Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels

5. On a vu le rôle que jouent dans la détermination des asymptotiques *des divers ordres* ($\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$, ...) les relations linéaires identiques entre les différentielles $d^2 z$, $d^3 z$, ... : ces relations, rencontrées par Halphen pour les degrés 3, 4, 5 à l'occasion de recherches sur le contact des surfaces, ont été signalées d'une manière générale par M. Darboux (*Bulletin des Sciences math.*, 1881); j'ai fait pour les surfaces de degré 4 ou 5 une étude systématique de leurs conséquences, dont je donnerai prochainement les résultats généraux.

Je ferai observer en terminant qu'il suffit de transformer convenablement les coordonnées de droites en coordonnées de sphères pour obtenir des résultats relatifs aux *lignes de courbure;* je me réserve d'y revenir en détail. On remarquera, par exemple, l'analogie entre l'équation des lignes de courbure de la surface des ondes et celle des asymptotiques des surfaces du troisième degré.

GÉOMÉTRIE. — *Sur les congruences linéaires de coniques dotées de deux lignes singulières, ou d'un point principal et d'une ligne singulière.* Note de M. **Lucien Godeaux**, présentée par M. G. Humbert.

I. Considérons les coniques s'appuyant en deux points sur une courbe C_1, d'ordre $\lambda_1 (\geqq 2)$ et en quatre points sur une courbe gauche C_2, d'ordre $\lambda_2 (\geqq 4)$; elles forment une congruence Σ. Proposons-nous de déterminer C_1 et C_2 de manière que Σ soit d'ordre 1. Désignons par n la classe de la surface enveloppée par les plans des coniques de Σ, par ν le nombre de coniques de Σ situées dans un de ces plans.

Le lieu des coniques de Σ dont les plans passent par un point P est une surface F, d'ordre $2n\nu + 1$. Deux surfaces analogues à F ont en commun, outre les courbes C_1, C_2, $n\nu$ coniques de Σ et certaines droites qui se présentent comme des coniques dégénérées de Σ. Ces droites peuvent être des quadrisécantes de C_2 bisécantes de C_1, elles sont alors simples pour F; ou des quadrisécantes de C_2, elles sont alors multiples d'indice $\binom{\lambda_1}{2}$ pour F; ou des trisécantes de C_2 s'appuyant sur C_1, elles sont multiples d'indice $\lambda_1 \lambda_2$ pour F; ou enfin des bisécantes communes aux courbes C_1, C_2; elles sont dans ce cas multiples d'indice $\binom{\lambda_2 - 2}{2}$ pour F. D'une manière générale, si l'on a respectivement p_1, p_2, p_3, p_4 droites de chacune de ces catégories, et si la surface F passe q_1 fois par C_1, q_2 fois par C_2, on a

$$(2n\nu + 1)^2 = 2n\nu + \lambda_1 q_1^2 + \lambda_2 q_2^2 + x,$$

étant posé

$$x = p_1 + p_2 \binom{\lambda_1}{2}^2 + p_3 \lambda_1^2 \lambda_2^2 + p_4 \binom{\lambda_2 - 2}{2}^2.$$

Une conique de Σ rencontre une surface F à laquelle elle n'appartient pas en des points de C_1, ou de C_2, donc

$$2n\nu+1=q_1+2q_2.$$

En éliminant $n\nu$ entre ces équations, on a

$$(\lambda_2-4)q_2^2-2(2q_1-1)q_2+(\lambda_1-1)q_1^2+q_1+x-1=0.$$

q_2 est réel, donc

$$(4\lambda_1+\lambda_2-\lambda_1\lambda_2)q_1^2-\lambda_2(q_1-1)-(\lambda_2-4)x-3\geqq 0,$$

c'est-à-dire, puisque $\lambda_2\geqq 4$, $q_1\geqq 1$,

$$4\lambda_2+\lambda_2-\lambda_1\lambda_2>0.$$

Les valeurs extrêmes de λ_1, λ_2, p_1, p_2, p_3, p_4 sont ainsi déterminées et l'on trouve pour les congruences cherchées, les cas suivants :

1° C_1 est une courbe gauche hyperelliptique admettant une infinité simple de 2ν — sécantes et C_2 est une quartique gauche elliptique s'appuyant en $2(\lambda_1-1)$ points sur C_1.

2° C_1 est une courbe plane d'ordre $2t+1$ ayant quatre points t^{uples} sur la quartique gauche elliptique C_2; C_1 est hyperelliptique de genre inférieur à t.

3° C_1 est une cubique gauche et C_2 une quartique gauche rationnelle s'appuyant en six points sur C_1.

4° C_1 est une conique et C_2 est une sextique de genre deux s'appuyant en six points sur C_1.

5° C_1 est une conique et C_2 est une quintique de genre deux s'appuyant en quatre points sur C_1.

6° C_1 est une cubique gauche et C_2 est une quintique à point triple s'appuyant en six points sur C_1.

Ces congruences avaient été rencontrées par MM. Montesano (*Rend. di Napoli*, 1895) et Pieri (*Atti di Torino*, 1893).

II. Considérons les coniques passant par un point fixe O (point principal) et s'appuyant en quatre points sur une courbe C d'ordre λ, et supposons que ces coniques doivent former une congruence linéaire Σ. Si ν est le nombre de coniques de Σ situées dans un plan passant par O, la surface F, lieu des coniques dont les plans passent par un point P, est d'ordre $2\nu+1$ et a en O un point multiple d'ordre $\nu+1$. Si p est le nombre des bisécantes de C issue de O, et si t est la multiplicité de O pour C, on a

$$(2\nu+1)^2 = 2\nu + \lambda q^2 + x,$$
$$3\nu + 1 = 4q,$$
$$x = p\left(\frac{\lambda - t - 2}{2}\right)^2,$$

q étant la multiplicité de C pour F. On en déduit

$$q^2(64 - 9\lambda) = 8q - 7 + 9x,$$

d'où $4 \leqq \lambda \leqq 7$. Partant de la limite supérieure de p, on établit que la courbe C est : 1° une quartique gauche rationnelle, ou 2° une quintique elliptique passant par O, ou 3° une quintique gauche dotée d'un point triple, ou 4° une sextique de genre deux passant doublement par le point principal.

CINÉMATIQUE. — *La loi des courbures des profils superficiels conjugués.* Note de M. G. **Kœnigs**.

1. Une surface F étant donnée, solidaire d'un corps solide S mobile par rapport à un autre S', cette surface possède dans S' une surface enveloppe F', qu'elle touche à chaque instant tout le long d'une courbe de contact (c). Les éléments de courbure de la surface F' en un point M de la courbe (c) dépendent du mouvement et des éléments analogues de la surface F au même point. C'est cette loi de dépendance que j'ai réussi à mettre sous une forme simple qui se traduit encore par une homographie à éléments doubles coïncidents, ainsi qu'on le constate déjà dans les formules d'Euler et dans les généralisations que j'en ai données au Tome XXXV des *Savants étrangers*.

2. Sur la normale MN commune aux surfaces F et F' se groupent les éléments de courbure savoir : plans principaux Π_1, Π_2 de la surface F et centres de courbure C_1, C_2 correspondants; éléments analogues Π'_1, Π'_2, C'_1, C'_2 pour la surface F'.

Mais un autre élément important existe encore sur la normale, c'est la corrélation homographique qui relie un point P de la normale MN et le plan Π, mené par MN, qui est tangent en P à la normalie engendrée par la normale quand son pied M décrit la courbe (c). Cette corrélation H est constructible dès que l'on connaît les éléments de courbure de F et le complexe linéaire $\mathcal{L}$ lieu des droites normales aux trajectoires de leurs points.

3. A côté de cette corrélation H s'en place une autre G, qui s'en déduit