Bulletin de la Classe des sciences

Sur les courbes tracées sur une surface multiple

Lucien Godeaux

Résumé

Si une surface algébrique F contient une involution d'ordre premier impair, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, engendrée par une transformation birationnelle T de F en soi, à tout système linéaire | C | transformé en soi par T correspondent généralement sur la surface Φ image de l'involution, *p* systèmes linéaires. Il s'agit de déterminer le comportement des courbes de ces systèmes aux points de diramation de Φ. On donne ici une méthode pour résoudre ce problème et on l'applique à un cas particulier simple.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les courbes tracées sur une surface multiple,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Si une surface algébrique F contient une involution d'ordre premier impair, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, engendrée par une transformation birationnelle T de F en soi, à tout système linéaire $|C|$ transformé en soi par T correspondent généralement sur la surface Φ image de l'involution, p systèmes linéaires. Il s'agit de déterminer le comportement des courbes de ces systèmes aux points de diramation de Φ. On donne ici une méthode pour résoudre ce problème et on l'applique à un cas particulier simple.

Dans nos travaux antérieurs (1), nous avons déterminé la structure des points de diramation d'une surface multiple d'ordre premier p impair. Si F est une surface contenant l'involution d'ordre p dont la surface multiple Φ est l'image, on peut prendre comme modèle projectif de F une surface normale sur laquelle l'involution est déterminée par une homographie cyclique possédant p axes ponctuels. Dans le système des sections hyperplanes de F, il y a donc p systèmes linéaires appartenant à l'involution. Nous avions construit la surface Φ en partant de l'un de ces systèmes. Notre but dans cette note est de déterminer le com-

(1) *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique.* Actualités scient., n° 270 (Paris, Hermann, 1935) ; *Mémoire sur les surfaces multiples* (MÉMOIRES IN-8° DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1952, pp. 1-80) ; *Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples,* Deuxième Colloque de Géométrie algébrique (Liège, Thone et Paris, Masson, 1952) ; *Recherches sur les points de diramation de troisième catégorie d'une surface multiple* (BULLETIN DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1953, pp. 1013-1023, 1087-1083 ; 1954, pp. 81-86, 200-208, 355-370) ; *Sulle involuzioni cicliche appartenenti ad una superficie algebriche* (en cours de publication dans les Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Milano).

portement des systèmes qui correspondent sur la surface Φ aux $p-1$ autres systèmes, aux points de diramation. Nous nous bornons d'ailleurs à supposer les points unis de l'involution de seconde espèce. Nous avons déjà résolu autrefois le problème dans le cas des points unis de première espèce (¹).

1. Considérons, sur une surface algébrique F, une involution I d'ordre premier impair p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Nous pouvons prendre, comme modèle projectif de la surface F, une surface normale appartenant à un espace linéaire S_r (r aussi grand que l'on veut), sur laquelle l'involution I est déterminée par une homographie H de période p, ayant p axes ponctuels $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$ dont le premier seul, ξ_0, rencontre F (aux points unis de l'involution).

Désignons par $|C|$ le système des sections hyperplanes de F, par C_i les courbes C découpées par les hyperplans passant par $\xi_0, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_{p-1}$. Nous avons, sur F, p systèmes linéaires $|C_0|, |C_1|, \ldots, |C_{p-1}|$ appartenant à l'involution I, le premier étant dépourvu de points-base, les autres ayant comme points-base les points unis de l'involution.

En rapportant projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace ayant la dimension de $|C_0|$, nous obtenons une surface normale Φ, image de l'involution, sur laquelle les points de diramation sont isolés. Dans nos travaux antérieurs, cités plus haut, nous avons déterminé la structure des points de diramation, c'est-à-dire l'ensemble des courbes auquel chacun d'eux est équivalent au sens de la géométrie algébrique.

Si $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{p-1}$ sont les courbes qui correspondent sur Φ respectivement aux courbes $C_0, C_1, \ldots, C_{p-1}$, les courbes Γ_0 étant les sections hyperplanes de Φ, on peut se proposer de déterminer le comportement des courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{p-1}$ aux points de diramation de Φ.

2. Soit A un point uni de seconde espèce de l'involution I. Nous supposerons que le plan tangent η à F en A rencontre en un point l'espace ξ_1 et en un point l'espace ξ_α. Aux axes

(¹) *Sur les points unis parfaits des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (BULL. DE LA SOC. ROY. DES SCIENCES DE LIÈGE, 1937, pp. 37-40).

$\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$ de H, nous attachons les nombres $\epsilon^0 = 1, \epsilon, \ldots, \epsilon^{p-1}$, où ϵ est une racine primitive d'ordre p de l'unité. Dans ces conditions, au point uni A sont attachés les entiers α et β tel que $\alpha\beta - 1$ soit multiple de p, β étant compris entre 1 et p.

La connaissance des nombres α, β suffit pour déterminer la structure du point de diramation A' homologue du point A. Rappelons que pour déterminer cette structure, nous avons envisagé une suite de systèmes linéaires $|C_0'|, |C_0''|, \ldots, |C_0^{(\nu)}|$ compris dans $|C_0|$, dont les multiplicités en A vont en croissant, ν étant donné par $p = 2\nu + 1$.

Les courbes C_1, découpées par les hyperplans passant par $\xi_0, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}$, passent simplement par A en y touchant la droite t_α, tangente à F et s'appuyant sur ξ_α. De même, les courbes C_α, découpées par les hyperplans passant par $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{\alpha-1}, \xi_{\alpha+1}, \ldots, \xi_{p-1}$, passent simplement par A en y touchant la droite t_1, tangente à F et s'appuyant sur ξ_1.

Les courbes $C_2, C_3, \ldots, C_{\alpha-1}, C_{\alpha+1}, \ldots, C_{p-1}$ sont découpées par des hyperplans contenant le plan tangent η à F en A et ont une certaine multiplicité en A.

Observons que le système $|D| = |2C|$ se comporte vis-à-vis de l'involution I exactement comme le système $|C|$. Il comprend p systèmes linéaires partiels $|D_0|, |D_1|, \ldots, |D_{p-1}|$, appartenant à l'involution et auxquels on peut attacher respectivement les nombres $\epsilon^0 = 1, \epsilon, \ldots, \epsilon^{p-1}$. D'une manière précise, le système $|D_0|$ comprend les courbes $2C_0$, le système $|D_1|$ les courbes $C_0 + C_1, \ldots$, le système $|D_{p-1}|$ les courbes $C_0 + C_{p-1}$.

On peut de même former les systèmes $|D_0|, |D_0''|, \ldots, |D_0^{(\nu)}|$ comprenant respectivement les courbes $C_0 + C_0', C_0 + C_0'', \ldots, C_0 + C_0^{(\nu)}$.

Le système $|D_0|$ comprend les courbes $2C_0$, $C_1 + C_{p-1}$, $C_\alpha + C_{p-\alpha}, \ldots$ Les courbes $C_1 + C_{p-1}$, $C_\alpha + C_{p-\alpha}$ passent par A ; elles appartiennent donc à l'un des systèmes $|D_0'|, |D_0''|, \ldots, |D_0^{(\nu)}|$ et il sera par conséquent possible de déterminer le comportement des courbes C_{p-1}, $C_{p-\alpha}$ au point A.

Le système $|D_2|$ contient les courbes $C_0 + C_2$ et $2C_1$, il sera donc possible de déterminer le comportement des courbes C_2 au point A. Et ainsi de suite.

Cependant, la méthode précédente donne le comportement en

A de certaines courbes $C_i (i = 2, \ldots, \alpha - 1, \alpha + 1, \ldots, p - 1)$, mais on ne peut affirmer qu'il n'y a pas de courbes C_i ayant un comportement plus simple en A. Le doute sera levé en considérant les systèmes $|3C|$, $|4C|$, ...

Une fois connu le comportement en A des courbes $C_2, \ldots, C_{p-1}$, il est facile d'en déduire le comportement en A' des courbes $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_{p-1}$ et les relations fonctionnelles qui lient ces courbes aux courbes Γ_0 et aux composantes de A'.

3. Nous allons appliquer ce qui précède à un cas simple, celui où l'on a $p = 7$, $\alpha = 3$ et par conséquent $\beta = 5$.

Dans ce cas, les courbes C_0' ont en A la multiplicité trois, elles passent doublement par une suite de deux points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$ infiniment voisins successifs de A et simplement par une suite de quatre points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, $(\beta, 3)$, $(\beta, 4)$ infiniment voisins successifs de A.

Les courbes C_0'' passent cinq fois par A, une fois par $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, deux fois par $(\beta, 1)$ et deux fois par un point $(\beta, 1, 1)$ infiniment voisin de $(\beta, 1)$.

Les courbes C_0''' passent six fois par A, une fois par $(\alpha, 1)$ et par une suite de trois points $(\alpha, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 2)$, $(\alpha, 1, 3)$, infiniment voisins successifs de $(\alpha, 1)$, une fois par les points $(\beta, 1)$, $(\beta, 1, 1)$.

Le point de diramation A' est triple pour la surface Φ. Le cône tangent en ce point se compose d'un cône quadratique (σ_α) et d'un plan (σ_β) coupant (σ_α) suivant une génératrice. Sur cette droite, il existe un point double conique infiniment voisin de A'.

Au point de vue des transformations birationnelles, le point A' équivaut à l'ensemble d'une courbe rationnelle σ_α de degré virtuel -3, d'une courbe rationnelle ρ de degré virtuel -2, rencontrant σ_α en un point et d'une courbe rationnelle σ_β de degré virtuel -2, rencontrant ρ en un point.

On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_\alpha + \rho + \sigma_\beta,$$

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0'' + \sigma_\alpha + 2\rho + \sigma_\beta.$$

Les courbes Γ_0'''' appartiennent au système $|\Gamma_0''|$; ce sont des courbes Γ_0'' passant par un point simple.

Les courbes C_1 passent simplement par les points A, $(\beta, 1)$, ..., $(\beta, 4)$ et les courbes C_3 simplement par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$.

4. Considérons le système $|D_0|$; il contient les courbes $C_1 + C_6$, $C_2 + C_5$ et $C_3 + C_4$. La courbe $C_1 + C_6$ passe par A : supposons qu'elle appartienne au système $|D_0'|$; elle a en A la multiplicité trois et passe deux fois par $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, une fois par $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$ $(\beta, 3)$, $(\beta, 4)$. On en conclut que les courbes C_6 passent deux fois par les points A, $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$.

De même, les courbes $C_3 + C_4$ ont le même comportement en A que les courbes D_0' et par conséquent les courbes C_4 passent deux fois par A, une fois par $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$ et par $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, $(\beta, 3)$, $(\beta, 4)$.

Comme vérification, on peut observer que le nombre de points d'intersection absorbés en A par une courbe C_6 ou une courbe C_4 avec les courbes C_0', C_0'', C_0''' doit être multiple de $p = 7$. On vérifie qu'il en est bien ainsi.

Observons que le système $|D_0^{(4)}|$ contient les courbes $C_0 + C_4$ et $C_1 + C_3$, ce qui montre que les courbes C_4 ont en A le même comportement que les courbes $C_1 + C_3$.

5. Le système $|D_1|$ contient les courbes $C_0 + C_1$, $C_2 + C_6$, $C_3 + C_5$ et $2C_4$.

Les courbes D_1 passent en général simplement par les points A, $(\beta, 1)$, ..., $(\beta, 4)$, mais parmi ces courbes, il en est qui se comportent en A comme les courbes C_4 comptées deux fois, c'est-à-dire qui passent quatre fois par A et deux fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, $(\beta, 1)$, ..., $(\beta, 4)$. On en conclut que, parmi les courbes C_2, il en est qui passent deux fois par les points A, $(\beta, 1)$, ..., $(\beta, 4)$. Nous verrons plus loin qu'il s'agit de courbes C_2 particulières.

De même, parmi les courbes C_5, il en est qui passent trois fois par A, une fois par $(\alpha, 1)$ $(\alpha, 2)$ et deux fois par $(\beta, 1)$ ..., $(\beta, 4)$. Mais ici aussi, comme on va le voir, il s'agit de courbes C_5 particulières.

6. Considérons maintenant le système $|3C_0|$; il contient les courbes $2C_2 + C_3$. Une telle courbe passe par A, donc elle se comporte en ce point comme les courbes C_0' ou C_0''. On voit aisément qu'elle ne peut se comporter comme une courbe C_0'.

La courbe $2C_2 + C_3$ passent donc cinq fois par A, une fois par $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, deux fois par $(\beta, 1)$ et $(\beta, 1, 1)$. Si l'on en retranche la courbe C_3, on voit que la courbe $2C_2$ a en A la multiplicité quatre et passe deux fois par $(\beta, 1)$, $(\beta, 1, 1)$. On en conclut que la courbe C_2 passe deux fois par le point A et une fois par les points $(\beta, 1)$, $(\beta, 1, 1)$.

Le système $|3C_0|$ contient également les courbes $C_4 + 2C_5$. Une de ces courbes peut se comporter comme une courbe C_0', ou C_0'', mais aussi comme une courbe $C_0' + C_0''$. Elle passe alors huit fois par A, trois fois par $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, trois fois par $(\beta, 1)$, une fois par $(\beta, 2$, $(\beta, 3)$, $(\beta, 4)$ et deux fois par $(\beta, 1, 1)$. Si l'on en retranche la courbe C_4, on voit que les courbes $2C_5$ passent six fois par A, deux fois par $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$ et par $(\beta, 1)$, $(\beta, 1, 1)$. Par conséquent les courbes C_5 passent trois fois par A, une fois par $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$ et par $(\beta, 1)$, $(\beta, 1, 1)$.

7. Sur la surface Φ, les courbes σ_α, σ_β, ρ correspondent respectivement aux domaines des points $(\alpha, 2)$, $(\beta, 4)$ et $(\beta, 1, 1)$. Les courbes C_1 passent simplement par le point $(\beta, 4)$ et par conséquent, les courbes Γ_1 rencontrent σ_β en un point mais ne rencontrent pas σ_α et ρ. On en conclut la relation fonctionnelle

$$7\Gamma_0 \equiv 7\Gamma_1 + \sigma_\alpha + 3\rho + 5\sigma_\beta + \Delta_1,$$

Δ_1 étant un terme provenant de la présence des autres points de diramation de la surface Φ (au nombre de deux au moins).

Les courbes C_2 passent par le point $(\beta, 1, 1)$ mais non par $(\alpha, 2)$, $(\beta, 4)$. Les courbes Γ_2 rencontrent donc ρ en un point et on a

$$7\Gamma_0 \equiv 7\Gamma_2 + 2\sigma_\alpha + 6\rho + 3\sigma_\beta + \Delta_2,$$

Δ_2 provenant des autres points de diramation de Φ.

Les courbes C_2 particulières, qui passent deux fois par $(\beta, 4)$, rencontrées plus haut, donnent sur Φ les courbes $\Gamma_2 - \sigma_\beta$.

Les courbes C_3 passent simplement par $(\alpha, 2)$ et les courbes Γ_3 rencontrent donc σ_α en un point. On a

$$7\Gamma_0 \equiv 7\Gamma_3 + 3\sigma_\alpha + 2\rho + \sigma_\beta + \Delta_3.$$

Les courbes C_4 passent une fois par $(\alpha, 2)$ et $(\beta, 4)$, donc les courbes Γ_4 rencontrent en un point chacune des courbes σ_α, σ_β. On a

$$7\Gamma_0 \equiv 7\Gamma_4 + 4\sigma_\alpha + 5\rho + 6\sigma_\beta + \Delta_4.$$

Les courbes C_5 passent une fois par $(\alpha, 1)$ et une fois par $(\beta, 1, 1)$, donc les courbes Γ_5 rencontrent σ_α et ρ en un point, mais ne rencontrent pas σ_β. On en déduit

$$7\Gamma_0 \equiv 7\Gamma_5 + 5\sigma_\alpha + 8\rho + 4\sigma_\beta + \Delta_5.$$

Les courbes C_6 passent deux fois par $(\alpha, 2)$, donc les courbes Γ_6 rencontrent σ_α en deux points, mais ne rencontrent pas ρ et σ_β. Par conséquent on a

$$7\Gamma_0 \equiv 7\Gamma_6 + 6\sigma_\alpha + 4\rho + 2\sigma_\beta + \Delta_6.$$

Dans ces relations, Δ_3, Δ_4, Δ_5 et Δ_6 proviennent des points de diramation de Φ distincts de A'.

Observons que l'on déduit des relations précédentes

$$14\Gamma_0 \equiv 7(\Gamma_1 + \Gamma_6) + 7\sigma_\alpha + 7p + 7\sigma_\beta + \Delta_1 + \Delta_6,$$

ce qui montre bien que les courbes $\Gamma_1 + \Gamma_6$ appartiennent au système $|\Gamma_0 + \Gamma'_0|$.

De même, on a

$$14\Gamma_0 \equiv 7(\Gamma_2 + \Gamma_5) + 7\sigma_\alpha + 14\rho + 7\sigma_\beta + \Delta_2 + \Delta_5\,;$$

par conséquent les courbes $\Gamma_2 + \Gamma_5$ appartiennent au système $|\Gamma_0 + \Gamma''_0|$.

Liège, le 20 mars 1955.