Bulletin de la Classe des sciences

Sur une propriété de certains complexes linéaires en involution

Lucien Godeaux

Résumé

On associe à un complexe linéaire dépendant d'un paramètre le complexe linéaire en involution avec le premier et avec ses quatre premiers dérivés. La propriété est réciproque et on a ainsi deux familles de complexes linéaires qui ont mêmes quadriques caractéristiques. On détermine l'enveloppe de ces quadriques.

Citer ce document / Cite this document :

Godeaux Lucien. Sur une propriété de certains complexes linéaires en involution. In: Bulletin de la Classe des sciences, tome 41, 1955. pp. 78-82;

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1955.69277;

https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1955_num_41_1_69277;

Fichier pdf généré le 22/06/2023

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE

Sur une propriété de certains complexes linéaires en involution,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — On associe à un complexe linéaire dépendant d'un paramètre le complexe linéaire en involution avec le premier et avec ses quatre premiers dérivés. La propriété est réciproque et on a ainsi deux familles de complexes linéaires qui ont mêmes quadriques caractéristiques. On détermine l'enveloppe de ces quadriques.

Dans cette note, nous nous occupons d'une question rencontrée dans une recherche sur la théorie des surfaces. Nous considérons une famille de complexes linéaires dépendant d'un paramètre et nous attachons, à chaque complexe X de cette famille, le complexe linéaire Y en involution avec le complexe X et les quatre complexes linéaires dont les équations sont obtenues en dérivant successivement l'équation du complexe X par rapport au paramètre. Nous démontrons que la propriété est réciproque et que les complexes des deux familles ont mêmes quadriques caractéristiques. L'enveloppe de ces quadriques est constituée par les lieux des directrices des congruences linéaires caractéristiques des deux familles.

On pourrait, en utilisant les résultats obtenus ici, attacher à un complexe linéaire dépendant de deux paramètres u, v, une chaîne de complexes linéaires. En considérant X comme dépendant de u, on peut lui attacher un complexe linéaire X_1 et, en le considérant comme dépendant de v, un complexe linéaire X_{-1}. En considérant X_1 comme dépendant de v, on peut lui attacher un complexe linéaire X_2 et en considérant X_{-1} comme dépendant de u, on peut lui attacher un complexe linéaire X_{-2}. Et ainsi de suite. Nous ne développons pas l'étude de cette chaîne dans cette note.

1. Désignons par $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{42}, p_{34}$ les coordonnées radiales d'une droite p ; elles sont liées par la relation

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0. \tag{1}$$

Posons

$$\Omega(p, p') = p_{12}p'_{34} + p_{13}p'_{42} + \dots + p_{34}p'_{12},$$

de sorte que l'équation (1) peut s'écrire $\Omega(p, p) = 0$.

Considérons un complexe linéaire, non spécial,

$$\Omega(X, p) = 0, \tag{2}$$

dont les coefficients $X_{12}, X_{13}, \dots, X_{34}$ sont des fonctions (différentiables plusieurs fois) d'un paramètre v.

Considérons ensuite les quatre complexes linéaires

$$\Omega(X', p) = 0, \quad \Omega(X'', p) = 0, \quad \Omega(X''', p) = 0, \quad \Omega(X^{(4)}, p) = 0 \tag{3}$$

et soit

$$\Omega(Y, p) = 0 \tag{4}$$

un complexe linéaire en involution avec les cinq complexes (2) et (3). Nous allons montrer que le complexe (2) est en involution avec les complexes

$$\Omega(Y', p) = 0, \quad \Omega(Y'', p) = 0, \quad \Omega(Y''', p) = 0, \quad \Omega(Y^{(4)}, p) = 0. \tag{5}$$

Nous avons par hypothèse

$$\Omega(X,Y) = 0, \quad \Omega(X', Y) = 0, \quad \Omega(X'', Y) = 0, \quad \Omega(X''', Y) = 0,$$
$$\Omega(X^{(4)}, Y) = 0.$$

En dérivant par rapport à v les quatre premières de ces équations nous avons

$$\Omega(X, Y') = 0, \quad \Omega(X', Y') = 0, \quad \Omega(X'', Y') = 0, \quad \Omega(X''', Y') = 0.$$

En dérivant les trois premières de ces équations, nous avons

$$\Omega(X, Y'') = 0, \quad \Omega(X', Y'') = 0, \quad \Omega(X'', Y'') = 0.$$

Toujours par dérivation, on obtient successivement

$$\Omega(\mathrm{X}, \mathrm{Y}''') = 0, \quad \Omega(\mathrm{X}', \mathrm{Y}''') = 0,$$
$$\Omega(\mathrm{X}, \mathrm{Y}^{(4)}) = 0,$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

2. Représentons par $\mathrm{X}, \mathrm{X}', \ldots, \mathrm{X}^{(4)}$ les secondes images des complexes (2) et (3) dans l'espace S_5 à cinq dimensions et par $\mathrm{Y}, \mathrm{Y}', \ldots, \mathrm{Y}^{(4)}$ celles des complexes (4) et

$$\Omega(\mathrm{Y}', p) = 0, \quad \Omega(\mathrm{Y}'', p) = 0, \quad \Omega(\mathrm{Y}''', p) = 0, \quad \Omega(\mathrm{Y}^{(4)}, p) = 0.$$

Les secondes images de deux complexes linéaires en involution sont conjuguées par rapport à l'hyperquadrique de Klein Q, d'équation (1) ou $\Omega(p, p) = 0$.

D'après ce qui précède, les plans XX'X'' et YY'Y'' sont conjugués par rapport à Q. Par conséquent, les coniques sections de Q par ces plans représentent les deux modes de génératrices d'une quadrique Φ qui est à la fois la quadrique caractéristique de la famille de complexes (X) et celle de la famille de complexes (Y). *Les familles de complexes* (X), (Y) *ont donc même quadrique caractéristique.* Nous allons déterminer l'enveloppe de ces quadriques.

Si l'on veut déterminer l'équation de la quadrique Φ en partant du plan XX'X'', on posera, dans les équations des complexes $\mathrm{X}, \mathrm{X}', \mathrm{X}''$, $p_{12} = x_1 y_2 - x_2 y_1, \ldots$ et on écrira que ces équations sont compatibles en y_1, y_2, y_3, y_4. Cela conduira à quatre équations satisfaites lorsque l'on a

$$\begin{vmatrix} \mathrm{X}_{12} & \mathrm{X}_{13} & \mathrm{X}_{14} \\ \mathrm{X}'_{12} & \mathrm{X}'_{13} & \mathrm{X}'_{14} \\ \mathrm{X}''_{12} & \mathrm{X}''_{13} & \mathrm{X}''_{14} \end{vmatrix} x_1^2 + \ldots +$$

$$\left[\begin{vmatrix} \mathrm{X}_{12} & \mathrm{X}_{42} & \mathrm{X}_{13} \\ \mathrm{X}'_{12} & \mathrm{X}'_{22} & \mathrm{X}'_{13} \\ \mathrm{X}''_{12} & \mathrm{X}''_{12} & \mathrm{X}''_{13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathrm{X}_{14} & \mathrm{X}_{12} & \mathrm{X}_{23} \\ \mathrm{X}'_{14} & \mathrm{X}'_{12} & \mathrm{X}'_{23} \\ \mathrm{X}''_{14} & \mathrm{X}''_{12} & \mathrm{X}''_{23} \end{vmatrix} \right] x_1 x_2 + \ldots + 0.$$

C'est l'équation de la quadrique Φ, que nous pouvons écrire symboliquement sous la forme

$$\Sigma \begin{vmatrix} X \\ X' \\ X'' \end{vmatrix} xx = 0.$$

Dérivons cette équation par rapport à v ; nous obtenons

$$\Sigma \begin{vmatrix} X \\ X' \\ X''' \end{vmatrix} xx = 0.$$

Par conséquent, les droites représentées dans S_5 par les points d'intersection de Q avec la droite XX' font partie de la courbe caractéristique de la quadrique Φ.

En partant du plan $YY'Y''$, on peut également écrire l'équation de la quadrique Φ sous la forme symbolique.

$$\Sigma \begin{vmatrix} Y \\ Y' \\ Y'' \end{vmatrix} xx = 0$$

et en dérivant par rapport à v, on voit que les droites représentées dans S_5 par les intersections de Q avec la droite YY' font partie de la caractéristique de la quadrique Φ.

3. La droite XX' est la seconde image dans S_5 de la congruence linéaire caractéristique du complexe X dans la famille X ; par conséquent, les points de rencontre de cette droite avec Q représentent les directrices de cette congruence. De même, les points de rencontre de la droite YY' avec Q représentent les directrices de la congruence caractéristique du complexe Y dans la famille (Y).

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Si l'on considère un complexe linéaire X *dépendant d'un paramètre et si l'on désigne par* Y *le complexe linéaire en involution avec* *les complexes* X, X', X'', X''', $X^{(4)}$, *le complexe* X *est également en involution avec les complexes* Y', Y'', Y''', $Y^{(4)}$. *Les complexes des deux familles* (X), (Y) *ont mêmes quadriques caractéristiques et l'enveloppe de ces quadriques est formée des lieux des directrices des congruences linéaires caractéristiques de chacune des deux familles* (X), (Y).

Liège, le 19 janvier 1955.