Bulletin de la Classe des sciences

Sur les quadriques de Lie des deux nappes d'une congruence W

Lucien Godeaux

Résumé
Formation de l'équation de la quadrique de Lie d'une nappe focale d'une congruence W rapportée au tétraèdre de Cartan attaché à l'autre nappe focale.

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Sur les quadriques de Lie des deux nappes d'une congruence W.

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Formation de l'équation de la quadrique de Lie d'une nappe focale d'une congruence W rapportée au tétraèdre de Cartan attaché à l'autre nappe focale.

Nous conservons les notations utilisées dans notre note parue le mois dernier [1].

Les quadriques de Lie attachées aux deux foyers d'une droite d'une congruence W et relatives aux nappes focales, se rencontrent suivant quatre droites formant un quadrilatère gauche. Deux côtés opposés de ce quadrilatère appartiennent à la quadrique Ψ_0, les deux autres à la quadrique Ψ_{-0}. Il est aisé de former l'équation des quadriques passant par ce quadrilatère gauche et d'en déduire l'équation des quadriques de Lie.

1. Soient (j) une congruence W, (x) et $(\bar{x})$ ses surfaces focales, u, v les asymptotiques de ces surfaces. A la congruence (j), nous attachons, dans S_5, quatre suites de Laplace L, $\bar{\mathrm{L}}$, $\mathcal{J}$. $\mathcal{P}$. La première comprend les points U, V qui représentent, sur l'hyperquadrique de Klein Q de S_5, les tangentes xx^{10}, xx^{01} au point x à la surface (x), la seconde joue un rôle analogue pour la surface $(\bar{x})$, la troisième contient le point J qui représente la droite j, la quatrième contient la seconde image P du complexe linéaire osculateur à la congruence (j) le long de la droite j.

La quadrique de Lie Φ attachée à la surface (x) au point x, est

[1] *Sur une homographie associée à une congruence W* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1955, pp. 870-874).

représentée dans S_5 par les plans UU_1U_2, VV_1V_2 ; la quadrique de Lie $\bar{\Phi}$ attachée à la surface $(\bar{x})$ au point x est représentée par les plans $\bar{U}\bar{U}_1\bar{U}_2$, $\bar{V}\bar{V}_1\bar{V}_2$. La quadrique Ψ_0 est représentée par les plans JJ_1J_2 et $PP_{-1}P_{-2}$; la quadrique Ψ_{-0} par les plans $JJ_{-1}\ J_{-2}$ et PP_1P_2.

Les plans UU_1U_2 et $\bar{U}\bar{U}_1\bar{U}_2$ se rencontrent suivant la droite J_1J_2, par conséquent les quadriques Φ, $\bar{\Phi}$ ont en commun deux droites r_1, r_2 qui appartiennent à la quadrique Ψ_0. De même, les quadriques Φ et $\bar{\Phi}$ ont en commun deux droites s_1, s_2 qui appartiennent à la quadrique Ψ_{-0}.

Les quadriques de Lie Φ et $\bar{\Phi}$ se rencontrent donc suivant les droites r_1, r_2 et s_1, s_2, qui forment un quadrilatère gauche. On peut aisément former les équations des droites r_1, r_2 et s_1, s_2, donc former l'équation du faisceau déterminé par Φ et $\bar{\Phi}$. La quadrique $\bar{\Phi}$ sera la quadrique de ce faisceau qui passe par $\bar{x}$.

2. Attachons au point x de la surface (x) le tétraèdre de Cartan. La quadrique de Lie Φ a pour équation

$$z_1z_4 + z_2z_3 = 0$$

et la quadrique Ψ_0,

$$\lambda(z_1z_4 + z_2z_3) + \mu(z_2^2 + \beta z_4^2) + 2\mu_1z_2z_4 + 2[\mu_2 + \mu_1 (\log bh_1)^{01}]z_4^2 = 0.$$

Si

$$z_4 = \rho_1z_2, \quad z_3 = -\rho_1z_1$$

sont les équations d'une des droites r_1, r_2, nous devons avoir

$$M_1\rho_1^2 + 2\mu_1\rho_1 + \lambda = 0$$

où

$$M_1 = 2\mu_2 + 2\mu_1 (\log bh_1)^{01} + \beta\mu.$$

Les racines ρ_1', ρ_1'' de cette équation donneront les droites r_1, r_2.

La quadrique Ψ_{-0} a pour équation

$$\mu(z_1z_4 + z_2z_3) + \lambda(z_3^2 + \alpha z_4^2) + 2\lambda_1z_3z_4 + 2[\lambda_2 + \lambda_1 (\log . ak_1)^{10}]z_4^2 = 0.$$

Si

$$z_4 = \rho_2z_3, \quad z_2 = -\rho_2z_1$$

sont les équations d'une droite s_1, s_2, on a

$$L_1\rho_2^2 + 2\lambda_1\rho_2 + \mu = 0,$$

où

$$L_1 = 2\lambda_2 + 2\lambda_1 \ (\log \ ak_1)^{10} + \alpha\lambda.$$

Les racines ρ_2', ρ_2'' de cette équation donneront les droites s_1, s_2.

Cela étant, l'équation d'une quadrique du faisceau déterminé par les quadriques de Lie Φ, $\bar{\Phi}$ peut s'écrire

$$\begin{aligned}(\rho_1'\rho_2'z_1 + \rho_1'z_2 + \rho_2'z_3 - z_4)(\rho_1''\rho_2''z_1 + \rho_1''z_2 + \rho_2''z_3 - z_4)\\ + k(\rho_1'\rho_2''z_1 + \rho_1'z_2 + \rho_2''z_3 - z_4)(\rho_1''\rho_2'z_1 + \rho_1''z_2 + \rho_2'z_3 - z_4) = 0,\end{aligned}$$

c'est-à-dire, tous calculs faits,

$$\begin{aligned}(1 + k)[\lambda\mu z_1^2 + \mu L_1 z_2^2 + \lambda M_1 z_3^2 + L_1 M_1 z_4^2 - 2\lambda_1\mu z_1 z_2 - 2\lambda\mu_1 z_1 z_3\\ - 2\lambda_1\mu_1 z_1 z_4 + 2\lambda_1\mu_1 z_2 z_3 + 2\mu_1 L_1 z_2 z_4 + 2\lambda_1 M_1 z_3 z_4]\\ - 2\sqrt{LM}(1 - k)(z_1 z_4 + z_2 z_3) = 0,\end{aligned}$$

en posant

$$L = \lambda_1^2 - \lambda L_1, \quad M = \mu_1^2 - \mu L_1.$$

La quadrique de Lie Φ de la surface (x) est donnée par $k = -1$.

3. Le point x a pour coordonnées locales

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = \lambda_1 - \mu_1 : \lambda : -\mu : 0.$$

La quadrique du faisceau passant par ce point est donnée par

$$(L + M)(1 + k) - 2\sqrt{LM}(1 - k) = 0.$$

Elle a donc pour équation

$$\begin{aligned}\lambda\mu z_1^2 + \mu L_1 z_2^2 + \lambda M_1 z_3^2 + L_1 M_1 z_4^2 - 2\lambda_1\mu z_1 z_2 - 2\lambda\mu_1 z_1 z_3\\ - 2\lambda_1\mu_1 z_1 z_4 + 2\lambda_1\mu_1 z_2 z_3 + 2\mu_1 L_1 z_2 z_4 + 2\lambda_1 M_1 z_3 z_4\\ - (L + M)(z_1 z_4 + z_2 z_3) = 0.\end{aligned}$$

Telle est l'équation de la quadrique de Lie $\bar{\Phi}$, attachée au point $\bar{x}$ de la surface $(\bar{x})$, par rapport au tétraèdre de Cartan attaché au point x de la surface (x).

Liège, le 28 octobre 1955.