Bulletin de la Classe des sciences

Sur les involutions cycliques appartenant à la surface des couples de points d'une courbe algébrique

Lucien Godeaux

Résumé
La surface représentant les couples de points d'une courbe algébrique contenant une involution cyclique d'ordre premier impair, contient une involution de même ordre, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. On détermine la structure de ceux-ci et on en fait une application à un cas particulier.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les involutions cycliques appartenant à la surface des couples de points d'une courbe algébrique.

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — La surface représentant les couples de points d'une courbe algébrique contenant une involution cyclique d'ordre premier impair, contient une involution de même ordre, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. On détermine la structure de ceux-ci et on en fait une application à un cas particulier.

Nous considérons une courbe algébrique L contenant une involution cyclique γ_p d'ordre premier impair p et la surface F qui représente les couples de points de la courbe L. Sur cette surface, γ_p détermine une involution I de même ordre p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Ceux-ci sont de deux sortes : ou bien un de ces points correspond à un couple de points unis de γ_p, ou bien il représente un de ces points unis compté deux fois. Nous avons indiqué une méthode permettant de déterminer la structure des points unis de la première sorte de l'involution I (1), et nous avons déterminé la structure des points unis de la seconde sorte (2). Nous revenons ici sur les points unis de la première sorte pour exposer une méthode plus simple que la précédente pour en déterminer la structure. Nous appliquons notre procédé au cas où l'involution γ_p est rationnelle et possède alors trois points unis. Ce cas particulier présente un certain intérêt, parce qu'il est probable que la surface qui représente

(1) *Involutions irrégulières appartenant à la surface des couples de points d'une courbe algébrique* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1950, pp. 102-112).

(2) *Sur la structure des points unis d'une involution appartenant à la surface des couples de points d'une courbe algébrique* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1950, pp. 383-387).

l'involution I est alors rationnelle [1], ou tout au moins de genres $p_a = p_g = 0$. C'est un point sur lequel nous espérons pouvoir revenir.

1. Considérons une courbe algébrique L, de genre π, contenant une involution cyclique γ_p, d'ordre premier impair p, et la surface F qui représente les couples de points de L. Si un point P de F représente les points P_1, P_2 de L et si la transformation birationnelle de L en soi génératrice de γ_p fait correspondre P'_1 à P_1 P'_2 à P_2, nous ferons correspondre sur F au point P le point P' représentant les points P'_1, P'_2. Nous définissons ainsi sur F une transformation birationnelle T de la surface en soi, de période p, génératrice d'une involution I, d'ordre p.

L'involution I possède un nombre fini de points unis. Si O_1, O_2, ..., O_δ sont les points unis de l'involution γ_p sur L, les points unis de I_p sont les points O_{ik}, $(i, k = 1, 2, ..., \delta)$, représentant les couples de points, distincts ou non, O_i, O_k.

Construisons sur L une série linéaire complète, simple, transformée en elle-même par la transformation birationnelle génératrice de γ_p. Soit r sa dimension, que l'on peut toujours supposer supérieure à 3. Rapportons projectivement les groupes de cette série aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions. Nous obtenons un modèle projectif de L, que l'on peut toujours supposer privé de points multiples, sur lequel l'involution γ_p est engendrée par une homographie cyclique H de S_r.

Un modèle projectif de F est alors la congruence des bisécantes de L ou, mieux, le lieu des intersections des droites de cette congruence avec un hyperplan S_{r-1}. Ce modèle projectif de F présente, comme droites exceptionnelles, les cordes de L appartenant à cet hyperplan S_{r-1}.

2. Soient O_1, O_2 deux points unis de γ_p sur L et t_1, t_2 les tangentes à cette courbe en ces points. Les droites t_1, t_2 sont transformées en elles-mêmes par H et présentent un second point uni, O'_1 sur t_1 et O'_2 sur t_2.

La droite O_1O_2 coupe l'hyperplan S_{r-1} en un point O_{12} de F,

---

[1] Nous l'avons démontré dans le cas où L est la quartique de Klein (voir la fin de ce travail).

uni pour l'involution I. La projection à partir de O_1 de la courbe L sur S_{r-1} donne une courbe de F qui a pour tangente en O_{12} la projection t_2' de la droite t_2 à partir de O_1. De même, si l'on projette de O_2 sur S_{r-1} la courbe L, on obtient une courbe qui a pour tangente en O_{12} la projection t_1' de t_1 à partir de O_2. Les droites t_1', t_2' déterminent le plan tangent à F en O_{12}.

Dans l'espace à trois dimensions déterminé par O_1, O_2, O_1', O_2', H détermine une homographie que nous représenterons par

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = \epsilon^{\alpha_1}x_1 : \epsilon^{\alpha_2}x_2 : \epsilon^{\alpha_3}x_3 : \epsilon^{\alpha_4}x_4,$$

où ϵ est une racine primitive d'ordre p de l'unité et où nous posons, pour les sommets du tétraèdre de référence : O_1 (1, 0, 0, 0), O_2 (0, 1, 0, 0), O_1' (0, 0, 1, 0), O_2' (0, 0, 0, 1).

Nous pouvons supposer, sans restriction, que l'hyperplan S_{r-1} coupe cet espace à trois dimensions suivant le plan $x_1 = x_2$.

Soit alors $y_1 = y_2$, y_3, y_4 un point de ce plan. La droite passant par ce point a pour équations

$$y_3x_1 - y_1x_3 = 0, \qquad y_4x_2 - y_1x_4 = 0.$$

L'homographie H lui fait correspondre la droite

$$\epsilon^{\alpha_1}y_3x_1 - \epsilon^{\alpha_3}y_1x_3 = 0, \qquad \epsilon^{\alpha_2}y_4x_2 - \epsilon^{\alpha_4}y_1x_4 = 0$$

et cette droite coupe le plan $x_1 = x_2$ au point

$$x_1 : x_3 : x_4 = y_1 : \epsilon^{\alpha_1-\alpha_3}y_3 : \epsilon^{\alpha_2-\alpha_4}y_4.$$

Telle est la projectivité dans le plan tangent en O_{12} à la surface F, le point O_{12} ayant pour coordonnées (1,0,0).

Nous sommes ainsi en mesure de déterminer la structure du point uni O_{12} de l'involution I et celle du point de diramation correspondant sur une surface image de I.

3. Nous allons appliquer ce qui précède au cas où la courbe L est donnée par l'équation

$$a_1x_1^\nu x_2 + a_2x_2^\nu x_3 + a_3x_3^\nu x_1 = 0.$$

Si $p = \nu^2 - \nu + 1$, $\alpha = \nu^2 - 2\nu + 2$, la courbe L est transformée en soi par l'homographie

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \epsilon x_2 : \epsilon^\alpha x_3,$$

ϵ étant une racine primitive d'ordre p de l'unité. On suppose l'entier ν choisi de telle sorte que p soit premier ($\nu = 3, 4, 6, 7, \ldots$).

Nous prendrons, comme modèle projectif de la courbe L, sa transformée sur la surface de Veronese. Posons

$$\frac{X_{11}}{x_1^2} = \frac{X_{22}}{x_2^2} = \frac{X_{33}}{x_3^2} = \frac{X_{23}}{x_2x_3} = \frac{X_{31}}{x_3x_1} = \frac{X_{12}}{x_1x_2}.$$

La surface de Veronese a pour équations

$$X_{22}X_{33} = X_{23}^2, \qquad X_{33}X_{11} = X_{31}^2, \qquad X_{11}X_{22} = X_{12}^2,$$
$$X_{11}X_{23} = X_{12}X_{31}, \qquad X_{22}X_{31} = X_{21}X_{12}, \qquad X_{33}X_{12} = X_{31}X_{23}.$$

Si ν est impair, posons $\nu = 2k + 1$. La courbe L de S_5 est l'intersection de la surface de Veronese et de la surface

$$a_1X_{11}^kX_{12} + a_2X_{22}^kX_{23} + a_3X_{33}^kX_{31} = 0.$$

Si ν est pair, posons $\nu = 2k$. La courbe L de S_5 est l'intersection de la surface de Veronese et des surfaces

$$a_1X_{11}^kX_{12} + a_2X_{22}^{k-1}X_{12}X_{23} + a_3X_{33}^{k-1}X_{31}^2 = 0,$$
$$a_1X_{11}^{k-1}X_{12}^2 + a_2X_{22}^kX_{12} + a_3X_{33}^{k-1}X_{23}X_{31} = 0,$$
$$a_1X_{11}^{k-1}X_{31}X_{12} + a_2X_{22}^{k-1}X_{23}^2 + a_3X_{33}^kX_{31} = 0.$$

Désignons par A_{ik} le sommet de la pyramide fondamentale de S_5 dont toutes les coordonnées sont nulles sauf X_{ik}. Sur la courbe L de S_5, les points unis sont A_{11}, A_{22}, A_{33} et les tangentes en ces points sont respectivement $A_{11}A_{31}$, $A_{22}A_{12}$ et $A_{33}A_{23}$.

Posons tout d'abord $O_1 \equiv A_{11}$, $O_2 \equiv A_{22}$, $O_1' \equiv A_{31}$, $O_2' = A_{12}$, d'où $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = \alpha$, $\alpha_4 = 1$. Le point O_{12} est caractérisé par les nombres

$$(1, \ \epsilon^{\nu-1}, \ \epsilon).$$

Posons ensuite $O_1 \equiv A_{33}$, $O_2 \equiv A_{11}$, $O_1' \equiv A_{23}$, $O_2' \equiv O_{31}$, d'où $\alpha_1 = 2\alpha$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \alpha + 1$, $\alpha_1 = \alpha$. Le point O_{12} est cette fois caractérisé par les nombres

$$(1, \ \epsilon^{(\nu-1)^2}, \ \epsilon^{\nu-1}).$$

Si nous posons $\eta = \epsilon^{\nu-1}$, nous avons $\eta^{\nu-1} = \epsilon^{(\nu-1)^2}$.

Posons enfin $O_1 \equiv A_{22}$, $O_2 \equiv A_{33}$, $O'_1 \equiv A_{12}$, $O'_2 \equiv A_{23}$, d'où $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 2\alpha$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = \alpha + 1$. Actuellement, le point O_{12} est caractérisé par les nombres

$$(1, \quad \epsilon, \quad \epsilon^{(\nu-1)^2}).$$

En posant $\eta = (\nu - 1)^2$, on a $\eta^{\nu-1} = \epsilon$.

Comme il fallait s'y attendre, à cause de la symétrie de l'équation de la courbe L, les trois points unis de l'involution I sur F, représentant les couples de points unis distincts de γ_p sur L, ont la même structure.

4. La structure des points unis de I qui viennent d'être rencontrés se détermine aisément.

Changeons la signification de α pour lui donner celle qui est utilisée dans nos recherches sur les involutions [1]. Le point uni A qu'il s'agit d'étudier est caractérisé par $p = \nu^2 - \nu + 1$, $\alpha = \nu - 1$, $\beta = (\nu - 1)^2$.

Nous avons

$$p = \alpha\nu + 1, \qquad p = \beta + \nu,$$

donc le point A est un point uni de seconde espèce et de première catégorie. Il suffit d'appliquer les résultats que nous avons obtenus dans une note récente [2].

Soit t le plus grand entier contenu dans $\frac{1}{2}(\nu - 3)$ et désignons par Φ une surface image de l'involution I sur laquelle les points de diramation sont isolés. Le point de diramation A' homologue de A, est équivalent à $t + 2$ courbes rationnelles

$$\sigma_\alpha, \ \rho_1, \ \rho_2, \ \ldots, \ \rho_t, \ \sigma_\beta,$$

chacune de ces courbes rencontrant la précédente et la suivante

(1) *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (ACT. SCIENT., n° 270, Paris, Hermann, 1935) ; *Mémoire sur les surfaces multiples* (MÉM. IN-8° DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1952) ; *Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples* (DEUXIÈME COLLOQUE DE GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE, Liège, 1952) et les notes parues dans ce Bulletin depuis 1953.

(2) *Sur les points de diramation de seconde espèce et de première catégorie d'une surface multiple* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1955, pp. 703-708).

en un point, mais ne rencontrant pas les autres. La courbe σ_α est de degré virtuel — $(\nu + 1)$, les autres de degré virtuel — 2.

Le point A' est multiple d'ordre $\nu + 1$ pour la surface Φ, le cône tangent à cette surface en ce point se décomposant en un cône (σ_α) d'ordre ν et en un plan (σ_β) contenant une seule génératrice de (σ_α). Au point A' sont infiniment voisins successifs, si t est pair, $\frac{1}{2}\,t$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire ; si t est impair, $\frac{1}{2}\,(t - 1)$ points doubles biplanaires suivis d'un point double conique.

Aux sections de Φ par les hyperplans passant par A' correspondent sur F des courbes ayant en A la multiplicité $\nu + 1$ et passant ν fois par une suite de points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \nu - 2)$ infiniment voisins successifs de A et une fois par une seconde suite de points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, \nu^2 - 2\nu)$ infiniment voisins successifs de A.

Les courbes canoniques de Φ — s'il en existe — ont pour transformées sur F des courbes canoniques passant $\nu - 1$ fois par les points A, $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \nu - 2)$.

5. Nous terminerons par l'examen du cas particulier $\nu = 3$. La courbe L est alors la quartique de Klein, elle possède une involution cyclique γ_7 d'ordre 7, présentant trois points unis : les sommets O_1, O_2, O_3 du triangle de référence. Sur la surface F, qui représente les couples de points de L, l'involution I est d'ordre sept et possède six points unis O_{11}, O_{22}, O_{33}, O_{23}, O_{31}, O_{12}.

Les points O_{11}, O_{22}, O_{33} sont des points unis de seconde espèce à chacun desquels est infiniment voisin un point uni de première espèce [1]. Les points O_{23}, O_{31}, O_{12} sont des points de même structure.

On sait que F possède une involution du second ordre, les points d'un couple de cette involution ayant pour homologues, sur la quartique L, deux couples de points formant un groupe

[1] *Sur la structure des points unis d'une involution appartenant à la surface des couples de points d'une courbe algébrique, loc. cit.*

canonique de la courbe. Les points O_{11} et O_{31}, O_{22} et O_{12}, O_{33} et O_{23} forment des couples de cette involution et comme celle-ci est permutable avec l'involution I, ces points doivent avoir la même structure. C'est un résultat que nous avions déjà obtenu par un autre procédé et nous en avions déduit la rationnalité de la surface Φ, image de l'involution I [1].

Liège, le 31 octobre 1955.

[1] *Sur l'existence d'involutions rationnelles n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique* (BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATHIQUES, 1933, pp. 7-14). Nous avions déjà démontré, par une voie différente, la rationnalité de la surface Φ dans une note *Sur une involution rationnelle douée de trois points de coïncidence, appartenant à une surface de genre trois* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1921, pp. 653-665, 697-702).