Surfaces algébriques tracées sur un cône de Veronese

Lucien Godeaux

Résumé
Détermination des genres de surfaces algébriques tracées sur un cône de Veronese, c'est-à-dire sur un cône de l'espace S6 dont les sections hyperplanes sont des surfaces de Veronese.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Surfaces algébriques tracées sur un cône de Veronese,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l Académie.

Résumé. — Détermination des genres de surfaces algébriques tracées sur un cône de Veronese, c'est-à-dire sur un cône de l'espace S_6 dont les sections hyperplanes sont des surfaces de Veronese.

C'est l'étude d'une surface considérée par G. Humbert qui nous a conduit aux surfaces tracées sur un cône de Veronese V_3^4 de S_6 (cône dont les sections hyperplanes sont des surfaces de Veronese). La surface de Humbert représente l'involution du second ordre appartenant à la surface qui représente les couples de points d'une courbe de genre trois ; elle est birationnellement équivalente à la section de V_3^4 par une hypersurface cubique touchant le cône en 28 points. La considération de cette surface et plus généralement de la section V_3^4 par une hypersurface cubique, nous a permis d'établir l'existence d'involutions rationnelles d'ordre sept, et d'involutions de genres un appartenant à cette surface, dont les genres sont $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 4$, $P_2 = 7$. Récemment, nous avons montré que l'on peut construire, sur la surface intersection de V_3^4 avec une hypersurface d'ordre n, des involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis, ceux-ci ayant une structure assignée (¹).

(¹) *Sur une surface considérée par M. G. Humbert* (BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, 1921, pp. 14-20), *Sur une involution rationnelle douée de trois points de coïncidence, appartenant à une surface de genre trois* (BULLETIN DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1921, pp. 653-665, 694-702), *Sur une famille de surface algébrique de l'espace à six dimensions* (BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATH. DE FRANCE, 1925, pp. 484-503), *Sur quelques involutions appartenant à la surface de Humbert généralisée* (BULL. DE L ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1936, pp. 240-251, 438-446), *Sur la construction d'exemples de surfaces algébriques contenant des involutions cycliques* (IDEM, 1955, pp. 798-804).

En vue de l'étude de certaines de ces involutions, il importait de déterminer les genres de la surface envisagée ; c'est l'objet de cette note. D'une manière précise, nous démontrons que :

1) *La surface* F, *d'ordre* 4n, *de* S_6, *intersection du cône de Veronese* V_3^4 *et d'une hypersurface d'ordre* n, *a les genres*

$$p_a = p_g = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(4n-3), \quad p^{(1)} = n(2n-5)^2 + 1.$$

2) *La surface* F_1, *d'ordre* $4n-2$, *qui, avec un cône du second ordre, forme l'intersection du cône de Veronese* V_3^4 *avec une hypersurface d'ordre* n, *a les genres*

$$p_a = p_g = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(4n-9),$$
$$p^{(1)} = 2(n-3)^2(2n-1) + 1.$$

1. Considérons, dans un espace linéaire S_6 à six dimensions, dont les coordonnées ponctuelles sont X_0, X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{23}, X_{31}, X_{12}, le cône V_3 représenté par les équations

$$X_{22}X_{33} = X_{23}^2, \quad X_{33}X_{11} = X_{31}^2, \quad X_{11}X_{22} = X_{12}^2,$$
$$X_{11}X_{23} = X_{31}X_{12}, \quad X_{22}X_{31} = X_{12}X_{23}, \quad X_{33}X_{12} = X_{23}X_{31},$$

dont les sections hyperplanes sont des surfaces de Veronese et que, pour cette raison, nous appelons cône de Veronese.

En posant

$$\rho X_0 = x_1x_4, \quad \rho X_{ik} = x_ix_k, \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{1}$$

nous obtenons une représentation birationnelle de ce cône sur un espace à trois dimensions $S_3(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Une hypersurface V_5^n de S_6, d'équation

$$X_0^n\varphi_0 + X_0^{n-1}\varphi_1(X_{11}, X_{22}, \dots, X_{12}) + \dots + \varphi_n(X_{11}, X_{22}, \dots, X_{12}) = 0,$$

où $\varphi_i(X_{11}, X_{22}, \dots, X_{12})$ désigne une forme algébrique de degré i, ne passant pas par le sommet O_0 du cône V_3^4, coupe celui-ci suivant une surface algébrique F dont nous allons déterminer les genres.

Soit Φ une surface de Veronese section hyperplane du cône V_3^4 ; elle contient un réseau homaloïdal de coniques. Les cônes du second ordre projetant de O_0 ces coniques découpent sur la surface F des courbes C formant un réseau $|C|$ de degré n. Nous avons établi que le système canonique de F est

$$|(2n-5)C|.$$

La transformation (1) fait correspondre à F une surface F′ d'équation

$$(x_1x_4)^n\varphi_0 + (x_1x_4)^{n-1}\varphi_1(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_1x_2) + \cdots + \\ + \varphi_n(x_1, x_2^2, \ldots, x_1x_2) = 0,$$

d'ordre $2n$, possédant, au point $O_4'(0, 0, 0, 1)$ la multiplicité n, le cône tangent se réduisant au plan $x_1 = 0$ compté n fois. La surface F′ possède une droite a, infiniment voisine de O_4' située dans le plan $x_1 = 0$, multiple d'ordre n.

Aux courbes C correspondent sur F′ les sections par les plans passant par O_4'. On en conclut que les courbes C sont de genre $(n-1)^2$.

2. Opérons, sur la surface F′, la transformation birationnelle

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1y_4 : y_2y_4 : y_3y_4 : y_2y_3, \qquad (2)$$

qui fait correspondre au domaine du point O_4' le plan $y_4 = 0$. A la surface F correspond la surface F″ d'équation

$$(y_1y_2y_3)^n\varphi_0 + (y_1y_2y_3)^{n-1}y_4\varphi_1(y_1^2, y_2^2, \ldots, y_1y_2) + \cdots \\ + y_4^n\varphi_n(y_1^2, y_2^2, \ldots, y_1,y_2) = 0.$$

La surface F″, d'ordre $3n$, a la multiplicité $2n$ en O_4'' (0, 0, 0, 1) et passe n fois par chacune des droites $y_1 = y_4 = 0$, $y_2 = y_4 = 0$, $y_3 = y_4 = 0$. Les deux dernières sont fondamentales pour la transformation, la première correspond à la droite a.

Les adjointes d'ordre $3n-4$ à la surface F″ doivent passer $2n-2$ fois par O_4'' et $n-1$ fois par les droites $y_1 = y_4 = 0$, $y_2 = y_4 = 0$, $y_3 = y_4 = 0$. Par conséquent, elles comprennent comme partie fixe les quatre faces du tétraèdre de référence et sont complétées par des surfaces d'ordre $3n-8$, ayant la multiplicité $2n-5$ en O''_4 et passant $n-3$ fois par les droites $y_1 = y_4 = 0$, $y_2 = y_4 = 0$, $y_3 = y_4 = 0$.

L'équation de ces surfaces s'écrit

$$\begin{aligned} y_4^{n-3}\psi_{2n-5}(y_1, y_2, y_3) + y_4^{n-4}y_1y_2y_3\psi_{2n-7}(y_1, y_2, y_3) + \dots \\ + y_4^{n-3-k}(y_1y_2y_3)^k\psi_{2n-5-2k}(y_1, y_2, y_3) + \dots \\ + (y_1y_2y_3)^{n-3}\psi_1(y_1, y_2, y_3) = 0, \end{aligned}$$

où $\psi_i(y_1, y_2, y_3)$ est une forme algébrique de degré i.

Le genre géométrique de F″ est donc

$$p_g = \sum_{k=0}^{n-3} (n-k-2)(2n-2k-3),$$

c'est-à-dire

$$p_g = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(4n-3).$$

Pour $n = 3$, on a $p_g = 3$ et le système canonique de F est le réseau $|C|$.

3. En opérant en sens inverse la transformation (2), on passe des adjointes à F″ aux adjointes à F′, dont l'équation est

$$\begin{aligned} (x_1x_4)^{n-3}\psi_1(x_1, x_2, x_3) + \dots + (x_1x_4)^k\psi_{2n-5-2k}(x_1, x_2, x_3) + \\ \dots + \psi_{2n-5}(x_1, x_2, x_3) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Ce sont des surfaces d'ordre $2n-5$ qui, jointes au plan $x_1 = 0$, donnent les adjointes d'ordre $2n-4$ à F′.

Les surfaces (3) ont la multiplicité $n-2$ en O'_4 et passent $n-3$ fois par la droite a, infiniment voisine de O'_4 dans le plan $x_1 = 0$.

Sur F, le système canonique est découpé par les hypersurfaces d'ordre $n-2$ passant par une courbe C, car le système des sections hyperplanes de F est $|2C|$. La surface F est évidemment régulière.

La surface F *a les genres*

$$p_a = p_g = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(4n-3), \quad p^{(1)} = n(2n-5)^2 + 1.$$

4. Nous allons maintenant considérer la surface F_1 intersection du cône V_3^4 avec une hypersurface V_5^n contenant un cône du second ordre de V_3^4, par exemple le cône

$$X_{12}^2 - X_{11}X_{22} = 0, \qquad X_{31} = X_{23} = X_{33} = 0.$$

L'équation de cette hypersurface peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} & X_0^{n-1}(X_{31}\varphi_0' + X_{23}\varphi_0'' + X_{33}\varphi_0''') + \dots \\ & \quad + X_0^{n-i}[X_{31}\varphi_{i-1}' + X_{23}\varphi_{i-1}'' + X_{33}\varphi_{i-1}'''] + \dots \\ & \quad + X_{31}\varphi_{n-1}' + X_{23}\varphi_{n-1}'' + X_{33}\varphi_{n-1}''' \\ & \quad + (X_{12}^2 - X_{11}X_{22})[X_0^{n-2}\varphi_0 + \dots \\ & \quad + X_0^{n-i}\varphi_{i-2} + \dots + \varphi_{n-2}] = 0, \end{aligned}$$

où φ_i', φ_i'', φ_i''' sont des formes algébriques de degré i en X_{12}, X_{22}, ..., X_{12}.

La surface F_1 est d'ordre $4n - 2$ et O_0 est un point multiple d'ordre deux de cette surface. En effet, l'hyperplan

$$X_{31}\varphi_0' + X_{23}\varphi_0'' + X_{33}\varphi_0''' = 0$$

en O_0 à l'hypersurface V_5^n coupe V_3^4 suivant le cône du second ordre commun à V_5^n et V_3^4 et suivant un second cône du second ordre tangent à F_1 en O_0.

La transformation (1) fait correspondre à la surface F_1 une surface F_1' d'équation

$$\begin{aligned} (x_1x_4)^{n-1}(x_1\varphi_0' + x_2\varphi_0'' + x_3\varphi_0''') + \dots + (x_1x_4)^{n-i}[x_1\varphi_{i-1}' + x_2\varphi_{i-1}'' + \\ + x_3\varphi_{i-1}'''] + \dots + x_1\varphi_{n-1}' + x_2\varphi_{n-1}'' + x_3\varphi_{n-1}''' = 0. \end{aligned}$$

C'est une surface d'ordre $2n - 1$ possédant en O_4' la multiplicité n, le cône tangent en ce point comprenant le plan $x_1 = 0$ compté $n - 1$ fois.

A la surface F_1', la transformation (2) fait correspondre la surface F_1'' d'équation

$$\begin{aligned} & (y_1y_2y_3)^{n-1}(y_1\varphi_0' + y_2\varphi_0'' + y_3\varphi_0''') + \dots + \\ & (y_1y_2y_3)^{n-i}y_4^{i-1}(y_1\varphi_{i-1}' + y_2\varphi_{i-1}'' + y_3\varphi_{i-1}''') + \dots + \\ & y_4^{n-1}(y_1\varphi_{n-1}' + y_2\varphi_{n-1}'' + y_3\varphi_{n-1}''') = 0. \end{aligned}$$

La surface F_1'' a l'ordre $3n - 2$, elle passe $2n - 1$ fois par O_4'' et $n - 1$ fois par les droites $y_1 = y_4 = 0$, $y_2 = y_4 = 0$, $y_3 = y_4 = 0$. La première correspond à la droite a et par conséquent la surface F_1' possède une droite multiple d'ordre $n - 1$ infiniment voisine de O_4' dans le plan $x_1 = 0$.

Les adjointes d'ordre $3n - 6$ à la surface F_1'' doivent passer $2n - 3$ fois par O_4'' et $n - 2$ fois par les trois droites multiples de la surface. Elles comprennent donc comme partie fixe les trois plans $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ et sont complétées par des surfaces d'ordre $3n - 9$ passant $2n - 6$ fois par O_4'' et $n - 3$ fois par les trois droites multiples. Ces surfaces ont pour équation

$$y_4^{n-3}\psi_{2n-6} + \dots + y_4^{n-3-i}(y_1y_2y_3)^i\psi_{2n-6-2i} + \dots + (y_1y_2y_3)^{n-3}\psi_0 = 0,$$

où ψ_i est un polynôme homogène de degré i en y_1, y_2, y_3.

Le nombre de ces surfaces linéairement indépendantes est égal à

$$p_g = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(4n-9),$$

qui donne le genre géométrique de F_1.

5. Opérons sur l'équation des adjointes à F_1'' la transformation inverse de (2). Nous obtenons l'équation

$$(x_1x_4)^{n-3}\psi_0 + \dots + (x_1x_4)^i\psi_{2n-6-2i} + \dots + \psi_{2n-6} = 0$$

de la partie mobile des adjointes d'ordre $2n - 5$ à la surface F_1 (d'ordre $2n - 1$). La partie fixe de ces adjointes est le plan $x_1 = 0$.

Parmi ces adjointes, se trouvent les surfaces formées de $2n - 6$ plans passant par O_4'. Mais il convient d'observer que O_0 est double conique pour F_1.

Le domaine de ce point est donc équivalent à une courbe rationnelle γ de degré virtuel — 2. A cette courbe γ correspond sur F_1' le domaine du point O_4' dans le plan

$$x_1\varphi_0' + x_2\varphi_0'' + x_3\varphi_0''' = 0.$$

Une courbe C rencontre γ en un point, ce qui montre bien que le réseau $|C|$ est, sur F_1, de degré $n-1$. On en conclut que le système canonique de F_1 est

$$|(2n-6)C+(n-3)\gamma|.$$

Les courbes canoniques ne rencontrent pas γ.
La surface F_1 est régulière, donc :

La surface F_1 *a les genres*

$$p_a = p_g = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(4n-9),\ p^{(1)} = 2(n-3)^2(2n-1)+1.$$

Aux courbes C correspondent les sections de F'_1 par les plans passant par O'_4, c'est-à-dire des courbes planes d'ordre $2n-1$ possédant un point multiple d'ordre n auquel est infiniment voisin un point multiple d'ordre $n-1$. Les courbes C sont donc de genre $(n-1)(n-2)$ et forment un réseau de degré $n-1$.

6. Pour $n=3$, la surface F_1, d'ordre dix, a les genres $p_a = p_g = 1$, $p^{(1)} = 1$. C'est une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$), déjà rencontrée par M. B. d'Orgeval et par G. Fano. Elle possède un point double conique O_0 et peut se ramener à un plan double dont la courbe de diramation, du sixième ordre, a pour équation

$$\begin{aligned}&(x_1\varphi'_1 + x_2\varphi''_1 + x_3\varphi'''_1)^2 - \\ &4(x_1\varphi'_0 + x_2\varphi''_0 + x_3\varphi'''_0)(x_1\varphi'_2 + x_2\varphi''_2 + x_3\varphi''_3) = 0.\end{aligned}$$

Les courbes C correspondent aux droites du plan double.
Pour $n=4$, la surface F_1, d'ordre 14, a les genres $p_a = p_g = 7$, $p^{(1)} = 15$. Le système canonique de cette surface est $|2C+\gamma|$, c'est-à-dire le système des sections hyperplanes de la surface. Dans le cas $n=4$, F_1 est donc une surface canonique.

Dans le cas où n est quelconque, le système canonique de F_1 est découpé par les hypersurfaces d'ordre $n-3$.

Liège, le 22 août 1955.