 3 septembre 1955.