Sur la théorie des congruences W (seconde note)

Lucien Godeaux

Résumé
Comme complément à notre première note, nous montrons comment on peut obtenir la seconde surface focale d'une congruence W lorsque l'on connaît la première.

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Sur la théorie des congruences W,

(seconde note),

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Comme complément à notre première note, nous montrons comment on peut obtenir la seconde surface focale d'une congruence W lorsque l'on connaît la première.

Dans notre première note [1], nous avons considéré quatre suites de Laplace attachées dans l'espace à cinq dimensions à une congruence W. Nous nous proposons d'ajouter un complément en montrant comment, étant données une congruence W et une de ses surfaces focales, on peut déterminer l'autre. Le procédé utilisé nous sera utile dans quelques applications que nous avons en vue, pour prouver l'existence de congruences W satisfaisant à des conditions particulières.

1. Donnons-nous une congruence W, soit (j), une de ses surfaces focales (x) et la direction de la droite j en chaque point de cette surface. En désignant par u, v les asymptotiques de la surface (x), cela revient à se donner, dans l'espace S_5, la suite de Laplace L,

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots$$

et le point

$$J = \lambda U - \mu V,$$

---

(1) *Sur la théorie des congruences* W (BULLETIN DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1954, pp. 1028-1037). Nous profitons de cette citation pour corriger deux fautes typographiques qui nous avaient échappé :

P. 1031, ligne 4, lire $(\log.\ b^2\beta)^{01}$ au lieu de $(\log.\ h^2\beta)^{01}$.

P. 1032, 10, lire : $= \dfrac{\lambda}{\mu}\left(\log.\ \dfrac{\lambda}{\psi}\right)^{01}$ au lieu de $= \dfrac{\lambda}{\mu}\left(\log.\ \dfrac{\psi}{\mu}\right)^{01}$.

qui représente la droite j, λ et μ étant liés par les relations

$$\lambda^{01} + 2a\mu = 0, \qquad \mu^{10} + 2b\lambda = 0.$$

Connaissant J, on connaît la suite de Laplace $\mathcal{J}$,

$$\ldots, J_n, \ldots, J_1, J, J_{-1}, \ldots, J_{-n}, \ldots$$

et par conséquent le pôle P par rapport à l'hyperquadrique de Klein Q de l'hyperplan $J_2J_1JJ_{-1}J_{-2}$, c'est-à-dire la seconde image du complexe osculateur à la congruence (j) le long de la droite j. On a

$$P = [\mu_2 + \mu_1 (\log bh_1)^{01} + \beta\mu]U - [\lambda_2 + \lambda_1 (\log ak_1)^{10} + \alpha\lambda]V$$
$$- [\mu_1 - \mu (\log bh_1)^{01}]U_1 + [\lambda_1 - \lambda (\log (ak_1)^{10}]V_1 + \mu U_2 - \lambda V_2.$$

Désignons par $(\overline{x})$ la seconde surface focale de la congruence (j) et par U^*, V^* les points de Q qui représentent les tangentes $\overline{x}\overline{x}^{10}$, $\overline{x}$, $\overline{x}^{01}$. Les droites UU^*, VV^* se coupent au point P. On a donc

$$U^* = P + l_1U, \qquad V^* = P + l_2V.$$

On doit donc avoir

$$\Omega(P, P) + 2l_1\Omega(P, U) = 0, \qquad \Omega(P, P) + 2l_2\Omega(P, V) = 0.$$

Or, on a

$$\Omega(P, P) = - 2\psi\Delta, \qquad \Omega(P, U) = 2\mu\Delta, \qquad \Omega(P, V) = 2\lambda\Delta,$$

où

$$\Delta = | x \; x^{10} \; x^{01} \; x^{11} |.$$

On a donc

$$U^* = 2\mu P + \psi U, \qquad V^* = 2\lambda P + \psi V.$$

Les points U^*, V^* étant connus, la surface $(\overline{x})$ est connue. On a

$$\lambda U^* - \mu V^* = \psi(\lambda U - \mu V) = \psi J.$$

2. Au moyen des formules établies dans notre première note, on voit que

$$U^{*10} + 2bV^{*} = \xi(\lambda U - \mu V),$$
$$V^{*01} + 2aU^{*} = \eta(\lambda U - \mu V).$$

On en déduit

$$\psi[U^{*10} + 2bV^{*}] = \xi(\lambda U^{*} - \mu V^{*}),$$
$$\psi[V^{*01} + 2aU^{*}] = \eta(\lambda U^{*} - \mu V^{*}).$$

Posons, en reprenant les notations de notre première note,

$$U^{*} = \rho\overline{U}, \qquad V^{*} = -\rho\overline{V}.$$

Disposons de ρ de manière à faire disparaître le terme en U^{*} dans la première des formules précédentes et le terme en V^{*} dans la seconde. On est ainsi conduit aux conditions

$$(\log \rho)^{10} = (\log. \psi)^{10}, \qquad (\log \rho)^{01} = (\log \psi)^{01}$$

et le but est atteint, en prenant $\rho = \psi$.

On retrouve ainsi les formules de notre première note

$$\overline{U}^{10} + \frac{\mu}{\lambda}\left(\log\frac{\mu}{\psi}\right)^{10}\overline{V} = 0, \qquad \overline{V}^{10} + \frac{\lambda}{\mu}\left(\log\frac{\lambda}{\psi}\right)^{01}\overline{U} = 0.$$

Liège, le 4 mars 1955.