Sur les courbes tracées sur une surface multiple (Seconde note)

Lucien Godeaux

Résumé
Étude du comportement en un point de diramation de seconde espèce d'une surface multiple des courbes tracées sur cette surface et qui, sur la surface contenant l'involution représentée par la surface multiple, donne des courbes équivalentes.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les courbes tracées sur une surface multiple,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.
(Seconde note).

Résumé. — Étude du comportement en un point de diramation de seconde espèce d'une surface multiple des courbes tracées sur cette surface et qui, sur la surface contenant l'involution représentée par la surface multiple, donne des courbes équivalentes.

Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique, d'ordre premier $p > 2$, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Désignons gar Φ une surface image de cette involution sur laquelle les points de diramation sont isolés. Nous considérons sur F un système linéaire transformé en soi par la transformation génératrice de l'involution et contenant p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution dont l'un est dépourvu de points-base. Les autres systèmes ont pour points-base les points unis de l'involution. A ces p systèmes correspondent sur Φ p systèmes linéaires complets. Un point de diramation de Φ, de seconde espèce, est équivalent, au sens de transformations birationnelles, à un ensemble de courbes rationnelles. Il s'agit de déterminer le comportement des courbes des systèmes envisagés vis-à-vis de cet ensemble de courbes rationnelles.

Dans notre première note (1), nous avons indiqué une méthode pour résoudre ce problème. Elle est basée essentiellement sur le fait que les multiples d'un système linéaire tracé sur la surface F se comportent aux points unis de l'involution, comme les courbes du système linéaire considéré. Nous montrons ici comment on peut appliquer cette méthode et en déduire les relations fonctionnelles existant entre les courbes tracées sur la surface multiple.

(1) Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1955, pp. 425-431.

Nous renvoyons à notre première note pour l'indication de ceux de nos travaux sur les involutions que nous supposons connus.

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution I d'ordre premier p, cyclique, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Désignons par T la transformation birationnelle de F en soi, génératrice de l'involution I. On posera $p = 2\nu + 1$.

Considérons sur F un système linéaire $|C|$, transformé en soi par T, contenant p systèmes linéaires partiels $|C_0|$, $|C_1|$, ..., $|C_{p-1}|$ appartenant à l'involution I, le premier étant dépourvu de points-base et les autres ayant comme points-base les points unis de l'involution.

Désignons par Φ la surface normale, image de l'involution, dont les sections hyperplanes Γ_0 correspondent aux courbes C_0. Soient $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$, ..., $|\Gamma_{p-1}|$ les systèmes linéaires (complets) qui correspondent respectivement sur Φ aux systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_{p-1}|$.

Si ϵ est une racine primitive d'ordre p de l'unité, nous pouvons attacher aux systèmes $|C_0|$, $|C_1|$, ..., $|C_i|$, ..., $|C_{p-1}|$ respectivement les nombres $\epsilon^0 = 1$, ϵ, ..., ϵ^i, ..., ϵ^{p-1}.

Considérons le système $|D| = |2C|$. Il contient à son tour p systèmes linéaires appartenant à I, soient $|D_0|$, $|D_1|$, ..., $|D_{p-1}|$, auxquels on peut attacher respectivement les nombres 1, ϵ, ..., ϵ^{p-1}.

Le système $|D_0|$ contient les courbes $2C_0$, $C_1 + C_{p-1}$, ..., $C_\nu + C_{\nu+1}$.

Le système $|D_1|$ contient les courbes $C_0 + C_1$, $C_2 + C_{p-2}$, ..., $2C_{\nu+1}$.

......

Le système $|D_{p-1}|$ contient les courbes $C_0 + C_{p-1}$, $C_1 + C_{p-2}$, ..., $2C_\nu$.

On peut de même considérer le système $|3C|$; il comprend p systèmes linéaires partiels $|(3C)_0|$, $|(3C)_1|$, ..., $|(3C)_{p-1}|$ auxquels sont respectivement attachés les nombres 1, ϵ, ..., ϵ^{p-1}.

Le système $|(3C)_0|$ contient les courbes $3C_0$, $2C_1 + C_{p-2}$, ... Et ainsi de suite.

2. Soit A un point uni de seconde espèce de l'involution I, auquel sont attachés les nombres α, β ($\alpha\beta - 1$ multiple de p).

En partant de $|C_0|$, nous avons construit une suite de systèmes linéaires $|C_0'|$, $|C_0''|$, ..., $|C_0^{(\nu)}|$, $|C_0^{(\nu+1)}|$ dont les dimensions décroissent d'une unité à la fois, formés de courbes C_0 passant par A et ayant en ce point des multiplicités croissantes. Les courbes $C_0^{(\nu+1)}$ ont en A la multiplicité p et des tangentes variables.

Le système $|D_0|$ comprend les courbes $C_0 + C_0'$, $C_0 + C_0''$, ... et par conséquent les courbes D_0 se comportent, vis-à-vis du point A, comme les courbes C_0.

Il en est de même des courbes du système $|(3C)_0|$, qui comprend les courbes $2C_0 + C_0'$. $2C_0 + C_0''$, ... Et ainsi de suite.

Nous avons montré que dans le cas le plus général, les courbes C'_0 ont en A la multiplicité $\lambda_1 + \mu_1$ et passent

μ_1 fois par une suite de points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \theta_\alpha - 1)$ infiniment voisins successifs de A,

$a_1 + m_1(\eta_1 + 1)$ fois par un point (α, θ_α), infiniment voisin de $(\alpha, \theta_\alpha - 1)$,

a_1 fois par une suite de points $(\alpha, \theta_\alpha + 1)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$ infiniment voisins successifs de (α, θ_α),

un certain nombre de fois par une suite de points infiniment voisins successifs de (α, θ_α) dont le premier est $(\alpha, \theta_\alpha, 1)$ et le dernier un point P_α multiple d'ordre m_1,

λ_1 fois par des points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, \theta_\beta - 1)$ infiniment voisins successifs de A,

$b_2 + m_2(\eta_2 + 1)$ fois par un point (β, θ_β), infiniment voisin de $(\beta, \theta_\beta - 1)$.

b_2 fois par des points $(\beta, \theta_\beta + 1)$, ..., $(\beta, \beta - 1)$ infiniment voisins successifs de (β, θ_β),

un certain nombre de fois par une suite de points infiniment voisins successifs de (β, θ_β) dont le premier est $(\beta_1, \theta_\beta, 1)$ et le dernier un point P_β multiple d'ordre m_2 pour les courbes.

Les courbes C_1 passent simplement par les points $(\alpha, 1)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$ et les courbes C_α simplement par les points $(\beta, 1)$, ..., $(\beta, \beta - 1)$.

On a d'ailleurs

$$\lambda_1 + \theta_\alpha\mu_1 + m_1(\eta_1 + 1) + (\alpha - \theta_\alpha)a_1 = p,$$
$$\mu_1 + \theta_\beta\lambda_1 + m_2(\eta_2 + 1) + (\beta - \theta_\beta)b_2 = p,$$

relations qui expriment que les courbes C_1 et C_α rencontrent les courbes C'_0 en p points confondus en A.

3. Nous allons déterminer le comportement des courbes C_{p-1} en A.

Les courbes $C_1 + C_{p-1}$ appartiennent au système $|D_0|$ et elles passent par A, donc ce sont des courbes $C_0 + C'_0$ particulières. On en conclut que les courbes C_{p-1} ont le même comportement en A que les courbes C'_0, sauf qu'elles passent une fois de moins par les points A, $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$.

Une courbe C_{p-1} rencontre une courbe C'_0 en dehors de A en des groupes de I, donc le nombre des points d'intersection de ces deux courbes absorbés en A doit être multiple de p. Par contre, le nombre des points d'intersection de deux courbes C_1, C_{p-1} absorbés en A ne doit pas être nécessairement multiple de p, car ces courbes se rencontrent aux autres points unis de l'involution I.

De même, les courbes $C_\alpha + C_{p-\alpha}$ sont des courbes $C_0 + C'_0$ particulières et les courbes $C_{p-\alpha}$ ont le même comportement que les courbes C'_0 en A, sauf qu'elles passent une fois de moins par les points A, $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, \beta - 1)$.

Considérons maintenant le système $|(3C)_0|$. Il contient les courbes $2C_1 + C_{p-2}$. En raisonnant comme plus haut, on voit que les courbes C_{p-2} ont le même comportement que les courbes C'_0 en A, sauf qu'elles passent deux fois de moins par les points A, $(\alpha, 1)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$.

D'une manière analogue, on voit que les courbes C_{p-q} ont le même comportement en A que les courbes C'_0 sauf qu'elles passent q fois de moins par les points A, $(\alpha, 1)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$. On doit donc avoir $q \leqslant a_1$. Les courbes C_{p-a_1} ne passent plus par les points $(\alpha, \theta_\alpha + 1)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$.

Si l'on se reporte à nos travaux antérieurs, on sait que si l'on désigne par x_1, x_2, x_3 les multiplicités de C_{p-q} en $(\alpha, \theta_\alpha - 1)$, (α, θ_α), $(\alpha, \theta_{\alpha+1})$, pour trouver la suite des points infiniment voisins successifs de (α, θ_α) appartenant aux courbes, on doit opérer comme si l'on cherchait le plus grand commun diviseur de $x_1 - x_2$, $x_2 - x_3$ et la multiplicité du dernier point est le plus grand commun diviseur. Or, actuellement, on a

$$x_1 = \mu_1 - q, \quad x_2 = a_1 + m_1(\eta_1 + 1) - q, \quad x_3 = a_1 - q_1$$

d'où

$$x_1 - x_2 = \mu_1 - a_1 - m_1(\eta_1 + 1), \quad x_2 - x_3 = m_1(\eta_1 + 1),$$

ce qui montre bien que les courbes C_{p-q} passent m_1 fois par P_α comme les courbes C'_0.

On trouve de même que les courbes $C_{p-r\alpha}$, où $r \leqslant b_2$, ont le même comportement en A que les courbes C'_0 sauf qu'elles passent r fois de moins par les points A, $(\beta, 1), \ldots, (\beta, \beta - 1)$. Naturellement, l'indice $p - r\alpha$ doit être remplacé par le nombre compris entre 0 et p, congru à $p - 2\alpha$ (mod. p).

4. Considérons le système $|D_{\alpha+1}|$; il contient les courbes $C_0 + C_{\alpha+1}$ et $C_1 + C_\alpha$; on en conclut que les courbes $C_{\alpha+1}$ ont un point double en A et passent simplement par les points $(\alpha, 1)$, $\ldots, (\alpha, \alpha - 1)$ et par les points $(\beta, 1), \ldots, (\beta, \beta - 1)$.

Le système $|D_{\alpha+1}|$ contient également les courbes $C_{p-1} + C_{\alpha+2}$. Une telle courbe doit être une courbe $C'_0 + C_{\alpha+1}$ particulière, c'est-à-dire une courbe passant $\mu_1 + 1$ fois par $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, \theta_\alpha - 1)$, $a_1 + m_1(\eta_1 + 1) + 1$ fois par (α, θ_α), $a_1 + 1$ fois par les points $(\alpha, \theta_\alpha + 1), \ldots, (\alpha, \alpha - 1)$, m_1 fois par P_α, $a_1 + 1$ fois par $(\beta, 1), \ldots, (\beta, \theta_\beta - 1)$, $b_2 + m_2(\eta_2 + 1) + 1$ fois par (β, θ_β), $b_2 + 1$ fois par $(\beta, \theta_\beta + 1), \ldots, (\beta, \beta - 1)$ m_2 fois par P_β et naturellement $\lambda_1 + \mu_1 + 2$ fois par A. On en conclut que les courbes $C_{\alpha+2}$ passent trois fois par A, deux fois par $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, \alpha - 1)$ et une fois par $(\beta, 1), \ldots, (\beta, \beta - 1)$.

Le système $|D_{\alpha+1}|$ contient également les courbes $C_{p-2} + C_{\alpha+3}$, $C_{p-3} + C_{\alpha+4}$, ... et on pourra déterminer le comportement des courbes $C_{\alpha+3}$, $C_{\alpha+4}$, ... au point A. Cependant, un doute peut subsister. On trouve par exemple que les courbes $C_{\alpha+3}$ passent quatre fois par A, une fois par les points $(\beta, 1), \ldots, (\beta, \beta - 1)$, trois fois par les points $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, \alpha - 1)$. Il se pourrait que ce ne soit là que des courbes $C_{\alpha+3}$ particulières et que les courbes $C_{\alpha+3}$ les plus générales passent trois fois par $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, \theta_\alpha - 1)$, deux fois par (α, θ_α), une fois par les points $(\alpha, \theta_{\alpha+1}), \ldots, (\alpha, \alpha - 1)$. C'est une question que l'on ne pourra résoudre que par la considération d'autres systèmes.

On pourra de même déterminer le comportement en A des courbes C_{2a+1}, C_{3a+1}, ..., étant entendu que les indices de ces courbes sont remplacés par les nombres compris entre 0 et p, congrus à ces indices mod. p.

5. Le système $|D_1|$ contient les courbes $C_0 + C_1$, $C_2 + C_{p-1}$. Supposons que ces dernières courbes soient des courbes $C_0' + C_1$ particulières. Alors, ces courbes se comportent en A comme les courbes C_0' sauf qu'elles passent une fois de plus par les points A, $(\beta, 1)$, ..., $(\beta, \beta - 1)$. Comme les courbes C_{p-1} se comportent comme les courbes C_0' en A sauf qu'elles passent une fois de moins par les points A, $(\alpha, 1)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$, on en conclut que les courbes C_2 passeraient deux fois par A, une fois par $(\alpha, 1)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$, $(\beta, 1)$, ..., $(\beta, \beta - 1)$, c'est-à-dire qu'elles se comporteraient en A comme les courbes $C_{\alpha+1}$, ce qui est absurde, puisque $\alpha > 1$. On en conclut que les courbes $C_2 + C_{p-1}$ sont des courbes $C_0'' + C_1$, ou $C_0''' + C_1$, ... On pourra alors déterminer le comportement en A des courbes C_2 et une vérification sera obtenue en remarquant que les courbes $C_2 + C_{p-2}$ appartiennent au système $|D_0|$.

On pourra de même déterminer le comportement en A des courbes C_3, C_4, ..., puis ceux des courbes C_{2a1} ... .

Et ainsi de suite.

6. Sur la surface Φ, les courbes Γ_1, Γ_2, ..., Γ_{p-1} sont liées aux courbes Γ_0 par des relations fonctionnelles. On a

$$p\Gamma_0 = p\Gamma_i + \Delta_i + \Delta_i',$$

où Δ_i est une combinaison des composantes du point de diramation A' qui correspond au point uni A et Δ_i' une combinaison des composantes des autres points de diramation de Φ.

Si l'on connaît la structure du point A', on sait que l'on a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(k)} + \Delta_k''. \qquad (k = 1, 2, ..., \nu)$$

où Δ_k'' est une combinaison des composantes du point A'.

Rappelons que nous avons déterminé Δ_1 et Δ_α dans le cas le plus général de la structure du point A' [1].

---

[1] *Sur l'ordre d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de la Soc. roy. des Sciences de Liège, 1953, pp. 77-84).

Cela étant, proposons-nous de déterminer la relation fonctionnelle liant les courbes Γ_{p-1} et Γ_0. Nous avons vu que les courbes $C_1 + C_{p-1}$ sont des courbes $C_0 + C'_0$ particulières. On doit donc avoir

$$p\Gamma_0 + p\Gamma'_0 + p\Delta''_1 \equiv p\Gamma_4 + p\Gamma_{p-1} + \Delta_1 + \Delta_{p-1} + \Delta'_1 + \Delta'_{p-1}\,.$$

On en conclut que $\Delta_1 + \Delta_{p-1}$ doit coïncider avec $p\Delta''_1$. On a ainsi une vérification des résultats obtenus plus haut.

D'une manière générale, si une courbe $C_i + C_{p-i}$ est une courbe $C_0 + C_0^{(k)}$ particulière, en doit avoir

$$p\Gamma_0 + p\Gamma_0^{(k)} + p\Delta''_k \equiv p\Gamma_i + p\Gamma_{p-i} + \Delta_i + \Delta_{p-i} + \Delta'_i + \Delta'_{p-i}$$

et les courbes $\Delta_i + \Delta_{p-i}$, $p\Delta''_k$ doivent être identiques.

Cette remarque donne non seulement un procédé de vérification, mais aussi un procédé d'investigation.

7. La détermination du comportement en A′ des courbes $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{p-1}$ est aisée, dans le cas où l'on a $\alpha = \beta = p - 1$ et par suite $a_1 = b_2 = 1$. Pour éviter les complications d'écriture, nous le montrerons dans le cas $p = 7$, l'extension au cas où p est quelconque étant aisée.

Rappelons que les courbes C'_0 ont un point double en A et passent simplement par les points $(\alpha, 1)$, $\alpha, 2)$, $(\alpha, 3)$, $(\alpha, 4)$, $(\alpha, 5)$ et $(\beta, 1), \ldots, (\beta, 5)$ de deux suites de points infiniment voisins successifs.

Les courbes C''_0 passant quatre fois par A, deux fois par $(\alpha, 1)$, $(\beta, 1)$, une fois par $(\alpha, 2)$, $(\beta, 2)$ et par deux points $(\alpha, 2, 1)$ infiniment voisin de $(\alpha, 2)$ et $(\beta, 2, 1)$, infiniment voisin de $(\beta, 2)$.

Les courbes C'''_0 passent six fois par A et une fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2, 1)$, $(\alpha, 1, 2)$ et $(\beta, 1)$, $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 2)$.

Le point A′ est équivalent à six courbes rationnelles de degré virtuel — 2 : une courbe σ_α représentant le domaine de $(\alpha, 5)$, une courbe ρ_{11}, représentant le domaine de $(\alpha, 2, 1)$, une courbe ρ_{21} représentant le domaine de $(\alpha, 1, 2)$, une courbe ρ_{22} représentant le domaine de $(\beta, 1, 2)$, une courbe ρ_{12}, représentant le domaine de $(\beta, 2, 1)$, enfin une courbe σ_β, représentant le domaine de $(\beta, 5)$. Chacune de ces courbes rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres.

On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma'_0 + \sigma_\alpha + \rho_{11} + \rho_{21} + \rho_{22} + \rho_{12} + \sigma_\beta,$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma''_0 + \sigma_\alpha + 2(\rho_{11} + \rho_{21} + \rho_{22} + \rho_{12}) + \sigma_\beta,$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma'''_0 + \sigma_\alpha + 2\rho_{11} + 3(\rho_{21} + \rho_{22}) + 2\rho_{12} + \sigma_\beta,$$
$$7\Gamma_0 \equiv 7\Gamma_1 + \sigma_\alpha + 2\rho_{11} + 3\rho_{21} + 4\rho_{22} + 5\rho_{12} + 6\sigma_\beta + \Delta'_1,$$
$$7\Gamma_0 \equiv 7\Gamma_6 + 6\sigma_6 + 5\rho_{11} + 4\rho_{21} + 3\rho_{22} + 2\rho_{12} + \sigma_\beta + \Delta'_6.$$

Les courbes Γ_1 rencontrent σ_β en un point et les courbes Γ_6, σ_α en un point.

Le système $|D_0|$ comprend les courbes $C_1 + C_6$, $C_2 + C_5$, $C_3 + C_4$ et on voit que les courbes $C_1 + C_6$ sont des courbes $C_0 + C'_0$ particulières. On a bien, en reprenant les notations précédentes,

$$7\Delta''_1 \equiv \Delta_1 + \Delta_6.$$

Le système $|D_2|$ contient les courbes $C_0 + C_2$ et $2C_1$, donc, parmi les courbes C_2, il en est qui passent deux fois par les points A, $(\beta, 1)$, ..., $(\beta, 5)$.

Le système $|D_5|$ contient les courbes $C_0 + C_5$ et $2C_6$, donc, parmi les courbes C_5, il en est qui passent deux fois par les points A, $(\alpha, 1)$, ..., $(\alpha, 5)$.

Les courbes $C_2 + C_5$, qui ont un point quadruple en A, appartiennent au système $|D_0|$ et sont des courbes $C_0 + C''_0$ particulières. On en conclut que les courbes C_2 passent deux fois par A et par $(\beta, 1)$, et une fois par les points $(\beta, 2)$, $(\beta, 2, 1)$. Les courbes C_5 passent deux fois par A, $(\alpha, 1)$ et une fois par $(\alpha, 2)$, $(\alpha, 2, 1)$. Les courbes Γ_2 rencontrent ρ_{12} en un point et les courbes Γ_5, ρ_{11} en un point.

On a

$$7\Gamma_0 \equiv 7\Gamma_2 + 2\sigma_\alpha + 4\rho_{11} + 6\rho_{21} + 8\rho_{22} + 10\rho_{12} + 5\sigma_\beta + \Delta'_2,$$
$$7\Gamma_0 \equiv 7\Gamma_5 + 5\sigma_\alpha + 10\rho_{11} + 8\rho_{21} + 6\rho_{22} + 4\rho_{12} + 2\sigma_\beta + \Delta'_5.$$

On vérifie que l'on a bien

$$7\Delta''_2 \equiv \Delta_2 + \Delta_5.$$

Le système $|(3C)_3|$ contient les courbes $2C_0 + C_3$ et $3C_1$, donc parmi les courbes C_3, il en est qui passent trois fois par les points A, $(\beta, 1), \ldots, (\beta, 5)$. de même, parmi les courbes C_2, il en est qui passent trois fois par A, $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, 5)$.

Une courbe $C_3 + C_4$ appartient au système $|D_0|$ et a un point sextuple en A, donc c'est une courbe $C_0 + C_0''''$ particulière. On en conclut que les courbes C_3 passent trois fois par A et une fois par $(\beta, 1)$, $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 2)$; les courbes C' passent trois fois par A et une fois par $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 2)$.

On a

$$7\Gamma_0 \equiv 7\Gamma_3 + 3\sigma_\alpha + 6\rho_{11} + 9\rho_{21} + 12\rho_{22} + 8\rho_{12} + 4\sigma_\beta + \Delta_3',$$
$$7\Gamma_0 \equiv 7\Gamma_4 + 4\sigma_\alpha + 8\rho_{11} + 12\rho_{21} + 9\rho_{22} + 6\rho_{12} + 3\sigma_\beta + \Delta_4'.$$

On vérifie que l'on a

$$7\Delta_3'''' \equiv \Delta_3 + \Delta_4.$$

Les courbes C_2 et C_5 particulières rencontrées plus haut ont pour homologues sur Φ les courbes $\Gamma_2 - \alpha_\beta$, $\Gamma_5 - \sigma_\alpha$. Les courbes C_3 et C_4 particulières passant trois fois par les points A. $(\beta, 1), \ldots (\beta, 5)$ ou A, $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, 5)$ ont pour homologues sur Φ les courbes $\Gamma_3 - \rho_{12} - 2\sigma_\beta$, $\Gamma_4 - \rho_{11} - 2\sigma_\alpha$.

Liège, le 18 avril 1955.