Bulletin de la Classe des sciences

# Sur les points de diramation de seconde espèce et de première catégorie d'une surface multiple

Lucien Godeaux

**Résumé**
Étude des points de diramation d'une surface multiple en lesquels le cône tangent se scinde en deux cônes rationnels ayant une génératrice commune.

# COMMUNICATIONS DES MEMBRES

## GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

## Sur les points de diramation de seconde espèce et de première catégorie d'une surface multiple,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

*Résumé.* — Étude des points de diramation d'une surface multiple en lesquels le cône tangent se scinde en deux cônes rationnels ayant une génératrice commune.

Dans l'étude des points de diramation de seconde espèce d'une surface multiple (1), nous avons été conduit à partager ces points en trois catégories suivant que le cône tangent en ce point se scinde en deux, trois ou quatre cônes (rationnels). Nous nous occupons ici des points de la première catégorie. Si la surface est multiple d'ordre $p$ premier impair et si, en un point de diramation, le cône tangent se scinde en deux cônes rationnels d'ordres $a$, $b$, on a

$$p = (t + 1)\ ab + a + b.$$

Au point de diramation considéré font suite $\left[\frac{t}{2}\right]$ points doubles biplanaires infiniment voisins successifs dont le dernier est ordinaire si $t$ est pair et suivi d'un point double conique si $t$ est impair.

(1) *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique.* Actualités scient., n° 270 (Paris, Hermann, 1935) ; *Mémoire sur les surfaces multiples* (Mémoires in-8° de l'Acad. roy. de Belgique, 1952); *Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples.* Deuxième colloque de Géométrie algébrique du C. B. R. M., tenu à Liège en 1952 (Liège, Thone et Paris, Masson, 1952, pp. 235-241).

**1**. Soient F une surface algébrique contenant une involution cyclique I d'ordre premier $p > 2$, n'ayant qu'un nombre fini de points unis et $\Phi$ une surface normale, image de cette involution, sur laquelle les points de diramation sont isolés. Désignons par $\Gamma_0$ les sections hyperplanes de $\Phi$, par $C_0$ leurs transformées sur F, par $|C|$ le système complet contenant les courbes $C_0$. On peut choisir F de telle sorte que $|C|$ contienne $p$ systèmes linéaires partiels $|C_0|, |C_1|, \ldots, |C_{p-1}|$ appartenant à l'involution I, les $p - 1$ derniers systèmes ayant comme points-base les points unis de I et $|C_0|$ étant dépourvu de points-base. Nous désignerons par $|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_{p-1}|$ les systèmes linéaires complets qui correspondent sur $\Phi$ respectivement aux systèmes $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_{p-1}|$.

Soit A un point de F uni de seconde espèce et de première catégorie de l'involution I et soit A' le point de diramation qui lui correspond sur $\Phi$. Rappelons la définition de ce point.

Désignons par $|C_0'|$ le système linéaire formé par les courbes $C_0$ passant par A. Les courbes $C_0'$ ont en A la multiplicité $\lambda_1 + \mu_1$ avec $\lambda_1$ tangentes confondues et $\mu_1$ tangentes confondues avec les deux directions unies issues de A. Soient $\alpha$ et $\beta$ les nombres entiers compris entre 1 et $p$ associés à A ($\alpha\beta - 1$ est multiple de $p$). On a

$$\lambda + \alpha\mu = hp, \quad \mu + \beta\lambda = h'p$$

et le point uni de seconde espèce A appartient à la première catégorie si l'on a $h = h' = 1$. Posons

$$p = a\alpha + b = b'\beta + a', \quad (b < \alpha, a' < \beta).$$

On a nécessairement

$$\lambda = b = b', \mu = a = a'.$$

Les courbes $C_0'$ ont en A la multiplicité $a + b$ et passent $a$ fois par les points $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \ldots, (\alpha, \alpha - 1)$ infiniment voisins successifs de A et $b$ fois par les points $(\beta, 1), (\beta, 2), \ldots, (\beta, \beta - 1)$ infiniment voisins successifs de A.

En A', la surface $\Phi$ a un cône tangent d'ordre $a + b$, se décomposant en deux cônes rationnels d'ordres $a$, $b$, ayant une génératrice en commun.

2. Désignons par $\Phi_1$ la surface projection de $\Phi$ à partir de A' sur un hyperplan de l'espace ambiant. Les sections hyperplanes $\Gamma_0'$ de $\Phi_1$ correspondent aux courbes $C_0'$ de F. Aux domaines des points $(\alpha, \alpha - 1)$, $(\beta, \beta - 1)$ correspondent sur $\Phi_1$ des courbes rationnelles $\sigma_\alpha$ d'ordre $a$ et $\sigma_\beta$ d'ordre $b$ se coupant en un point $A_1'$. (On obtient le cône tangent à $\Phi$ en A en projetant $\sigma_\alpha$ et $\sigma_\beta$ de ce point).

Le point $A_1'$ peut être simple ou double pour la surface $\Phi_1$. Dans le cas général, il est équivalent à un ensemble de courbes rationnelles $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_t$, de degré virtuel $-2$, dont chacune rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres. De plus, $\rho_1$ rencontre $\sigma_\alpha$ en un point et $\rho_t$ rencontre $\sigma_\beta$ en un point.

On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_\alpha + \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_t + \sigma_\beta$$

et $\sigma_\alpha$ est de degré virtuel $-(a+1)$, $\sigma_\beta$ de degré virtuel $-(b+1)$.

Comme nous l'avons montré, les courbes $\Gamma_1$ rencontrent $\sigma_\alpha$ en un point variable, mais ne rencontre pas les autres composantes de A'. De plus, on a

$$p\Gamma_0 \equiv p\Gamma_1 + \eta_0\sigma_\alpha + \eta_1\rho_1 + \eta_2\rho_2 + \ldots + \eta_t\rho_t + \eta\sigma_\beta + \Delta,$$

où les $\eta$ sont des entiers.

En exprimant que les courbes $\Gamma_1$ ne rencontrent pas $\sigma_\beta, \rho_t, \ldots, \rho_1$, on trouve

$$\eta_t = (b+1)\eta,$$

$$\eta_{t-1} = (2b+1)\eta, \ldots, \quad \eta_{t-i} = [(i+1)b+1]\eta, \ldots, \quad \eta_1 = (tb+1)\eta,$$

$$\eta_0 = [(t+1)b+1]\eta.$$

En exprimant que les courbes $\Gamma_1$ coupent $\eta_\beta$ en un point, on a

$$p = (a+1)\eta_0 - \eta_1 = [(t+1)ab + a + b]\eta.$$

Comme $p$ est premier, on a $\eta = 1$ et

$$p = (t+1)ab + a + b.$$

On en déduit

$$\alpha = (t+1)b + 1, \qquad \beta = (t+1)a + 1$$

et

$$\alpha\beta - 1 = (t+1)p.$$

**3.** Dans nos recherches antérieures, nous avons déterminé une suite de systèmes linéaires $|C_0''|$, $|C_0'''|$, ... dont les multiplicités en A vont en croissant. Les courbes $C_0^{(i)}$ ont en A la multiplicité $\lambda_i + \mu_i$, où l'on a

$$\lambda_i + \alpha\mu_i \equiv 0, \qquad \mu_i + \beta\lambda_i \equiv 0, \qquad (\mathrm{mod.}\ p)$$

ces courbes ayant $\lambda_i$ tangentes en A confondues avec la droite passant par $(\beta, 1)$ et $\mu_i$ avec la droite passant par $(\alpha, 1)$.

Actuellement on a les solutions

$$\lambda = kb,\ \mu = ka, \qquad [k(a+b) \leqslant p-1],$$
$$\lambda = kb + [(t+1)b+1]i,\ \mu = ka - i, \quad [k(a+b) + (t+1)bi \leqslant p-1],$$
$$\lambda = kb - i,\ \mu = ka + [(t+1)a+1]i, \quad [k(a+b) + (t+1)ai \leqslant p-1].$$

Nous pouvons supposer $\alpha \neq \beta$, car si $\alpha = \beta$, on a

$$\alpha = \beta = p - 1, \quad a = 1, \quad b = 1$$

et le point A est ce que nous avons appelé un point uni symétrique. Le point A′ est un point double biplanaire de $\Phi$ et nous avons étudié ailleurs ce cas [1].

D'une manière précise, $p = t + 3$ étant impair, $t$ est pair et au point double biplanaire A′ de $\Phi$ font suite $\frac{t}{2}$ points biplanaires infiniment voisins successifs dont le dernier est ordinaire.

Cela étant, on a $a \neq b$ et nous supposerons $a > b$ et par suite $\alpha < \beta$.

Soient $\Phi_2$, $\Phi_3$, ... les surfaces, projections de $\Phi_1$, dont les sections hyperplanes $\Gamma_0''$, $\Gamma_0'''$, ... correspondent respectivement aux courbes $C_0''$, $C_0'''$, ....

---

(1) *Sur les points unis symétriques des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Revista de la Universidad de Tucuman, 1940, pp. 283-291).

Si nous avons $\lambda_2 = 2b$, $\mu_2 = 2a$, sur la surface $\Phi_2$ se trouvent tracées la courbe $\sigma_\alpha$, d'ordre $a - 1$, une droite $\rho_1$ coupant $\sigma_\alpha$ en un point, une droite $\rho_t$ coupant $\rho_1$ en un point $A'_2$, la courbe $\sigma_\beta$, d'ordre $b - 1$, coupant $\rho_t$ en un point.

Si $\lambda_3 = 3b$, $\mu_3 = 3a$, sur la surface $\Phi_3$, projection de $\Phi_2$ à partir de $A'_2$, se trouvent tracées les courbes $\sigma_\alpha$ d'ordre $a - 1$ et $\sigma_\beta$ d'ordre $b - 1$, une droite $\rho_2$ rencontrant $\alpha_\alpha$ en un point singulier qui représente $\rho_1$, une droite $\rho_{t-1}$ rencontrant $\sigma_\beta$ en un point singulier qui représente $\rho_t$ et $\rho_2$ en un point $A'_3$, double si $t > 4$. Et ainsi de suite jusqu'au moment où l'on arrive à des solutions $\lambda_i$, $\mu_i$ telles que l'on n'ait plus $\lambda_i = ib$, $\mu_i = ia$.

Soit $q$ le plus grand entier satisfaisant à l'inégalité

$$(q - 1)(a + b) < (t + 1)b.$$

On a alors

$$\lambda_q = qb,\ \mu_q = qa\ ;\ \lambda_{q+1} = (t + 2)b + 1,\ \mu_{q+1} = a - 1.$$

Le surface $\Phi_q$ contient la courbe $\sigma_\alpha$, d'ordre $a - 1$, une droite $\rho_{q-1}$ rencontrant $\sigma_\alpha$ en un point, une droite $\rho_{t-q+1}$ rencontrant $\rho_{q-1}$ en un point $A'_q$, la courbe $\sigma_\beta$, d'ordre $b - 1$, rencontrant $\rho_{t-q+1}$ en un point.

La surface $\Phi_{q+1}$ est la projection de $\Phi_q$ à partir de $A'_q$. Les courbes $C_0^{(q+1)}$ passent $a - 1$ fois par les points $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, a - 1)$. Le point $A'_q$ peut être simple ou double pour $\Phi_q$.

Les courbes $C_0^{(q+2)}$ ne peuvent passer $a - 1$ fois par le point $(\alpha, a - 1)$ ; elles passent $a - 2$ fois par ce point et $\Phi_{q+2}$ est la projection de $\Phi_{q+1}$ à partir d'un point appartenant à $\sigma_\alpha$. Sur la surface $\Phi_{q+2}$, la courbe $\sigma_\alpha$ a l'ordre $a - 2$.

**4**. Lorsque $t$ est assez grand pour que l'on ait $2q < t$, on peut se rendre compte de la genèse des singularités en remarquant que l'on a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(q)} + \sigma_\alpha + 2\rho_1 + 3\rho_2 + \ldots + q\rho_{q-1} + q(\rho_q + \ldots + \rho_{t-q}) \\ + q\rho_{t-q+1} + \ldots + 2\rho_t + \sigma_\beta$$

et

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(q+1)} + \sigma_\alpha + 2\beta_1 + \ldots + q\beta_{q-1} + (q + 1)(\rho_q + \ldots + \rho_{t-q}) \\ + q\rho_{t-q+1} + \ldots + 2\rho_t + \sigma_\beta.$$

Sur la surface $\Phi_{q+1}$ sont tracées la courbe $\sigma_a$ d'ordre $a - 1$, la droite $\rho_q$ rencontrant $\sigma_a$ en un point $A''_{q+1}$, la droite $\rho_{t-q}$ coupant $\rho_q$ en un point et la courbe $\sigma_\beta$ d'ordre $b - 1$ coupant $\rho_{t-q}$ en un point.

La surface $\Phi_{q+2}$ est la projection de $\Phi_{q+1}$ à partir de $A''_{q+1}$ et on a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(q+2)} + \sigma_a + 3\rho_1 + 4\rho_2 + \dots + (q+1)\rho_{q-1}$$
$$+ (q+1)(\rho_q + \dots + \rho_{t-q}) + q\rho_{t-q} + \dots + 2\rho_t + \sigma_\beta.$$

Sur la surface $\Phi_{q+2}$ sont tracées la courbe $\sigma_a$, d'ordre $a - 2$, la droite $\rho_1$ rencontrant $\sigma_a$ en un point, la droite $\rho_{q-1}$ rencontrant $\rho_1$ en un point, la droite $\rho_{t-q}$ rencontrant $\rho_{q-2}$ en un point. Et ainsi de suite.

Liège, le 28 juin 1955.