Sur le lieu des points de contact double des surfaces de deux systèmes linéaires

par M. LUCIEN GODEAUX
Docteur en Sciences physiques et mathématiques

Il y a quelques années, M. Corradino Mineo s'est occupé de la surface engendrée par les points paraboliques des surfaces d'un faisceau ([1]). En cherchant à étendre ces recherches aux variétés algébriques à trois dimensions, je suis arrivé à la proposition suivante, qui ne me semble pas dépourvue d'intérêt.

On considère, sur une varieté algébrique à trois dimensions, deux systèmes linéaires triplement infinis de surfaces algébriques ; on construit les surfaces lieux des points où les surfaces d'un des systémes et les surfaces d'un faisceau de l'autre, ont un contact double. Toutes les surfaces ainsi ebtenues appartiennent à un même système linéaire, quel que soit l'ordre dans lequel on considère les systèmes donnés.

Comme application, on peut indiquer une construction du système quadricanonique d'une variété algébrique à trois dimensions.

1. Soit V une variété algébrique à trois dimensions supposée dépourvue de singularités. Sur cette variété on donne deux systèmes de surfaces $|F_1|$, $|F_2|$, linéaires, triplement infinis et réguliers (sans points-base). Nous supposerons généralement que les deux systèmes donnés $|F_1|$, $|F_2|$ sont indépendants; cependant, dans certains cas, nous supposerons que l'un des systèmes, $|F_1|$, appartient à l'involution linéaire ∞^3 déterminée par $|F_2|$.

Fixons l'attention sur une surface $\overline{F}_1$ du premier système. Les surfaces F_2 déterminent sur $\overline{F}_1$ un système linéaire ∞^3

---

(1) *Sul luogo dei punti parabolici delle superficie d'un fascio.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1906, vol. XXI, pp. 211-217.

de courbes $(\overline{F}_1\ F_2)$, et parmi ces courbes, il y en a ∞^1 qui possèdent un point de rebroussement. Les surfaces F_2 qui découpent sur la surface $\overline{F}_1$ des courbes ayant une telle singularité ont un contact double avec cette surface au point de rebroussement. Le lieu de ces points de rebroussement est une certaine courbe $(\overline{F}_1\ \overline{F}_2)_r$. On sait que l'on a, par un théorème établi à la fois par MM. Pannelli (1) et Bonnessen (2),

$$(1) \qquad (\overline{F}_1\ F_2)_r \equiv 4\ (\overline{F}_1\ \overline{F}'_1) + 8\ (\overline{F}_1\ F_2),$$

$|\ F'_1\ |$ désignant le système adjoint au système $|\ F_1\ |$.

Lorsque la surface $\overline{F}_1$ décrit un faisceau $|\ \overline{F}_1\ |$ (du système $|\ F_1\ |$), le lieu de la courbe $(F_1\ F_2)_r$ est une certaine surface ψ_1 passant un certain nombre x de fois par la courbe $(\overline{F}_1\ \overline{F}_1)$, base du faisceau $|\ \overline{F}_1\ |$ considéré. On a ainsi

$$(\overline{F}_1\ \psi_1) \equiv (\overline{F}_1\ F_2)_r + x\ (\overline{F}_1\ \overline{F}'),$$

ou, par la relation (1),

$$(\overline{F}_1\ \psi_1) \equiv 4\ (\overline{F}_1\ F'_1) + x\ (\overline{F}_1\ \overline{F}_1) + 8\ (\overline{F}_1\ F_2).$$

Par un théorème classique de M. Severi (3), on en déduit

$$(2) \qquad \psi_1 \equiv 4\, F'_1 + x\, F_1 + 8\, F_2.$$

Cherchons à déterminer la quantité x. Cette quantité peut dépendre de caractères de la variété V et des caractères des systèmes linéaires $|\ F_1\ |$, $|\ F_2\ |$.

Supposons en premier lieu que le système $|\ F_1\ |$ appartient à l'involution déterminée par le système $|\ F_2\ |$. Soient n_1, n_2

---

(1) *Sui sistemi lineari triplamente infiniti di curve tracciati sopra una superficie algebrica*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1905, vol. XX, pp. 34-38

(2) *Sur les séries linéaires triplement infinies de courbes algébriques sur une surface algébrique*. Oversigt over det kgl. Danske Videns kabernes selskads Forhandlinger, 1906, pp. 281-293.

(3) *Osservazioni varie di Geometria sopro una superficie algebrica e sopra una varieta*. Atti del R. Istituto Veneto, 1905-1906, t. LXV, pp. 625-643.

les degrés des systèmes $|F_1|$, $|F_2|$; dans le cas actuel, on a $n_1 = \lambda n_2$.

Aux surfaces F_2 du système $|F_2|$, faisons correspondre par une homographie les plans F_2^* d'un espace linéaire à trois dimensions V^*; la variété V sera ainsi représentée par l'espace n_2^{uple} V^*. Aux surfaces F_1 (et en particulier $\overline{F}_1$) correspondront des surfaces F_1^* (ou F_1^*) formant un système linéaire $|F_1^*|$ (ou un faisceau $|F_1^*|$). A la surface ψ_1 correspondra la surface ψ_1^* lieu des points paraboliques des surfaces du faisceau $|F_1^*|$. Une surface F_1^* est d'ordre λ, donc la surface ψ_1^* est d'ordre $8(\lambda - 1)$ (1).

Représentons par $[x\,y\,z]$ le nombre de points communs à trois surfaces x, y, z. La formule (2) donne

$$[\psi_1^*\,F_2^*\,F_2^*] = 4\,[F'^*_1, F_2^*, F_2^*] + x\,[F_1^*, F_2^*, F_2^*] \\ + 8\,[F_2^*, F_2^*, F_2^*].$$

Par suite, comme la surface adjointe à F_1^* est d'ordre $\lambda - 4$, on a

$$8(\lambda - 1) = 4(\lambda - 4) + \lambda x + 8,$$

d'où $x = 4$.

Nous parvenons donc à ce résultat que si l'on fait $n_1 = \lambda n_2$ dans

$$x = x(n_1, n_2, P_a, P_g, \ldots),$$

cette fonction se réduit à 4, quelles que soient les quantités (entières) qui y entrent. On en déduit aisément que cette fonction est constante et égale à quatre. La relation (2) devient ainsi, que les systèmes $|F_1|$, $|F_2|$ soient indépendants ou non,

(3) $$\psi_1 \equiv 4\,F'_1 + 4\,F_1 + 8\,F_2,$$

ou, en désignant par $|L|$ le système canonique de V,

(4) $$\psi_1 \equiv 4\,L + 8\,F_1 + 8\,F_2.$$

Soit ψ_2 la surface obtenue en renversant les rôles des systèmes $|F_1|$, $|F_2|$. La relation (4) donne

(5) $$\Psi_1 \equiv \Psi_2.$$

(1) MINEO, loc. cit.

On étendra les égalités (3), (4) et (5) aux cas de systèmes linéaires pourvus de points-base en effectuant des transformations birationnelles convenables de la variété V.

THÉORÈME. — *Si sur une variété à trois dimensions*, V, *on considère deux systèmes linéaires triplement infinis de surfaces algébriques, les surfaces lieux des points de contact doubles des surfaces d'un système avec les surfaces d'un faisceau de l'autre système, forment un même système linéaire, quelque soit l'ordre dans lequel on opère sur les systèmes donnés.*

2. Considérons actuellement sur la variété V un système linéaire quintuplement infini au moins de surfaces $|F|$. Dans ce système choisissons un faisceau $|\overline{F}|$ et un système triplement infini $|\overline{\overline{F}}|$ n'ayant aucune surface en commun. Désignons par Φ le lieu des points où des surfaces $\overline{F}$, $\overline{\overline{F}}$ ont des contacts doubles. D'après ce que nous venons de voir, nous avons

$$\Phi \equiv 4\overline{F}' + 4\overline{F} + 8\overline{\overline{F}},$$

c'est-à-dire,

$$\Phi \equiv 4F' + 12F.$$

De cette formule on déduit

$$|\Phi - 16F| = |4L|. \tag{6}$$

THÉORÈME. — *Si l'on donne sur une variété à trois dimensions un système linéaire de surfaces* ∞_5 *ou moins, le système obtenu en sommant le système quadricanonique et seize fois le système donné, contient les surfaces lieu des points en lesquels une surface d'un faisceau et une surface d'un système* ∞^3 *choisis dans le système donné ont un contact double.*

3. Désignons par p_a, p, n, ω respectivement le genre arithmétique, le genre de la courbe commune à deux surfaces, le degré et l'invariant de Castelnuovo et Enriques du système $|F|$. Soient r_a, r, ν le genre arithmétique, le genre et le degré du système $|\Phi|$.

La formule (6) permet d'écrire

$$r_a = [\Phi] = [4\,\mathrm{L}] + [16\,\mathrm{F}] + [4\,\mathrm{L}, 16\,\mathrm{F}], \text{ (1)}$$

d'où l'on déduit par un calcul simple

$$r_a = 4(\Omega_2 + \Omega_1 + \Omega_0) + 4^2 p_a + 4^2.77.p - 4^2.95\,n - 2.4^2.\omega 11 \times 65.$$

De là

Théorème. — *L'expression*

$$\frac{1}{16} r_a - p_a - 77p + 95\,n + 2\,\omega$$

est un invariant relatif de la variété V.

De (6), on déduit

$$r = [\Phi^2] = [(4\,\mathrm{L})^2] + [(16\,\mathrm{F})^2] + 2\,[4\,\mathrm{L}, 16\,\mathrm{F}]$$
$$+ 2.4^4\,[\mathrm{L}^2, \mathrm{F}] + 2.4^5\,[\mathrm{F}, \mathrm{F}^2] - 3.$$

Par le calcul, on arrive alors à l'équation

$$r = 4^2\,\Omega_1 + 4^2.6\,\Omega_0 + 4^4.\,18\,p - 4^5.5\,n + 4^3.7\,\omega - 3881,$$

et l'on en déduit :

Théorème. — *L'expression*

$$\frac{1}{64}\,r - 7\ 2p + 80\,n - 7\,\omega$$

est un invariant relatif de la variété V.

De la relation (6), on tire encore

$$\nu = [\Phi^3] = 4^3\,[\mathrm{L}^3] + 3.4^4\,[\mathrm{L}^2\,\mathrm{F}] + 3.4^5\,[\mathrm{L}\,\mathrm{F}^2] + 4^6\,[\mathrm{F}^3],$$

et ensuite

$$\nu = 4^3\,\Omega_0 + 3.4^4\,\omega + 3.4^5 p + 4^4 n - 3.5.4^4,$$

et enfin :

Théorème. — *L'expression*

$$\frac{1}{256}\,\nu - 3\,\omega - 12p - n$$

est un invariant relatif de la variété V.

Liége, 10 juin 1910.

---

(1) Nous représentons respectivement par $[x]$, $[x, y]$, $[x, y, z]$ le genre arithmétique d'une surface x, le genre de la courbe d'intersection de deux surfaces x, y, et enfin le nombre de points communs aux trois surfaces x, y, z.